بنام خدا

جزوه ی حل تمرین هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی - گرینبرگ

نویسنده: محمد گرجندی

حل تمرین هندسه ی اقلیدسی و نااقلیدسی

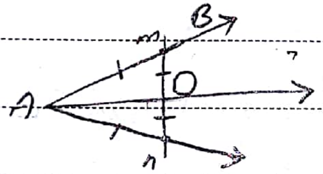
تمرین صفحه ی ۳۲

۱) اصطلاحات زیر را تعریف کنید.

الف) نقطه ی M وسط پاره خط AB. هرگاه نقطه ی M از پاره خط AB از دو سر پاره خط یعنی A و B به یک فاصله باشد آنگاه M را نقطه ی وسط پاره خط AB گوییم.

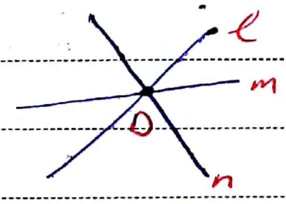
ب) عمود منصف پاره خط AB. (می توانید از اصطلاح «نقطه وسط» که هم اکنون تعریف کردید استفاده کنید.) اگر M نقطه ی وسط پاره خط AB باشد و خط l را چنان رسم کنیم که از نقطه ی M بگذرد و نیم خط $\overrightarrow{MC}$ روی l چنان باشد که زاویه ی $C\hat{M}B$ قائمه شود آنگاه خط l را عمود منصف AB گوییم.

ج) نیم خط $\overrightarrow{BD}$ نیمساز $A\hat{B}C$. (نقطه ی مفروض D بین A و C است.) چنانچه زاویه ای با راس A داشته باشیم که دو ضلع زاویه ی آن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ باشند نقاط m و n را روی اضلاع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ چنان انتخاب می کنیم که $Am \cong An$ باشد نقطه ی وسط پاره خط mn را O نام می گذاریم از راس A به O وصل کرده و نیم خط $\overrightarrow{AO}$ را رسم می نماییم در این صورت $\overrightarrow{AO}$ نیمساز زاویه ی $\hat{A}$ می باشد.



د) هم خطی نقاط A، B و C. سه نقطه A و B و C را چنان داریم که AC چنان رسم شده است که B مابین A و C قرار دارد.

ه) اگر سه خط l و m و n همدیگر را تنها در یک نقطه ی O به طور همزمان قطع کنند گوییم این سه خط متقاربند.



۲) اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

الف) مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ حاصل از سه نقطه غیر هم خط A، B و C. سه نقطه ی A و B و C چنان داده شده اند که بر یک خط نیستند و چنان داده شده اند که پاره خط های AB و AC و BC هیچ گونه نقطه مشترکی ندارند و فقط در یکی از دو سر مشترکند. سه ضلعی را که چنین تعریف کردیم که از سه پاره خط یاد شده درست شده که این سه پاره خط اضلاع آن و این چهار نقطه رئوس آن نامیده می شوند مثلث نام دارد.

ب) رأس‌های اضلاع و زاویه‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ (در اضلاع) پاره‌خط هستند نه خط.
رأس‌ها و اضلاع در قسمت الف تعریف شده.

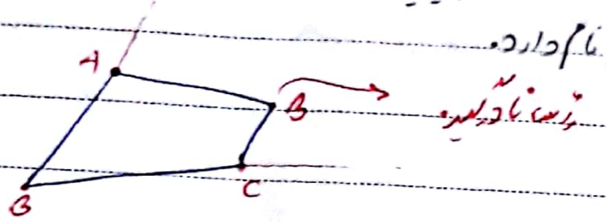
ج) اضلاع مقابل به و مجاور به رأس A از $\triangle ABC$. چنانچه $\overset{\triangle}{ABC}$ یک مثلث باشد ضلع مقابل به رأس A عبارت است از ضلعی که روبه‌روی زاویه‌ی A قرار می‌گیرد یا به عبارتی ضلعی است که حرف A در آن قرار ندارد یعنی BC.
اضلاع مجاور به رأس A عبارت است از اضلاعی که روی نیم‌خط‌هایی قرار دارد که از رأس A خارج می‌شود.

د) میانه‌های یک مثلث (شکل ۱۸.۱) میانه‌های یک مثلث عبارت است از پاره‌خط‌هایی که از رئوس خارج می‌شوند و ضلع مقابل به رأس را به دو نیمه‌ی قابل انطباق تقسیم می‌کند.
ه) ارتفاع‌های یک مثلث (شکل ۱۹.۱) ارتفاع‌های یک مثلث عبارت است از پاره‌خط‌هایی که از رئوس خارج می‌شوند و بر ضلع مقابل به رأس یا امتداد آن عمود می‌شود (و یا بر خط شامل ضلع مقابل عمود است.)
و) مثلث متساوی‌الساقین، قاعده و زاویه‌های مجاور به قاعده.
مثلث متساوی‌الساقین: عبارت است از مثلثی که حداقل دو ضلع آن قابل انطباق با یکدیگر باشند.
قاعده: پاره‌خطی از مثلث که ارتفاع بر خط شامل آن عمود می‌گردد.
زاویه‌های مجاور به قاعده: زوایایی که یک ضلع زاویه‌ی آن جزئی است از خطی که شامل قاعده است.

ز) مثلث متساوی‌الاضلاع: عبارت است از مثلثی که هر سه ضلع آن قابل انطباق باشند.
ح) مثلث قائم‌الزاویه: عبارت است از مثلثی که یک زاویه‌ی آن قائمه باشد.

۳

الف) زاویه‌های $\overset{\square}{ABCD}$: اگر دو ضلع چهارضلعی را به صورت خط در نظر بگیریم زاویه‌های ایجاد شده توسط خط‌ها را که زمین نادیده در خط نهادن درون آن می‌افتد زاویه‌ی چهارضلعی ABCD نام دارد.

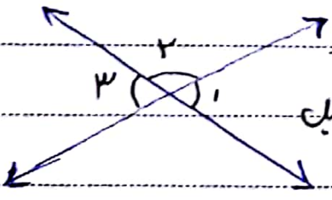


ب) اضلاع مجاور $\overset{\square}{ABCD}$: ضلع‌های یاد شده در تعریف چهارضلعی $\overset{\square}{ABCD}$ که دارای نقطه‌ی مشترکی به نام رأس بودند را اضلاع مجاور می‌نامیم.

ج) اضلاع روبه‌رو در $\overset{\square}{ABCD}$: ضلع‌های یاد شده در تعریف چهارضلعی $\overset{\square}{ABCD}$ که دارای نقطه‌ی مشترک نبودند را اضلاع روبه‌رو می‌نامیم.

د) قطرهای $\overset{\square}{ABCD}$: عبارت است که پاره‌خطی که دو رأس از چهارضلعی را به هم وصل کرده و ضلعی از چهارضلعی نیست.

هـ) تعریف متوازی‌الاضلاع (از واژه‌ی «موازی» استفاده کنید): عبارت است از چهارضلعی که اضلاع روبه‌روی آن دو به دو با هم موازی‌اند.

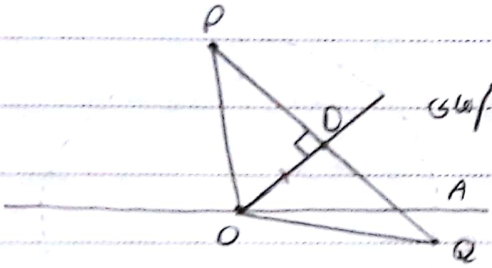


۴) طبق تعریف دو زاویه‌ی $\hat{۱}$ و $\hat{۲}$ و دو زاویه‌ی $\hat{۲}$ و $\hat{۳}$ مکمل یکدیگرند لذا $\frac{\hat{۱}+\hat{۲}}{۲}$ و $\frac{\hat{۲}+\hat{۳}}{۲}$ زوایای قائمه‌اند چون که طبق تعریف به ترتیب با مکمل‌شان یعنی $\frac{\hat{۱}+\hat{۲}}{۲}$ و $\frac{\hat{۲}+\hat{۳}}{۲}$ قابل انطباق‌اند و از طرفی طبق اصل چهارم اقلیدس (تمام زوایای قائمه با یکدیگر قابل انطباق‌اند) داریم:

$$\frac{\hat{۲}+\hat{۳}}{۲} \cong \frac{\hat{۱}+\hat{۲}}{۲} \rightarrow \hat{۲}+\hat{۳} \cong \hat{۱}+\hat{۲} \rightarrow \hat{۱} \cong \hat{۳}$$

تعریف دو زاویه‌ی متقابل به رأس: دو زاویه‌ای که رأس‌شان یکی باشد و اضلاع نظیر با هم متقابل باشند.

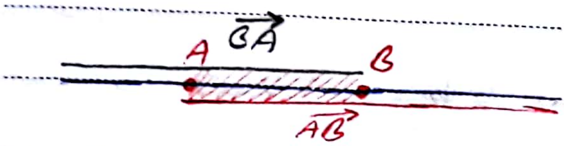
۵



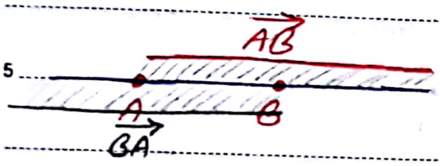
دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم می‌نماییم دو نقطه‌ی دلخواه روی محیط دایره به نام‌های P و Q انتخاب می‌کنیم خط عمودی از مرکز دایره به پاره خط PQ رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را D می‌نامیم لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AO \cong AO \\ P\hat{O}O = Q\hat{O}O = ۹۰^\circ \end{array}\right. \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}}$$

۷*



$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$



$\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$

صفحه‌ی ۵۵ و ۵۶

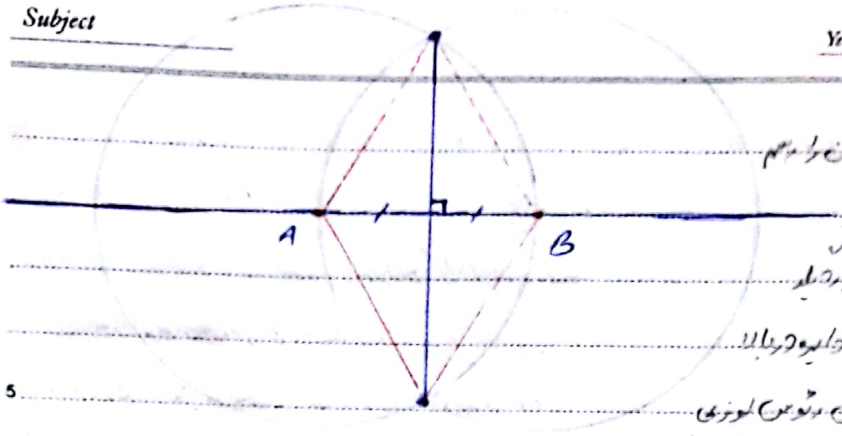
بنداشت میان بود ۱: اگر A*B*C، آنگاه A، B و C سه نقطه‌ی متمایزند که بر یک خط قرار دارند و C*B*A.

بنداشت میان بود ۲: دو نقطه‌ی متمایز B و D داده شده‌اند. نقاطی مانند A، C و E بر $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند چنان که A*B*D، B*C*D و B*D*E.

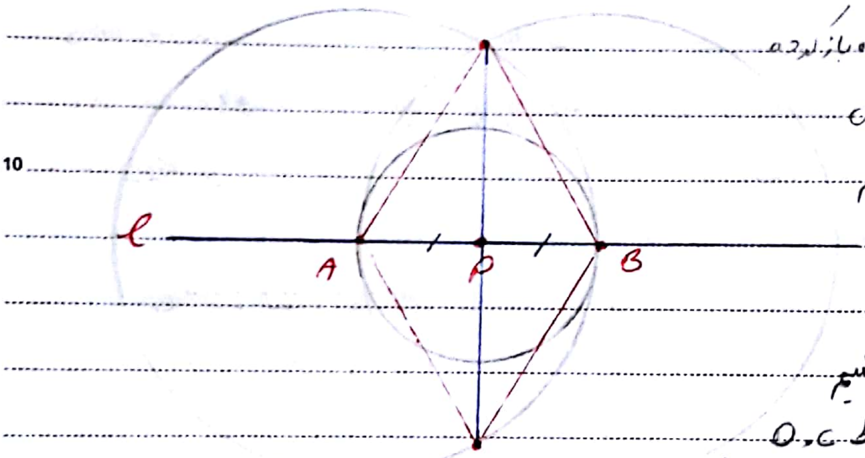
بنداشت میان بود ۳: اگر A، B و C سه نقطه‌ی متمایز بر یک خط باشند، یکی و تنها یکی از آن‌ها بین دوتای دیگر واقع است.

۸

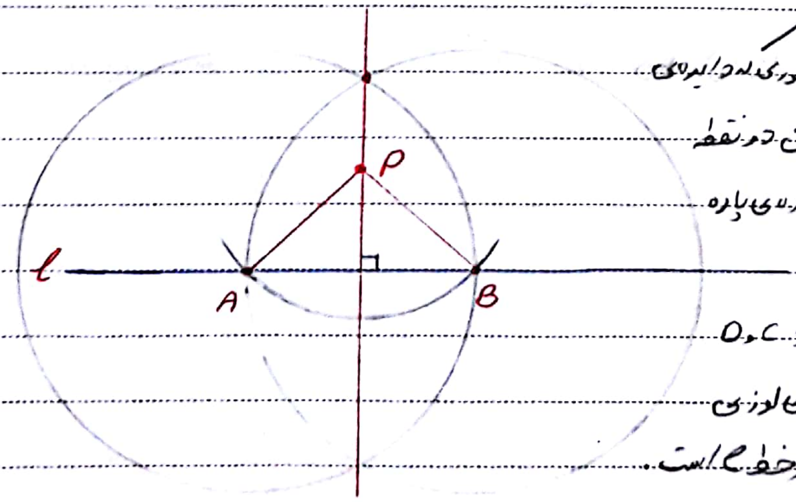
تمرین های اصلی صفحه ۳۹



۱- الف) ابتدا خط l و پاره خط AB بر روی آن را رسم می‌کنیم سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی AB باز کرده دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB رسم می‌کنیم بار دیگر دایره‌ای به مرکز B و شعاع AB رسم می‌کنیم تقاطع دو دایره در بالا و پایین AB و همچنین نقاط A و B را به عنوان رئوس لوزی در نظر گرفته آن را رسم می‌نماییم حال قطر دیگر لوزی را رسم می‌کنیم که عمود منصف پاره خط AB است ☒

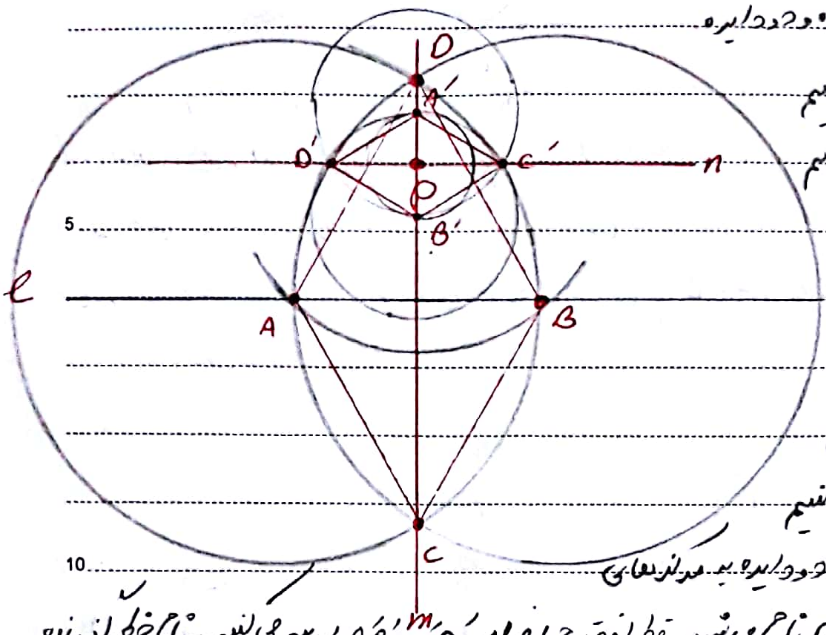


ب) ابتدا دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه باز کرده و دایره‌ای به مرکز P رسم می‌نماییم سپس محل برخورد دایره با خط l را نقاط A و B می‌نامیم سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی پاره خط AB باز می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز A رسم می‌کنیم و سپس دایره‌ای به مرکز B و شعاع AB رسم می‌کنیم محل برخورد این دو دایره را در بالا و پایین نقاط C و D می‌نامیم لوزی ABCD را رسم کرده و قطر عمود آن را رسم می‌کنیم این قطر همان عمود منصف پاره خط AB است.

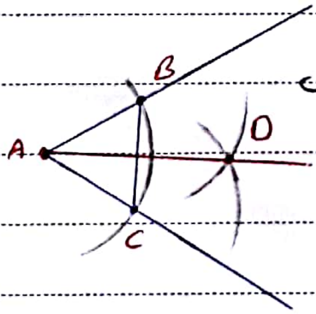


ج) ابتدا دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ای باز می‌کنیم طوری که دایره‌ی رسم شده به مرکز P خط l را در دو نقطه ببرد این دو نقطه را A و B می‌نامیم سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی پاره خط AB باز می‌نماییم دو دایره به مرکزهای A و B رسم می‌نماییم محل برخورد این دو دایره را C و D می‌نامیم لوزی ABCD را رسم می‌کنیم قطر عمودی لوزی عمودی است که از نقطه‌ی P عبور می‌کند عمود بر خط l است.

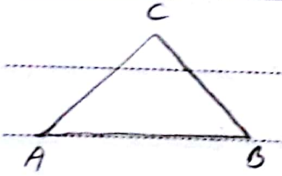
د) ابتدا دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ای باز می‌کنیم که کمان رسم شده به مرکز P خط l را در دو نقطه به نام‌های A و B قطع نماید حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی پاره خط AB باز کرده و دو دایره رسم می‌کنیم محل تقاطع دو دایره را C و D نام‌گذاری می‌کنیم حال قطر عمود چهارضلعی ABCD را رسم می‌کنیم که عمود رسم شده از نقطه‌ی P بر خط l است. نام خط عمود را m می‌نامیم حال از نقطه‌ی P واقع بر خط m عمودی بر خط m رسم می‌کنیم. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه باز می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز P رسم می‌کنیم محل برخورد دایره با خط m را A′ و B′ نام‌گذاری می‌کنیم حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی A′B′ باز کرده و دو دایره به مرکزهای A′ و B′ رسم می‌کنیم محل برخورد دو دایره را C′ و D′ نام می‌نهیم قطر افقی چهارضلعی D′C′B′A′ را رسم می‌کنیم و نام خط گذرنده بر آن را n می‌گذاریم خط n موازی با خط l است چون که عمود مشترک m را دارند.

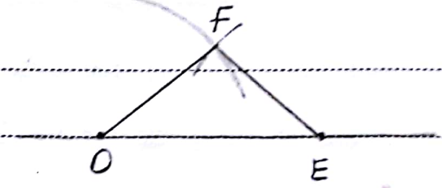


هـ) ابتدا دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه رسم می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز A رسم می‌کنیم محل تلاقی دایره با ضلع‌های زاویه را B و C می‌گذاریم سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی BC باز کرده و دو کمان به مرکز B و C رسم می‌کنیم به طوری که همدیگر را در نقطه‌ای به نام D قطع کنند سپس از نقطه‌ی A به D وصل کرده و چون مثلث $A\hat{B}C$ متساوی الساقین است پس عمود منصف BC (یعنی $\overrightarrow{AD}$) همان نیمساز زاویه‌ی A می‌باشد.



د)



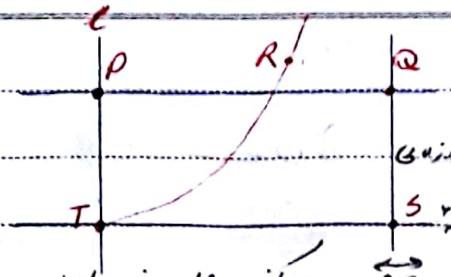


طبق تمرین اصلی ۱-ب می توان بعد از نقطه ی E نقطه ای به نام C′ چنان انتخاب کنیم که EC′ ≅ BC و دهانه ی پرگار را به اندازه ی EC′ باز کرده و یک کمان به مرکز E در بالای پاره خط DE بزنیم حال به همین نحو طبق تمرین اصلی ۲-ب می توان نقطه ای به نام C″ چنان انتخاب کنیم که AC ≅ DC″ لذا دهانه ی پرگار را به اندازه ی DC″ باز می کنیم و یک کمان به مرکز D در بالای پاره خط DE می کشیم محل برخورد دو کمان را F می نامیم حال خواهیم داشت:

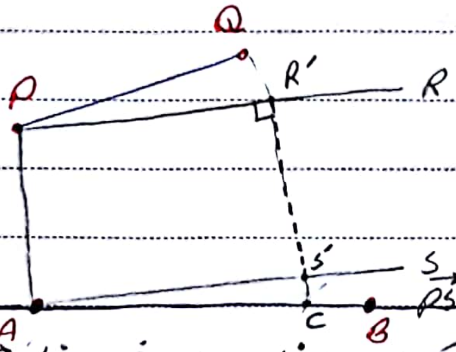
$DE \cong AB$

$AC \cong DF \xrightarrow{(ض ض ض)} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$

$EF \cong BC$



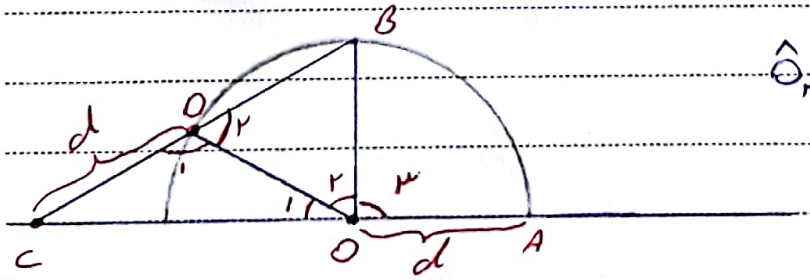
۲- الف) ابتدا خط $\overleftrightarrow{PQ}$ را رسم می‌نماییم حال طبق تمرین اصلی ۱ (ب) عمود l از نقطه‌ی P را بر خط $\overleftrightarrow{PQ}$ رسم می‌کنیم و دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی پاره خط PR باز کرده و دایره‌ای به مرکز P رسم می‌کنیم تا عمود l را در نقطه‌ی T قطع کند طبق تمرین اصلی ۱ (ب) عمودی از T بر l و عمودی از Q بر $\overleftrightarrow{PQ}$ رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو را S می‌نامیم چهارضلعی $\square PQST$: چهارضلعی مفروض است.



ب) ابتدا از نقطه‌ی P به نقطه‌ی A رسم می‌نماییم حال طبق تمرین اصلی ۱ (ب) از نقطه‌ی P خطی عمود بر $\overleftrightarrow{AP}$ رسم می‌نماییم و آن را $\overleftrightarrow{PR}$ نام می‌نهیم، همچنین به همین نحو خطی عمود بر خط $\overleftrightarrow{AP}$ از نقطه‌ی A رسم می‌کنیم و آن را $\overrightarrow{PS}$ نام می‌نهیم

حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی PQ باز کرده و کمانی به مرکز P رسم می‌نماییم و محل برخورد خط $\overrightarrow{PR}$ با کمان PQ را 'R می‌نامیم لذا از 'R طبق تمرین اصلی ۱ (ب) خطی عمود بر PR رسم کرده و محل برخورد خط عمود را با خط PS، 'S می‌گذاریم حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی 'AS باز کرده و کمانی به مرکز A رسم می‌نماییم محل برخورد کمان با خط $\overrightarrow{AB}$ را C گذاشته و لذا واضح است که $AC \cong PQ$ ▨

۳- ★



$$\hat{O}_۳ \overset{?}{=} ۳\hat{O}_۱$$

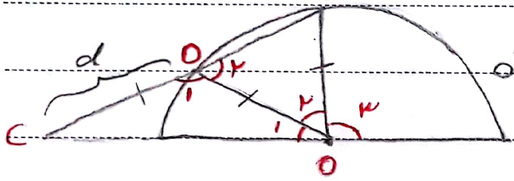
$$\left.\begin{aligned}&\overset{\triangle}{CDO}: \hat{C}+\hat{D}_۱+\hat{O}_۱=۱۸۰°\\&CD=DO \longrightarrow \hat{C}=\hat{O}_۱\\&\hat{D}_۱=\hat{O}_۲+\hat{B}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow ۲\hat{O}_۱+\hat{B}+\hat{O}_۲=۱۸۰° \xrightarrow[\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰-\hat{O}_۳]{\hat{O}_۱+\hat{O}_۲+\hat{O}_۳=۱۸۰°}$$

$$\longrightarrow ۱۸۰-\hat{O}_۳+\hat{O}_۱+\hat{B}=۱۸۰° \longrightarrow \hat{O}_۳=\hat{O}_۱+\hat{B} \ ①$$

$$\begin{aligned}&\hat{O}_۱+\hat{O}_۲+\hat{O}_۳=۱۸۰°\\&\hat{D}_۲+\hat{B}+\hat{O}_۲=۱۸۰°\end{aligned} \longrightarrow \hat{O}_۱+\cancel{\hat{O}_۲}+\hat{O}_۳=\hat{D}_۲+\hat{B}+\cancel{\hat{O}_۲} \rightarrow \hat{O}_۱+\hat{O}_۳=\hat{D}_۲+\hat{B}=۲\hat{B} \ ②$$

$$\left.\begin{matrix}①\\,\\②\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \hat{O}_۳=\hat{O}_۱+\frac{\hat{O}_۱+\hat{O}_۳}{۲}=\frac{۳\hat{O}_۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\hat{O}_۳ \rightarrow \frac{۱}{۲}\hat{O}_۳=\frac{۳}{۲}\hat{O}_۱ \rightarrow \hat{O}_۳=\hat{O}_۱$$

زاویه بیرونی مثلث $\overset{\triangle}{BCO}$: $\hat{O}_{۳} \cong \hat{B} + \hat{C}$



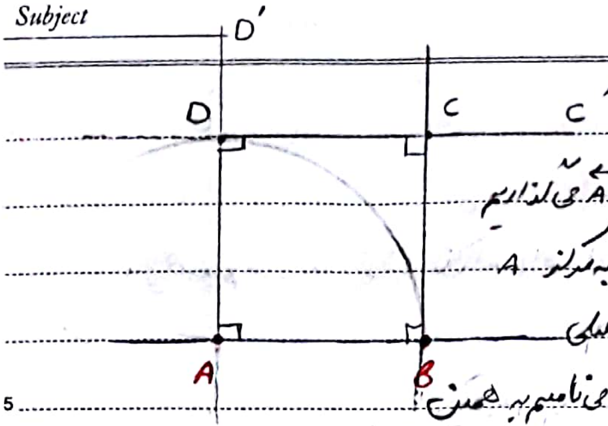
خارجی $\overset{\triangle}{OCD}$: $\hat{D}_{۲} \cong \hat{C} + \hat{O}_{۱}$

$CD \cong OD \Rightarrow \hat{C} \cong \hat{O}_{۱}$

$OD \cong OB \Rightarrow \hat{D}_{۲} \cong \hat{B}$

$\Rightarrow \hat{O}_{۳} \cong \hat{D}_{۲} + \hat{O}_{۱} \cong ۲\hat{O}_{۱} + \hat{O}_{۱} \cong$

$\cong ۳\hat{O}_{۱}$ ■



۴. الف) رسم یک مربع ABCD طبق تمرین اصلی ا.ب یک عمود بر خط AB از نقطه‌ی A رسم می‌کنیم سپس نام عمود آن را $\overleftrightarrow{AD'}$ می‌گذاریم حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی پاره خط AB باز کرده و دایره‌ای به مرکز A رسم کرده و محل برخورد آن با $\overrightarrow{AD'}$ را D می‌نامیم حال طبق تمرین اصلی ا.ب از نقطه‌ی D خط عمود بر خط $\overleftrightarrow{AD}$ را رسم می‌کنیم و آن را DC' می‌نامیم به همین روش خط عمود بر خط $\overrightarrow{AB}$ را از نقطه‌ی B رسم می‌نماییم و محل برخورد آن با خط $\overleftrightarrow{DC'}$ را C می‌نامیم حال از طرفی چون $\overleftrightarrow{AD}$ عمود مشترک دو خط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{DC}$ هست لذا دو خط $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ موازی اند از طرفی چون $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ موازی اند و همچنین $\overleftrightarrow{CB}$ عمود بر خط $\overleftrightarrow{AB}$ است لذا $\overleftrightarrow{CB}$ نیز عمود بر $\overleftrightarrow{DC}$ است و لذا چهارضلعی ABCD طبق تعریف تمرین ۵ (اول) یک مستطیل است و لذا:

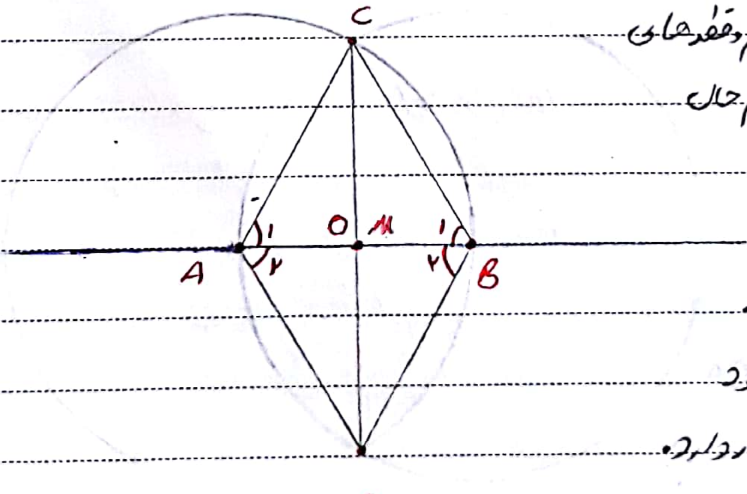
$$AB \cong AD \xrightarrow{\text{بنداشت دوم}} AD \cong CD \xrightarrow{\text{بنداشت دوم}} CD \cong BC$$

$AB \cong CD$ قابلیت انطباق $AD \cong BC$ قابلیت انطباق

که هر دو ضلع روبرو در مستطیل قابل انطباق اند.

لذا چهارضلعی ABCD یک مربع است.

ب) پیدا کردن نقطه‌ی M وسط AB. پاره خط AB به ما داده شده است آن را از طرفین ادامه می‌دهیم و خط $\overleftrightarrow{AB}$ را تشکیل می‌دهیم حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی AB باز کرده و دو دایره به مرکزهای A و B رسم می‌نماییم تا همدیگر را در نقاط C و D قطع نمایند چهارضلعی ABCD را رسم می‌نماییم و قطرهای آن را رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو را M می‌نامیم حال خواهیم داشت:



$$CB \cong BD \cong AC \cong AD$$

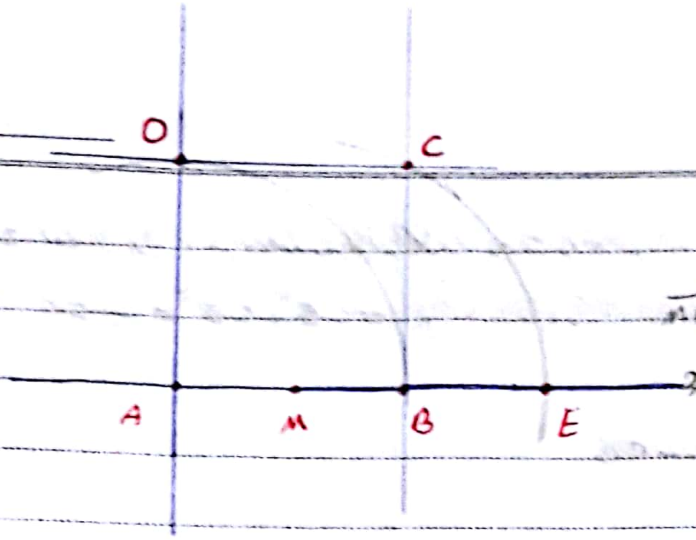
لذا چهارضلعی ABCD یک لوزی است و می‌دانیم که اضلاع لوزی عمود منصف یکدیگرند پس $\overleftrightarrow{CD}$ عمود پاره خط AB است و لذا M وسط ضلع AB قرار دارد.

نکته: می‌توان برای اثبات $AM \cong MB$ از این روش استفاده کرد:

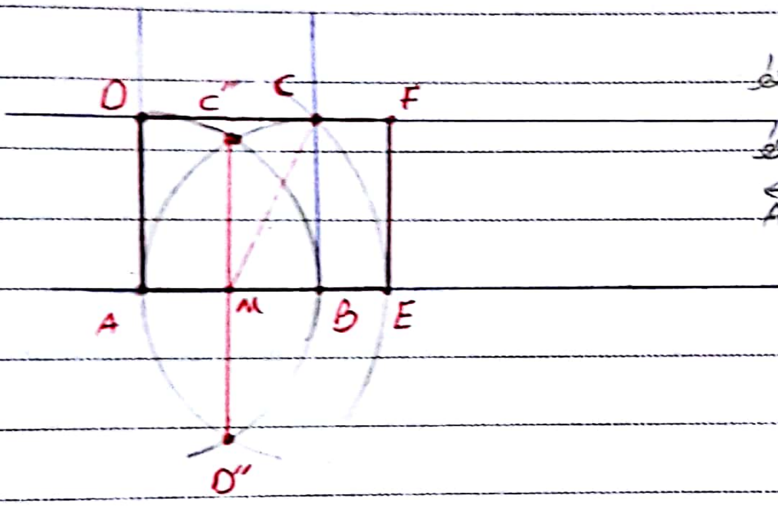
$$\left.\begin{array}{l} AC \cong AD \\ BC \cong BD \\ AB \cong AB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ABD} \Longrightarrow \hat{A}_1 \cong \hat{B}_2 ,\ \hat{A}_2 \cong \hat{B}_1 \Longrightarrow \hat{A} \cong \hat{B}$$

$CB \cong AC$

$\therefore \hat{A} \cong \hat{B}$



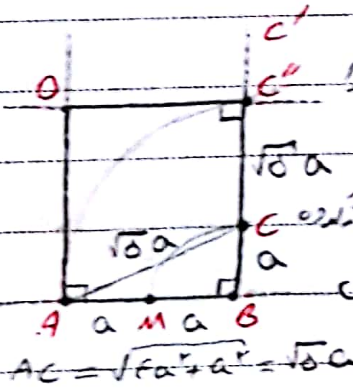
ج) دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی MC باز می‌کنیم
دایره‌ای به مرکز M رسم می‌نماییم به طوری که نیم خط $\overrightarrow{AB}$
را بعد از B خارج از پاره خط MB قطع نماید محل برخورد
را نقطه‌ی E می‌نامیم لذا $MC \cong ME$



د)

طبق تمرین اصلی ا ب، عمودی از نقطه‌ی E بر خط
$\overrightarrow{AE}$ رسم می‌نماییم. محل برخورد عمود رسم شده با خط
$\overleftrightarrow{DC}$ را F می‌نامیم چون که $\overleftrightarrow{DF}$ موازی بر $\overleftrightarrow{AE}$
است پس EF عمود مشترک این دو خط است
و لذا EF عمود بر $\overleftrightarrow{DC}$ است.

روش استاد برای پیدا کردن مستطیل زرین (طلایی) !!



برهان: ابتدا پاره خط AB را رسم می‌کنیم. طبق تمرین اصلی ا الف وسط پاره خط AB را پیدا می‌کنیم و آن را نقطه‌ی M می‌نامیم. حال طبق تمرین اصلی ا ب از نقطه‌ی B عمود بر خط $\overleftrightarrow{AB}$ را رسم می‌کنیم و آن را $\overleftrightarrow{BC'}$ نام می‌گذاریم. حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی MB باز کرده و دایره‌ای به مرکز B چنان رسم می‌کنیم که نیم خط $\overrightarrow{BC'}$ را در نقطه‌ای به نام C قطع نماید. حال مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قائم الزاویه است لذا طول وتر AC طبق قضیه‌ی فیثاغورس برابر است با: $AC=\sqrt{۴a^۲+a^۲}=\sqrt{۵}a$

حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی CA باز کرده و دایره‌ای به مرکز C چنان رسم می‌کنیم که نیم خط $\overrightarrow{CC'}$ را در نقطه‌ای به نام C'' قطع نماید. حال طبق تمرین اصلی ا ب، یک عمود از نقطه‌ی A بر خط $\overleftrightarrow{AB}$ و یک عمود از نقطه‌ی C'' بر خط $\overleftrightarrow{BC'}$ رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو را نقطه‌ی D می‌نامیم. لذا طبق تعریف تمرین ۵ (الف) چهارضلعی ABC''D یک مستطیل است و همچنین برای نسبت اضلاعش برابر است با:

$$\frac{\sqrt{۵}a+a}{۲a}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$ ▨

Subject   Year: Month: Date:

ه) در شکل صفحه قبل ، برای مثلث قائم الزاویه ی $M\hat{B}C$ طبق قضیه ی فیثاغورس خواهیم داشت:

$$CM^۲ = MB^۲ + CB^۲ \xrightarrow{MB = \frac{۱}{۲}CB} CM^۲ = \left(\frac{CB}{۲}\right)^۲ + CB^۲ = \frac{۱}{۴}CB^۲ + CB^۲ = \frac{۵}{۴}CB^۲ \Longrightarrow$$

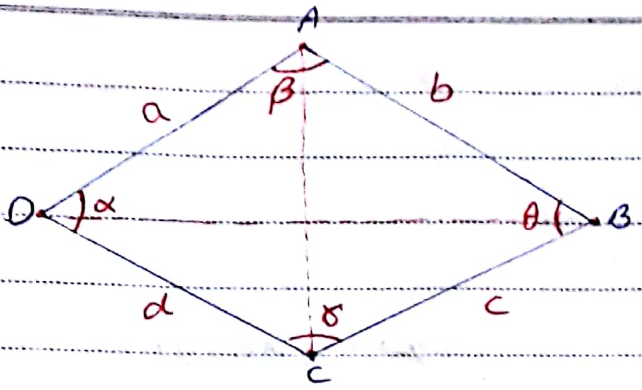
$$CM = \frac{\sqrt{۵}}{۲}CB \quad و \quad AM = \frac{۱}{۲}CB$$

5

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AM + ME}{EF} \xlongequal[EF = CB]{ME = CB} \frac{\frac{۱}{۲}CB + \frac{\sqrt{۵}}{۲}CB}{CB} = \frac{\sqrt{۵} + ۱}{۲}$$

Subject   Year: Month: Date:

۵ *



$$S_{ABCD} \leq \frac{(a+c)(b+d)}{۴}$$

$$s = \frac{۱}{۲} ad\sin\alpha + \frac{۱}{۲} bc\sin\theta$$

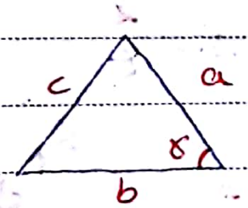
$$s = \frac{۱}{۲} ab\sin\beta + \frac{۱}{۲} dc\sin\gamma$$

$\sin \leq ۱$

$$+\quad ۴s = ad\sin\alpha + bc\sin\theta + ab\sin\beta + dc\sin\gamma \leq ad+bc+ab+dc$$

$$\Longrightarrow ۴s \leq ad+bc+ab+dc = (a+c)(b+d) \Longrightarrow s \leq \frac{(a+c)(b+d)}{۴}$$

۶ *



رابطه کسینوس‌ها: $c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\gamma$ ①

$$s = \frac{۱}{۲} ab\sin\gamma \quad ②$$

solve: $a^۲+b^۲+c^۲-۴\sqrt{۳}s \overset{②,①}{=\!=} a^۲+b^۲+a^۲+b^۲-۲ab\cos\gamma-۲\sqrt{۳}ab\sin\gamma$

$$= ۲a^۲+۲b^۲-۲ab\cos\gamma-۲\sqrt{۳}ab\sin\gamma = ۲\left[a^۲+b^۲-۲ab\left(\frac{۱}{۲}\cos\gamma+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin\gamma\right)\right]$$

$$= ۲\left[a^۲+b^۲-۲ab\left(\sin\left(\frac{\pi}{۶}+\gamma\right)\right)\right] \geq ۲\left[a^۲+b^۲-۲ab\right] = ۲(a-b)^۲ \geq ۰$$

$$\therefore\ a^۲+b^۲+c^۲-۴\sqrt{۳}s \geq ۰ \Longrightarrow a^۲+b^۲+c^۲ \geq ۴\sqrt{۳}s \ ▨$$

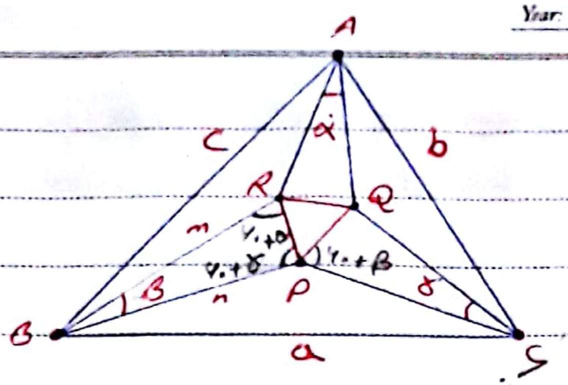
در چه حالتی تساوی برقرار است؟ چنانچه $\gamma = ۶۰$ ، $a = b$ و یا مثلث متساوی‌الاضلاع باشد تساوی برقرار است.

$$a^۲+b^۲-۲ab\sin\left(\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}\right) = a^۲+a^۲-۲a^۲ = ۰ \quad ✓$$

$$c^۲ = a^۲+b^۲-۲ab\cos\frac{\pi}{۳} = a^۲+a^۲-۲a.a\frac{۱}{۲} = ۲a^۲-a^۲ = a^۲ \Longrightarrow c=a$$

SALEH

۹★



زاویه های $B\hat{P}R$ و $C\hat{P}Q$ را محاسبه می‌کنیم:

$\overset{\triangle}{ABC}: ۳\alpha+۳\beta+۳\gamma=۱۸۰^\circ \longrightarrow \alpha+\beta+\gamma=۶۰ \longrightarrow \alpha+\beta=۶۰-\gamma$ ①

قضیه‌ی سینوس ها را برای مثلث $\overset{\triangle}{BPC}$ به کار می‌بریم:

$$\frac{n}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin(B\hat{P}C)}\overset{B\hat{P}C=۱۸۰-(\alpha+\beta)}{=}\frac{\sin\gamma}{\sin(۱۸۰-(\gamma+\beta))}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\beta)}\overset{①}{=}\frac{\sin\gamma}{\sin(۶۰-\alpha)}$$

$$\longrightarrow \frac{n}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin(۶۰-\alpha)}\longrightarrow n=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin(۶۰-\alpha)} \quad ②$$

به همین ترتیب در مثلث $\overset{\triangle}{ARB}$ خواهیم داشت:

$$\frac{m}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin(A\hat{R}B)}=\frac{\sin\alpha}{\sin(۱۸۰-(\alpha+\beta))}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\overset{①}{=}\frac{\sin\alpha}{\sin(۶۰-\gamma)}\longrightarrow$$

$$\frac{m}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin(۶۰-\gamma)}\longrightarrow m=\frac{c\sin\alpha}{\sin(۶۰-\gamma)} \quad ③$$

از تقسیم ③ بر ② داریم:

$$\frac{m}{n}=\frac{\frac{c\sin\alpha}{\sin(۶۰-\gamma)}}{\frac{a\sin\gamma}{\sin(۶۰-\alpha)}}=\frac{c\sin\alpha\cdot\sin(۶۰-\alpha)}{a\sin\gamma\cdot\sin(۶۰-\gamma)} \quad ④$$

از طرفی طبق قضیه‌ی سینوس ها در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin۳\gamma}{\sin۳\alpha} \quad ⑤$$

$$\left.\begin{matrix}④\\ ،\\ ⑤\end{matrix}\right\}\Longrightarrow \frac{m}{n}=\frac{\sin۳\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\sin(۶۰-\alpha)}{\sin۳\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\sin(۶۰-\gamma)} \quad ⑥$$

از طرفی طبق یک اتحاد داریم:

$$\begin{cases}\sin۳\alpha=۴\sin\alpha\cdot\sin(۶۰+\alpha)\cdot\sin(۶۰-\alpha)\\ \sin۳\gamma=۴\sin\gamma\cdot\sin(۶۰+\gamma)\cdot\sin(۶۰-\gamma)\end{cases} \quad ⑦$$

$$\begin{matrix}⑥\\⑦\end{matrix}\Bigg\}\Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{\cancel{۴}\cancel{\sin\gamma}.\sin(۶۰+\gamma).\cancel{\sin(۶۰-\gamma)}.\cancel{\sin\alpha}.\cancel{\sin(۶۰-\alpha)}}{\cancel{۴}\cancel{\sin\alpha}.\sin(۶۰+\alpha).\cancel{\sin(۶۰-\alpha)}.\cancel{\sin\gamma}.\cancel{\sin(۶۰-\gamma)}}=\frac{\sin(۶۰+\gamma)}{\sin(۶۰+\alpha)}$$

$$\text{so}\quad \frac{m}{n}=\frac{\sin(۶۰+\gamma)}{\sin(۶۰+\alpha)}$$

لذا طبق قضیه ی سینوس ها می توان نتیجه گرفت که:

$$B\hat{P}R=۶۰+\gamma \ ⑧ \quad ; \quad P\hat{R}B=۶۰+\alpha$$

به همین روش ثابت می شود که: $C\hat{P}Q=۶۰+\beta$ ⑨

$$\overset{\triangle}{BPC}: B\hat{P}C+\beta+\gamma=۱۸۰° \longrightarrow B\hat{P}C=۱۸۰-(\beta+\gamma)\overset{①}{=\!=}۱۸۰-(۶۰-\alpha)=۱۲۰+\alpha \ ⑩$$

$$B\hat{P}R+C\hat{P}Q+B\hat{P}C+R\hat{P}Q=۳۶۰° \xrightarrow[⑩]{⑧ , ⑨} ۶۰+\gamma+۶۰+\beta+۱۲۰+\alpha+R\hat{P}Q=۳۶۰ \longrightarrow$$

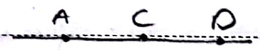
$$\alpha+\beta+\gamma+R\hat{P}Q=۱۲۰ \xrightarrow{\alpha+\beta+\gamma=۶۰} R\hat{P}Q=۶۰°$$

به همین روش می توان نشان داد که $P\hat{Q}R=Q\hat{R}P=۶۰$ لذا مثلث PQR متساوی الاضلاع است.

صفحه ۸۴

تمرینات درباره میانبود

$A*B*C$  طبق تعریف : A و B و C متمایزند.

۱. الف) $A*C*D$  طبق تعریف : A و C و D متمایزند.

حال باید نشان دهیم که $B\neq D$ (یعنی B و D هم متمایزند). فرض خلف می کنیم که $B=D$ باشد لذا خواهیم داشت:

$$\begin{matrix}A*B*C\\ A*C*D \underset{B=D}{=\!=} A*C*B\end{matrix} \Longrightarrow$$

با اصل میانبود ۳ در تناقض است.

ب) $A*B*C \Longrightarrow$ از A و B و C یک خط می گذرد

$A*C*D \Longrightarrow$ از A و C و D هم یک خط می گذرد

$\Longrightarrow$ باید نشان دهیم که از B و D هم یک خط می گذرد

فرض خلف می کنیم که B و D روی یک خط نباشند لذا خط گذشته از A، B و C با خط گذشته از A، C و D متفاوت است ولذا از دو نقطه ی A و C دو خط متفاوت گذشته و این با بنداشت وقوع ۱ یا اصل اول اقلیدس در تناقض است.

۲. قسمت الف و ب جلوتر حل شده است.

ج)

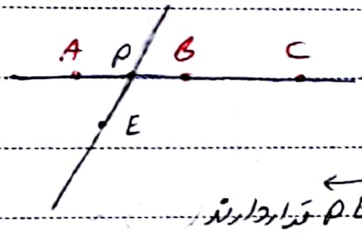
۳_ الف)

$A*B*C$ و $\xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۶۴}]{\text{گزاره‌ی ۳.۲}} AB \subset AC$

$$D \in AB \Rightarrow \begin{cases} D=A \Longrightarrow D \in AC \\ D=B \Longrightarrow A*B*C = A*D*C \Longrightarrow D \in AC \\ A*D*B,\ A*B*C \xrightarrow{\text{گزاره‌ی ۳.۳}} A*D*C \Longrightarrow D \in AC \\ A*B*D,\ A*B*C \xrightarrow{\text{گزاره‌ی ۳.۳}} A*C*D \Longrightarrow D \in AC \end{cases} \Longrightarrow D \in AC \quad \therefore AB \subset AC.$$

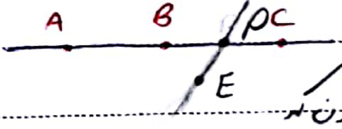
$CB \subset CA$

$$E \in CB \Rightarrow \begin{cases} E=C \in CA \\ E=B \xrightarrow{\text{بنداشت م_۱}} C*B*A = C*E*A \Longrightarrow E \in CA \\ C*E*B,\ A*B*C \xrightarrow[\text{بنداشت م_۱}]{\text{گزاره‌ی ۳.۳ صفحه‌ی ۶۴}} C*E*A \Longrightarrow E \in CA \\ C*B*E,\ A*B*C \xrightarrow[\text{بنداشت م_۱}]{\text{گزاره‌ی ۳.۳ صفحه‌ی ۶۴}} C*E*A \Longrightarrow E \in CA \end{cases} \Longrightarrow E \in CA \quad \therefore CB \subset CA.$$

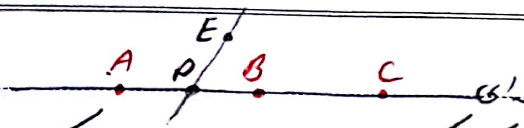


ب) فرض می‌کنیم که A، B و C سه نقطه‌ی متمایز هم‌خط باشند، P نقطه‌ای دلخواه بر پاره‌خط AC در نظر می‌گیریم. نقطه‌ای مانند E نا واقع بر پاره‌خط AC وجود دارد P را به E وصل کرده و خط PE را رسم می‌نمائیم حال از آنجا که A و C در دو طرف $\overleftrightarrow{PE}$ قرار دارند (چون سه نقطه‌ی P واقع بر پاره‌خط AC است) و B و C هم در یک طرف $\overleftrightarrow{PE}$ قرار دارد لذا طبق نتیجه‌ی بنداشت میانبود ۴ A و B در دو طرف خط $\overleftrightarrow{PE}$ قرار داشته و لذا نقطه‌ی P واقع بر پاره‌خط AB است یعنی: $A*P*B$.

چنانچه P نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط AC باشد و P=B باشد لذا $P \in AB$ و $P \in BC$ است و اثبات تمام است.



اگر P نقطه‌ای بر پاره‌خط AC باشد (به شکل مقابل) و اگر E نقطه‌ای ناواقع بر خط $\overleftrightarrow{AC}$ باشد خط $\overleftrightarrow{PE}$ را رسم می‌کنیم A و C در دو طرف خط $\overleftrightarrow{PE}$ قرار دارند چون که P نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط AC است. (و A و B هم در یک طرف خط $\overleftrightarrow{PE}$ قرار دارند پس طبق نتیجه‌ی بنداشت میانبود ۴: B و C در دو طرف خط $\overleftrightarrow{PE}$ قرار دارند و P نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط BC است یعنی: $B*P*C$.



ج) اولاً واضح است که B نقطه‌ای از پاره‌خط AB و همچنین B نقطه‌ای از پاره‌خط BC است. پس B متعلق است به $AB\cap BC$. حال فرض می‌کنیم که $P\neq B$ نقطه‌ای باشد به طوری که P متعلق باشد به $AB\cap BC$. لذا نقطه‌ای مانند E ناواقع بر پاره‌خط AC قرار دارد. خط $\overleftrightarrow{PE}$ را رسم می‌نماییم. پس خواهیم داشت:

$$P\in AB\cap BC\begin{cases} P\in AB \longrightarrow \text{A و B در دو طرف خط } \overleftrightarrow{PE} \\ P\in BC \longrightarrow \text{B و C در دو طرف خط } \overleftrightarrow{PE} \end{cases} \xrightarrow[\text{(II)}]{\text{بنداشت میانبود ۴}} \text{A و C در یک طرف خط } \overleftrightarrow{PE} \text{ هستند}$$

این که A و C در یک طرف خط $\overleftrightarrow{PE}$ هستند با فرض گزاره یعنی $A*B*C$ در تناقض است.

۴ـ الف)

$$\sim A*B*P \Longrightarrow \sim A*C*P \qquad \text{گزاره‌ی ۳.۳}$$

$$\sim A*B*P \ \text{i.e.}\begin{cases} A*P*B,\ A*B*C \xrightarrow[\text{صفحه ۶۴}]{} A*P*C \\ P*A*B,\ A*B*C \xrightarrow[\text{صفحه ۶۴}]{\text{گزاره‌ی ۳.۳}} P*A*C \end{cases} \quad \text{i.e.}\ \sim A*C*P$$

ب)

$\overrightarrow{BA}\subset\overrightarrow{CA}$ بنداشت میانبود ۱ و فرض مسئله

$$P\in\overrightarrow{BA}\longrightarrow\begin{cases} P=B \to C*B*A = C*P*A \longrightarrow P\in\overrightarrow{CA} \\ B*P*A,\ C*B*A \xrightarrow{} C*P*A \longrightarrow P\in\overrightarrow{CA} \qquad \text{گزاره ۳.۳} \\ P=A\in\overrightarrow{CA} \end{cases} \qquad \therefore\ \overrightarrow{BA}\subset\overrightarrow{CA}$$

$\overrightarrow{BC}\subset\overrightarrow{AC}$

$$P\in\overrightarrow{BC}\begin{cases} P=B \to A*B*C = A*P*C \longrightarrow P\in\overrightarrow{AC} \\ B*P*C,\ A*B*C \xrightarrow{\text{گزاره ۳.۳}} A*P*C \to P\in\overrightarrow{AC} \\ P=C\in\overrightarrow{AC} \end{cases} \qquad \therefore\ \overrightarrow{BC}\subset\overrightarrow{AC}$$

$A*B*C$ 

ت *

$\overrightarrow{AB} \overset{?}{=} \overrightarrow{AC}$

$$P\in\overrightarrow{AB}\longrightarrow\begin{cases}P=A\in\overrightarrow{AC}\\ A*P*B,\ A*B*C\xrightarrow[۷۴]{\text{گزاره ۳.۳ صفحه}}A*P*C\Longrightarrow P\in\overrightarrow{AC}\quad\Longrightarrow P\in\overrightarrow{AC}\\ P=B\Longrightarrow A*B*C=A*P*C\Longrightarrow P\in\overrightarrow{AC}\end{cases}$$

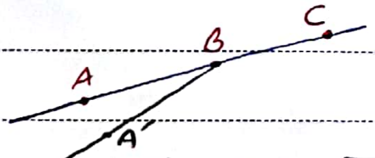
$\text{so } \overrightarrow{AB}\subset\overrightarrow{AC}$ ①

$$P\in\overrightarrow{AC}\longrightarrow\begin{cases}P=A\in\overrightarrow{AB}\\ A*P*C,\ A*B*C\xrightarrow[۷۴]{\text{گزاره ۳.۳ صفحه}}A*P*B\longrightarrow P\in\overrightarrow{AB}\quad\Longrightarrow P\in\overrightarrow{AB}\\ P=C\longrightarrow A*B*C=A*B*P\Longrightarrow P\in\overrightarrow{AB}\end{cases}$$

$\text{so } \overrightarrow{AC}\subset\overrightarrow{AB}$ ②

$$\left.\begin{matrix}①\\ \text{و}\\ ②\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\ \boxed{}$$

* نتیجه بدیهی اینکه هر نیم خط، یک نیم خط متقابل منحصر به فرد دارد.



اثبات منحصر به فرد بودن:

برهان: فرض خلف می‌کنیم که نیم خط متقابل $\overrightarrow{BC}$ منحصر به فرد نباشد یعنی $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BA'}$ نیم خط متقابل $\overrightarrow{BC}$ باشند و این یعنی که از دو نقطه‌ی B و C دو خط متمایز عبور کرده و این با بنداشت وقوع ۱ در تناقض است.

اثبات وجود نیم خط متقابل:

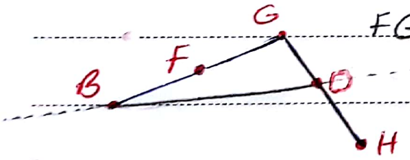
$$\forall P\in BC\xrightarrow[\text{میانبود}]{\overleftrightarrow{\text{بنداشت سوم}}}\begin{cases}B*P*C\\ B*C*P\\ \textcircled{P}*B*C\end{cases}$$

از آنجا که نقطه‌ی P وجود دارد

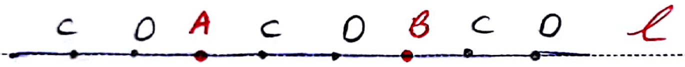
پس نیم خط متقابل هم وجود دارد.

صفحه ۸۶ تمرین ۶

قسمت (۹) اگر Σ و ℓ با به ترتیب داریم G * F * B و H * D * G لذا طبق بنداشت میان بود B و F و G سه نقطه ی متمایز هم خط اند و همچنین G و D و H نیز سه نقطه ی متمایز هم خط اند از نقطه ی B به نقطه ی D وصل می نماییم از آنجا که H * D * G است پس G و H در دو طرف $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند و همچنین از آنجا که پاره خط FG خط $\overleftrightarrow{BD}$ را قطع نمی نماید پس طبق قانون خود شق وسط (پاش) F و G در یک طرف خط $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند حال طبق نتیجه بنداشت میان بود Σ، F و H در دو طرف $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند لذا F و H نقاطی متمایزند.



۷

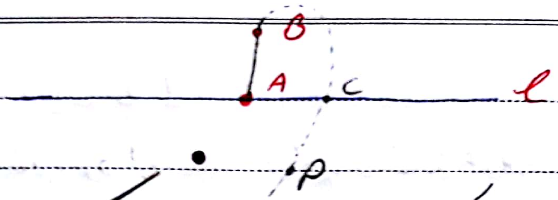


(I) چنانچه D و C نقاطی از خط ℓ در سمت چپ نقطه ی A باشند و D مابین دو نقطه ی A و C گوییم نقطه ی C در سمت چپ نقطه ی D قرار دارد.

(II) چنانچه C و D نقاطی مابین دو نقطه ی A و B چنان باشند که C مابین دو نقطه ی A و D یا اینکه D مابین دو نقطه ی B و C باشد گوییم که نقطه ی C در سمت چپ نقطه ی D قرار دارد.

(III) اگر C و D نقاطی از خط ℓ چنان باشند که B در سمت چپ هر دوی آن ها باشد اگر C مابین B و D قرار گرفته باشد گوییم C در سمت چپ نقطه ی D قرار دارد.

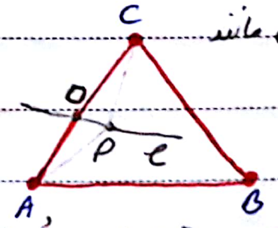
9 *



فرض خلف می‌کنیم که وجود داشته باشد نقطه‌ای مانند P بر نیم خط $\overrightarrow{AB}$ که در آن طرف از خط l نباشد که B قرار دارد. پس P و B در دو طرف خط l قرار دارند و لذا طبق قانون طرد شق ثالث (وسط) پاره خط AP خط l را در نقطه‌ای به نام C می‌برد پس نیم خط $\overrightarrow{AB}$ علاوه بر آن که در نقطه‌ی A با خط l مشترک‌اند در نقطه‌ی C نیز با خط l مشترک است و لذا نیم خط $\overrightarrow{AB}$ بر خط l منطبق است و لذا نقطه‌ی B بر خط l واقع است و این با فرض سؤال در تناقض بوده و لذا فرض خلف باطل می‌شود.

تمرین‌های ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۳ جلوتر حل شده است.

14 * برهان: اگر فرض کنیم خط l درون مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قرار دارد طبق نیاز است دو حکم وقوع نقطه‌ای مانند P درون l وجود دارد که درون مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قرار دارد. اگر نیم خط $\overrightarrow{PC}$ ، $\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PA}$ را در نظر بگیریم نیم خطی از خط l مابین دو نیم خط $\overrightarrow{PA}$ و $\overrightarrow{PB}$ قرار می‌گیرد که در این صورت طبق قضیه‌ی قطعه بر صفحه ۴۸ این نیم خط پاره خط AB را در نقطه‌ای مانند D قطع می‌کند و در این صورت نیم خط مقابل $\overrightarrow{DP}$ خارج از مثلث واقع است بنابراین تمام خط نمی‌تواند درون مثلث قرار بگیرد. ▭



۱۵ _ بنداشت میان بود ۱: چنانچه $a*b*c$ باشد آنگاه a ، b ، c سه نیم‌خط متمایز هم مبدا اند و $c*b*a$ — درست است.

بنداشت میان بود ۲: چنانچه دو نیم‌خط متمایز b و d هم مبدا داده شده باشند نیم‌خط‌های a و c و e هم مبدا با دو نیم‌خط اول چنان وجود دارند که $a*b*c$ ، $b*c*d$ ، $b*d*e$

این قسمت درست است.

بنداشت میان بود ۳: اگر a ، b و c سه نیم‌خط متمایز هم مبدا باشند آنگاه یکی و تنها یکی از آن‌ها بین دو تای دیگر است.

این قسمت نیز درست است.

گزاره ۳.۳: اگر $a*b*c$ و $a*c*d$ داده شده باشند آنگاه: $b*c*d$ ، $a*b*d$.

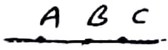
این قسمت نیز درست است.

۱۶ _ بنداشت وقوع ۱: به ازای هر نقطه‌ی P و هر نقطه‌ی Q که با P مساوی نیست، تنها یک خط l وجود دارد که بر P و Q می‌گذرد.

بنداشت وقوع ۲: به ازای هر خط l دست کم دو نقطه‌ی متمایز واقع بر آن وجود دارد.

بنداشت وقوع ۳: سه نقطه‌ی متمایز وجود دارند که هیچ خطی بر هر سه‌ی آن‌ها واقع نمی‌شود.

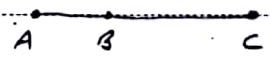
بنداشت میان بود ۱: اگر $A*B*C$ آنگاه A ، B ، C سه نقطه متمایزند که بر یک خط قرار دارند و $C*B*A$ ،



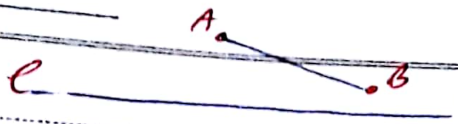
بنداشت میان بود ۲: دو نقطه متمایز B و D داده شده اند. نقاطی مانند A ، C و E بر $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند چنانکه $A*B*C$ ، $B*C*D$ ، $B*D*E$.

بنداشت میان بود ۳: اگر A و B و C سه نقطه‌ی متمایز بر یک خط باشند یکی و تنها یکی از آن‌ها بین دو تای دیگر واقع است.

حال: نماد $-*-*-$ $A*B*C$ را چنان معنی می‌کنیم که $AB \cong BC$ باشد یعنی B نقطه‌ی وسط پاره‌خط AC است که این تعریف به ترتیب در بنداشت‌های وقوع ۱ و ۲ و ۳ صدق می‌کند همچنین در بنداشت‌های میان بود ۱ و ۲ صدق می‌کند ولی در بنداشت میان بود ۳ خیر مثلاً:



که A و B و C سه نقطه‌ی هم خط اند که هیچ یک از A و B و C ما بین دو تای دیگر نیست.

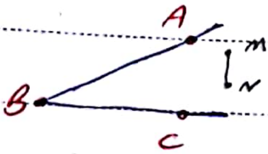


فرض: A,B درون نیم‌صفحه $\Longleftarrow$ حکم: پاره‌خط AB درون نیم‌صفحه

★ ۱۹ I) اثبات کوژ بودن نیم‌صفحه:

اثبات با استفاده از برهان خلف: فرض می‌کنیم که پاره‌خط AB خط l را ببرد، پس طبق قانون طرد شق ثالث یا همان تعریف باید A و B در دو طرف خط l باشند و این با فرض ما یعنی اینکه A و B در درون نیم‌صفحه اند در تناقض است. (یا با تعریف نیم‌صفحه در تناقض است.)

II) اثبات کوژ بودن درون یک زاویه:



فرض: M و N در درون زاویه‌ی $A\hat{B}C$ $\Longrightarrow$ حکم: پاره‌خط MN درون زاویه‌ی $A\hat{B}C$ قرار دارد

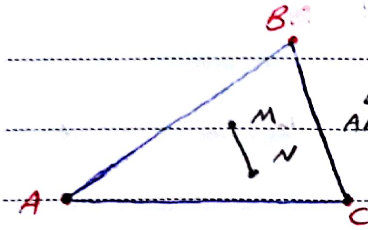
M و C یک طرف خط $\overleftrightarrow{AB}$ قرار دارند. و M و A یک طرف خط $\overleftrightarrow{BC}$ قرار دارند $\xRightarrow{\text{طبق تعریف}}$ M درون زاویه‌ی $A\hat{B}C$ است.

A و N یکطرف خط $\overleftrightarrow{AB}$ قرار دارند و N و A یکطرف خط $\overleftrightarrow{BC}$ قرار دارند $\xRightarrow{\text{طبق تعریف}}$ N درون زاویه‌ی $A\hat{B}C$ است.

$\Downarrow$

① M و N در یک طرف خط $\overleftrightarrow{BC}$ قرار دارند.

فرض خلف می‌کنیم که پاره‌خط MN درون زاویه نباشد پس باید پاره‌خط MN یکی از اضلاع زاویه یعنی $\overrightarrow{BA}$ یا $\overrightarrow{BC}$ مثلاً $\overrightarrow{BC}$ را قطع نماید که این بدین معناست که پاره‌خط MN خط $\overleftrightarrow{BC}$ را قطع کرده لذا طبق تعریف (قانون طرد شق ثالث) M و N در دو طرف خط $\overleftrightarrow{BC}$ قرار دارند و این تناقض با ① است.

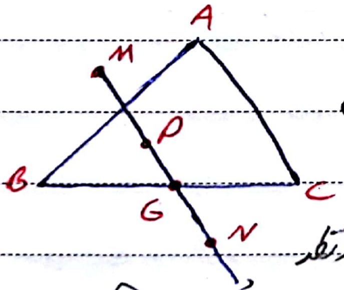


ادامه‌ی حل سؤال ۱۹: اثبات کوژ بودن درون یک مثلث:

فرض: اگر M و N دو نقطه درون مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ باشند. $\Longrightarrow$ حکم: پاره‌خط MN درون مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قرار دارد.

برهان: اگر دو نقطه‌ی M و N درون یک مثلث باشند طبق تعریف این دو نقطه باید درون سه زاویه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ قرار داشته باشند از طرفی طبق آنچه درون سه زاویه مجموعه‌ای است کوژ پس اشتراکشان نیز مجموعه‌ای است کوژ (پاره‌خط MN درون تک‌تک زاویه‌ها قرار دارد پس درون اشتراکشان نیز قرار دارد) لذا درون یک مثلث نیز مجموعه‌ای کوژ می‌باشد.

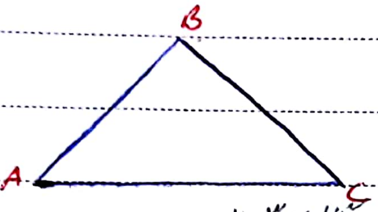
اثبات کوژ نبودن بیرون یک مثلث.



برهان: یک نقطه مانند M خارج مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و یک نقطه‌ی P درون آن در نظر می‌گیریم. حال پاره‌خط PM را طوری ادامه می‌دهیم که در طرف مقابل طبق قضیه‌ی پاش ضلع BC را در نقطه‌ی G قطع کند و آن را ادامه می‌دهیم روی نیم‌خط $\overrightarrow{MP}$ نقطه‌ای مانند N را چنان در نظر می‌گیریم که N * G * M باشد لذا نقاط M و N هر دو خارج مثلث‌اند ولی پاره‌خط MN اضلاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را می‌برد و مقداری از آن نیز درون مثلث جای می‌گیرد پس خارج یک مثلث مجموعه‌ای کوژ نیست.

تمرینات ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷ داخل کتاب حل شده‌اند یا بعضی جلوتر توسط استاد حل شده است.

۲۸



$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$

برهان: $\hat{A} \cong \hat{B} \xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۵}]{\text{گزاره‌ی ۱۸.۳}} BC \cong AC$

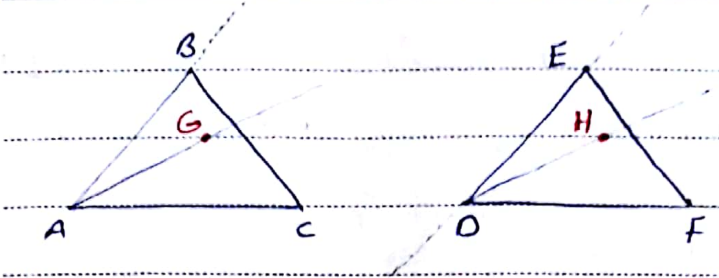
$\hat{B} \cong \hat{C} \xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۵}]{\text{گزاره‌ی ۱۸.۳}} AC \cong AB$

$\xrightarrow[\text{انطباق}]{\text{برداشت دوم خاصیت}} BC \cong AB$ so $AB \cong BC \cong AC$ ⊗

تمرین ۲۹ جلوتر داخل جزوه حل شده است.

SALEH

۳۰#



$A\hat{B}C \cong D\hat{E}F \Rightarrow B\hat{A}C \cong E\hat{D}F$ ①

طبق بنداشت چهارم قابلیت انطباق وجود دارد نقطه‌ی H در یک طرف $\overleftrightarrow{ED}$ (طرفی که نقطه‌ی F قرار دارد) به طوری که

$B\hat{A}G \cong E\hat{D}H$ ②

چنانچه نقطه‌ی H درون زاویه‌ی $E\hat{D}F$ باشد طبق تعریف نیم‌خط $\overrightarrow{DH}$ نیز درونی بوده و لذا $\overrightarrow{DH}$ مابین $\overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{DF}$ است پس برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم که چنین نباشد یعنی نقطه‌ی H درون زاویه‌ی $E\hat{D}F$ نباشد لذا برای نقطه‌ی H دو حالت پیش می‌آید: (I) نقطه‌ی H بر روی نیم‌خط $\overrightarrow{DF}$ قرار دارد در این صورت خواهیم داشت:

$E\hat{D}F \cong E\hat{D}H$

طبق ②: $E\hat{D}H \cong B\hat{A}G$ $\xrightarrow[\text{قابلیت انطباق}]{\text{بنداشت پنجم}}$ $E\hat{D}F \cong B\hat{A}G$

طبق ① $B\hat{A}C \cong E\hat{D}F$ $\xrightarrow[\text{قابلیت انطباق}]{\text{بنداشت پنجم}}$ $B\hat{A}C \cong B\hat{A}G \Longrightarrow$ G نقطه‌ای درونی نیست. ✗

(II) نقطه‌ی H، نقطه‌ی خارجی زاویه‌ی $E\hat{D}F$ است بنابراین:

$E\hat{D}F < E\hat{D}H$

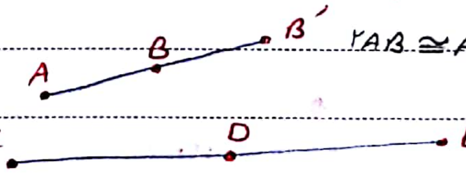
طبق ①: $E\hat{D}F \cong B\hat{A}C$ $\xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۶ قسمت (ج)}]{\text{طبق گزاره‌ی ۲۱.۳}}$ $B\hat{A}C < E\hat{D}H$

طبق ② $E\hat{D}H \cong B\hat{A}G$ $\xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۶ قسمت (ب)}]{\text{طبق گزاره‌ی ۲۱.۳}}$ $B\hat{A}C < B\hat{A}G \Longrightarrow$ G نقطه‌ای درونی نیست. ✗

تمرینات ۳۱ و ۳۲ جلوتر داخل جزوه حل شده اند.

۳۳#

$AB < CD \Longrightarrow 2AB < 2CD$



$2AB \cong AB'$

$2CD \cong CD'$

فرض خلف: $2AB \geq 2CD$ $\begin{cases} (I)\ 2AB \cong 2CD \\ (II)\ 2AB > 2CD \end{cases}$

(I) $2AB \cong 2CD$ i.e. $AB' \cong CD'$

$AB < CD \xrightarrow{\text{طبق تعریف}} \exists E$ s.t. $\begin{cases} C*E*D \\ AB \cong CE \end{cases}$ $\xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۴}]{\text{گزاره‌ی ۱۲.۳}}$ $BB' \cong ED'$

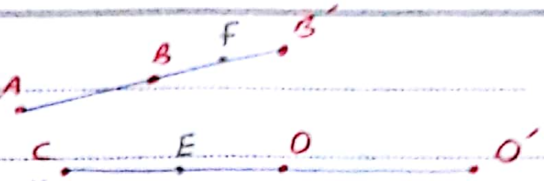
طبق فرض: $AB \cong BB'$ $\xrightarrow[\text{قابلیت انطباق}]{\text{بنداشت دوم}}$ $AB \cong ED'$

$C*D*D'$

$C*E*D$ $\Longrightarrow ED' > DD'$

$\xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۴ قسمت ب}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}}$ $AB > DD'$

طبق فرض $DD' \cong CD$ $\xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۴ قسمت ج}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}}$ $AB > CD$. ✗



(II)/ ۲AB > ۲CD   i.e. $AB'>CD'$

$$AB'>CD' \Longrightarrow \exists F \text{ s.t. } \begin{cases} A*F*B' \\ AF\cong CD' \end{cases} ★$$

طبق فرض $AB<CD \Longrightarrow \exists E \text{ s.t. } \begin{cases} AB\cong CE \\ C*E*D \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} AF\cong CD' \\ AB\cong CE \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{صفحه ۷۲}]{\text{گزاره‌ی ۱۲.۳}} BF\cong ED'$$

$$\left.\begin{array}{l} C*E*D \\ C*D*D' \end{array}\right| \xrightarrow[\text{صفحه ۷۴}]{\text{گزاره‌ی ۳.۳}} E*D*D' \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} DD'<ED' \\ DD'\cong CD \end{array}\right| \xrightarrow[\text{صفحه ۷۳ (ج)}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}} CD<ED'$$

$$\left.\begin{array}{l} BF\cong ED' \\ CD<ED' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(ب)}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}}$$

$$\Longrightarrow CD<BF \;①$$

$$\left.\begin{array}{l} A*F*B' \\ A*B*B' \end{array}\right| \xrightarrow[\text{صفحه ۷۴}]{\text{گزاره‌ی ۳.۳}} B*F*B' \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} BF<BB' \\ BB'\cong AB \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{صفحه ۷۳ (ب)}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}} BF<AB \;②$$

$$\left.\begin{array}{c} ① \\ \text{و} \\ ② \end{array}\right| \Longrightarrow CD<AB \;✗$$

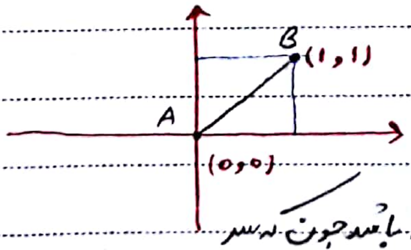
چون در دو حالت (I) و (II) به تناقض رسیدیم پس ۲AB<۲CD ▨

★ سؤال: چرا نقطه‌ی F مابین B و B' قرار می‌گیرد؟

واضح است که: $CE<CD'$

$$\left.\begin{array}{l} CE<CD' \\ AF\cong CD' \end{array}\right| \xrightarrow[\text{(ب) ص ۷۳}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}} \left.\begin{array}{l} CE<AF \\ CE\cong AB \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(ب) ص ۷۳}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}} AB<AF \;\otimes$$

★ ۳۴ چنانچه پاره خطی از نقطه‌ی (۰،۰) به (۱،۱) داشته باشیم نمی‌توانیم در صفحه‌ی گویا این پاره خط را به نیم خط مثبت محور x انتقال دهیم یا به عبارتی گویا نمی‌توان پاره خط مذکور را (در شکل پاره خط AB) را به روی نیم خط مثبت محور x انتقال داد به طوری که یک سر آن نقطه‌ی (۰،۰) یعنی A باشد چون که سر دیگر آن دارای مختصات (√۲،۰) می‌شود و √۲ عددی گویا نیست و لذا (√۲،۰) در صفحه‌ی گویا قرار نمی‌گیرد لذا بنداشت قابلیت انطباق را نمی‌توان به کار برد.



۳۵

تمام درازاها با سانتی متر مگر پاره خط های واقع بر محور x ها که با دسیمتر

صفحهٔ ۶۸

بنداشت اول قابلیت انطباق: اگر A و B دو نقطهٔ متمایز باشند و A' یک نقطهٔ دلخواه، آنگاه به ازای هر نیم خطی مانند r که از A' رسم شود فقط یک نقطه مانند B' بر r وجود دارد چنانکه $B' \neq A'$ و $AB \cong A'B'$ / صادق است

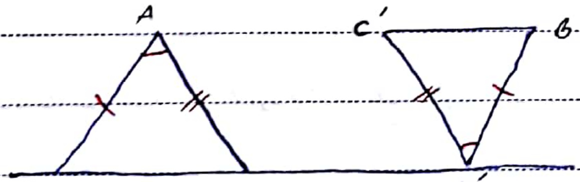
بنداشت دوم قابلیت انطباق: هرگاه $AB \cong CD$ و $AB \cong EF$ آنگاه $CD \cong EF$. به علاوه هر پاره خطی با خودش قابل انطباق است. / صادق است.

بنداشت سوم قابلیت انطباق: هرگاه $A * B * C$ و $A' * B' * C'$ و $AB \cong A'B'$ و $BC \cong B'C'$ آنگاه $AC \cong A'C'$.

بنداشت چهارم قابلیت انطباق: هرگاه $B\hat{A}C$ (که بنا بر تعریف زاویه $\overrightarrow{AB}$ متقابل با $\overrightarrow{AC}$ نیست.) و همچنین نیم خط مشخص $\overrightarrow{A'B'}$ که از A' خارج شده است داده شده باشند، آنگاه فقط یک نیم خط $\overrightarrow{A'C'}$ در یک طرف معین $\overleftrightarrow{A'B'}$ وجود دارد چنانکه $B'\hat{A'}C' \cong B\hat{A}C$ / صادق است

بنداشت پنجم قابلیت انطباق: هرگاه $\hat{A} \cong \hat{B}$ و $\hat{A} \cong \hat{C}$ آنگاه $\hat{B} \cong \hat{C}$ به علاوه هر زاویه با خودش قابل انطباق است. ✓ صادق است.

ولی بنداشت ششم قابلیت انطباق صدق نمی کند و برای آن مثال زیر داریم:

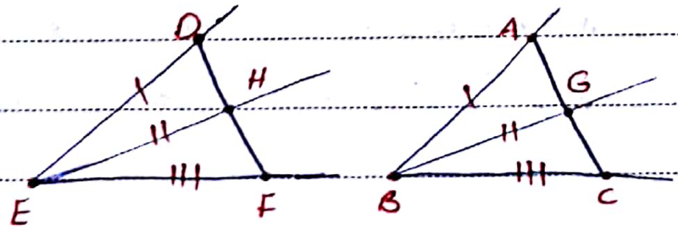


$$\left\{\begin{array}{l} AB \cong A'B' \\ \hat{A} \cong \hat{A'} \xrightarrow{(ض ز ض)} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow BC \cong BC \\ AC \cong A'C' \end{array}\right.$$

درصورتی که طبق آنچه برای قابلیت انطباق در این تعریف گفته شد باید $B'C' \ncong BC$ چون BC دارای درازای دسیمتر و $B'C'$ دارای درازای سانتی متر است.

صفحهٔ ۷۵

گزارهٔ ۳.۱۹ (جمع زوایا). می دانیم $\overrightarrow{BG}$ میان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{EH}$ میان $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EF}$ واقع اند، و $C\hat{B}G \cong F\hat{E}H$، $G\hat{B}A \cong H\hat{E}D$. در این صورت $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$.



صادق است. ✓

تمرین توسط استاد تأیید شده است.

Subject Year: Month: Date:

تمرین های اصلی صفحه ۹۲

*** ـ بنداشت ارشمیدس نتیجه ای است از بنداشت ددکیند.

پاره خط CD و نقطه ی A بر خط l با نیم خط r از l که از A خارج شده است داده شده اند. با انکار بنداشت ارشمیدس فرض می کنیم Σ متشکل از A و همه نقاط B باشند که از قرار دادن چندین بار پاره خط CD بر r با شروع از نقطه ی A به آن ها دست یافته ایم. فرض می کنیم Σ_2 مکمل Σ در r باشد. می خواهیم ثابت کنیم Σ_2 تهی است لذا خلاف آن را فرض می نماییم.

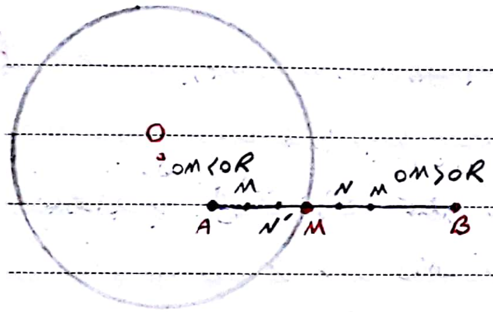
در این صورت نشان می دهیم که یک برش ددکیند از r را تعریف کرده ایم (طبق تمرین ۷ الف). با دو نقطه ی P و Q در Σ_2 شروع می کنیم و می گوییم $A * P * Q$. باید نشان دهیم که $PQ \in \Sigma_2$. فرض می کنیم که B بین P و Q باشد. فرض می کنیم بتوانیم به نقطه ی B دست یابیم به طوری که n و E همان عناصر حکم بنداشت ارشمیدس باشند، پس بنا بر گزاره ی ۳ صفحه ۷۴ با همان n و E دست یافتنی است، که با $P \in \Sigma_2$ متناقض است. از این رو $PQ \in \Sigma_2$. به همین نحو می توانیم نشان دهیم به وقتی P و Q دو نقطه در Σ باشند، $PQ \in \Sigma$ (تمرین ۷ (ب)). لذا یک برش ددکیند داریم. فرض می کنیم O نقطه ای از r باشد که از بنداشت ددکیند به دست آمده است.

حالت ۱: $O \in \Sigma$. در این صورت به ازای عددی مانند n، با قرار دادن n بار پاره خط CD بر r با شروع از A می توان به نقطه ی O دست یافت. با قرار دادن یک بار دیگر CD می توانیم به نقطه ای از Σ_2 برسیم، اما بنا بر تعریف Σ_2، این امر غیرممکن است.

حالت ۲: $O \in \Sigma_2$. CD را با شروع از O یک بار بر نیم خط مقابل r قرار می دهیم تا به نقطه ی P برسیم. P بر r قرار دارد (طبق تمرین ۷ ب). لذا $P \in \Sigma$، پس به ازای عدد n، می توان با قرار دادن n بار پاره خط CD بر r، با شروع از A، به P دست یافت. با قرار دادن یک بار دیگر CD می توان به نقطه ی O دست یافت. این امر متناقض با $O \in \Sigma_2$.

لذا در هر دو حالت به یک تناقض می رسیم و می توانیم فرض برهان خلف را که Σ_2 ناتهی است رد کنیم. ▨

۲*



فرض خلف: $OM \ncong OR \Longrightarrow \begin{cases} (I)\ OM > OR \\ (II)\ OM < OR \end{cases}$

(I) $OM > OR$. لذا وجود دارد حداقل یک نقطه‌ی N عضو مجموعه‌ی Σ_2 به طوری که N در سمت چپ نقطه‌ی M قرار دارد و این با بنداشت ددکیند در تناقض است چون که هر نقطه‌ی Σ_2 در سمت راست هر نقطه‌ای از مجموعه‌ی Σ_1 قرار دارد.

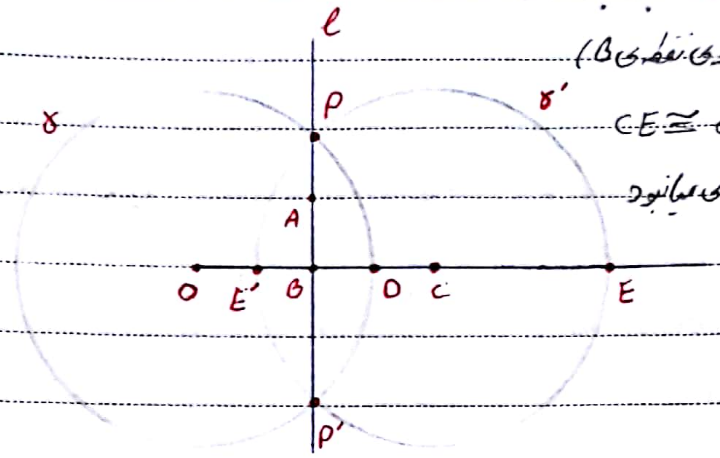
$$\forall P_1 \in \Sigma_1 , \underline{P_2 \in \Sigma_2} : P_1 * \underline{M * P_2}$$

(II) $OM < OR$. لذا وجود دارد حداقل یک نقطه‌ی N' عضو مجموعه‌ی Σ_1 به طوری که N' در سمت راست نقطه‌ی M قرار دارد و این با بنداشت ددکیند در تناقض است چون که هر نقطه‌ی Σ_1 در سمت چپ هر نقطه‌ای از مجموعه‌ی Σ_2 قرار دارد.

$$\forall \underline{P_1 \in \Sigma_1} , P_2 \in \Sigma_2 : \underline{P_1 * M} * P_2$$

۳

* ۵ واضح است که نقطه‌ی C (قرینه‌ی نقطه‌ی O نسبت به خط l)
و نقاط E و E′ در دو طرف خط l (یا در دو نقطه‌ی نقطه‌ی B)
بر روی نیم خط $\overrightarrow{OB}$ به طوری که $CE \cong OD \cong CE'$
در نسبت‌های میانبود و با همان نسبت‌های میانبود
صادق هستند.



برهان:

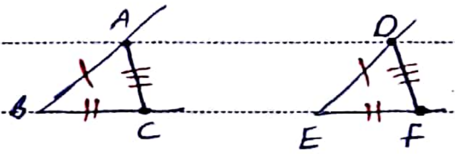
واضح است که دایره‌ی γ′ قرینه‌ی دایره‌ی γ نسبت به خط l است و نقاط P و P′ هم بر روی دایره‌ی γ و هم بر روی دایره‌ی γ′ قرار دارند پس دو دایره‌ی γ و γ′ همدیگر را در دو نقطه‌ی P و P′ قطع می‌کنند؛ از طرفی قرینه‌ی نقطه‌ای نسبت به خط l که روی خط l نیست روی خط l نمی‌افتد و لذا چنانچه نقطه‌ای روی خط l نباشد و روی دایره‌ی γ باشد روی دایره‌ی γ′ می‌افتد و اینجا دو نقطه‌ی P و P′ روی دو دایره γ و γ′ قرار دارند یعنی قرینه‌شان خودشان می‌باشد پس نقاط P و P′ روی خط l قرار دارند و لذا اثبات تمام است.

* ۷ $d(AB) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$

$A * B * C$ i.e. $d(AC) = d(AB) + d(BC)$

$AB \cong CD \iff d(AB) = d(CD)$

$$A\hat{B}C \cong D\hat{E}F \iff \begin{cases} AB \cong DE \\ CB \cong FE \\ AC \cong DF \end{cases}$$

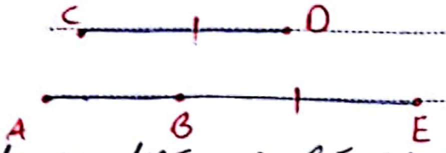


صفحه‌ی ۱۱

اصل اول اقلیدس: به ازای هر نقطه‌ی P و هر نقطه‌ی Q که با P مساوی نباشد خط یکتایی مانند l وجود دارد که بر P و Q می‌گذرد. واضح است که این اصل در تعابیر بالا صدق می‌کند.

صفحه ۱۲

اصل دوم اقلیدس: به ازای هر پاره خط AB و هر پاره خط CD نقطه‌ی منحصر به فردی چون E وجود دارد چنانکه B میان A و E واقع است و پاره خط CD با پاره خط BE قابل انطباق است.



روی نیم خط $\overrightarrow{AB}$ نقطه‌ای به نام E وجود دارد به طوری که: $A*B*E$ و $BE \cong CD$ یعنی $d(CD)=d(BE)$

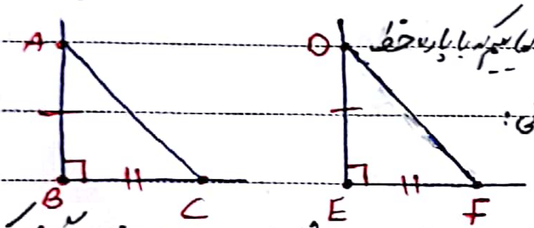
صفحه ۱۳

اصل سوم اقلیدس: به ازای هر نقطه‌ی O و هر نقطه‌ی A که با O مساوی نباشد دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA وجود دارد.

واضح است که این اصل در تعابیر ذکر شده صدق می‌نماید.

صفحه ۱۵

اصل چهارم اقلیدس: همه‌ی زوایای قائمه با یکدیگر قابل انطباق اند. دو زاویه‌ی $\hat{ABC}$ و $\hat{DEF}$ که قائمه اند را داریم:



پاره خط‌های AB و BC را روی اضلاع زاویه‌ی $\hat{ABC}$ چنان انتخاب می‌نماییم که با پاره خط‌های متناظر DE و EF روی اضلاع زاویه $\hat{DEF}$ قابل انطباق باشد یعنی:

$AB \cong DE$ و $BC \cong EF$

طبق تعابیر بالا داریم: $d(BC)=d(EF)$ و $d(AB)=d(DE)$ پس طبق قضیه‌ی فیثاغورس می‌توان نتیجه گرفت که:

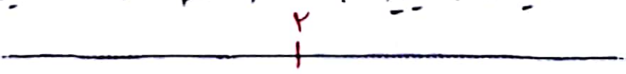
$$d(AC)=d(DF) \Longrightarrow AC \cong DF$$

و لذا طبق تعبیر داریم: $\hat{ABC} \cong \hat{DEF}$ ⊗

۷- میدان اقلیدسی: میدان مرتبی که در آن هر عدد مثبت یک ریشه‌ی دوم دارد.

واضح است که همه‌ی بنداشت‌های هندسه‌ی اقلیدسی برقرارند.

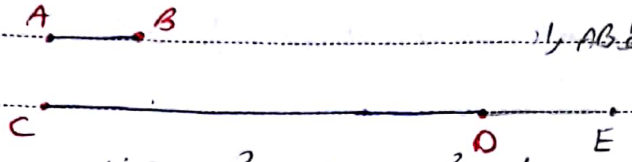
مثال نقض برای بنداشت ددکیند: خط l را به صورت زیر در نظر می‌گیریم و مجموعه نقاط $\Sigma_۱$ و $\Sigma_۲$ را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:



$\Sigma_۱=\{x | x^۲<۲\}$ $\Sigma_۲=\{x | x^۲>۲\}$

پس طبق بنداشت ددکیند باید ۲ ∈ F باشد ولی چون که ۲ ریشه‌ی دوم ندارد پس عدد ۲ عضو میدان اقلیدسی F نیست و لذا خط ما دارای سوراخ می‌شود که با بنداشت ددکیند که می‌گفت «هر خط سوراخ ندارد» در تناقض است.»

مثال نقض برای پنداشت ارشمیدس: چنان چه پاره خط های AB و CD را با طول های $d(AB)=۱$ و $d(CD)=۴$ در نظر بگیریم حال طبق پنداشت ارشمیدس چنانچه پاره خط AB را ۵ بار از نقطه ی C بر روی نیم خط $\overrightarrow{CD}$ بنمائیم باید وجود داشته باشد نقطه ای به نام E به طوری که $d(CE)=۵$ باشد ولی چون ۵ ریشه ی دوم ندارد پس ۵ عضو میدان F (میدان تالیسی) نیست.



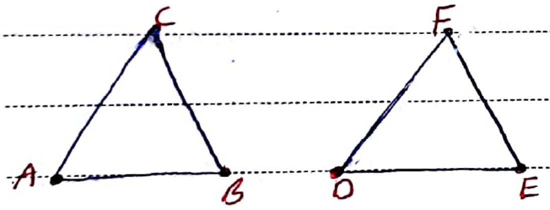
صفحه ی ۱۱۲ تمرینات دوره ای داخل کتاب حل شده است.

صفحه ی ۱۱۳

تمرینات

۱_ قسمت الف جلوتر داخل جزوه حل شده است.

ب) $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF} \longrightarrow \varepsilon_{\overset{\triangle}{ABC}} = \varepsilon_{DEF}$



$$\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \quad ① \\ \hat{B} \cong \hat{E} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۱۸۰° - ((\hat{A})° + (\hat{B})° + (\hat{C})°) \xlongequal[۳،۴]{\text{طبق ① و قضیه}} ۱۸۰° - ((\hat{D})° + (\hat{E})° + (\hat{F})°) = \varepsilon_{\overset{\triangle}{DEF}} \quad \otimes$$

ج) جلوتر داخل جزوه حل شده است.

۳_ عکس اصل پنجم اقلیدس: هرگاه دو خط همدیگر را در یک طرف مورب تلاقی کنند آنگاه مجموع اندازه ی دو زاویه ی متبادل درونی واقع در طرفی از مورب که دو خط همدیگر را تلاقی کرده اند کمتر از ۱۸۰° است.

این عکس همان فرع ۱ صفحه ۱۰۴ است چون که دو زاویه ی متبادل درونی مورد نظر دو زاویه از مثلثی است که از برخورد تلاقی با دو خط و دو خط با همدیگر ایجاد شده است.

تمرینات ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ جلوتر داخل جزوه حل شده است.

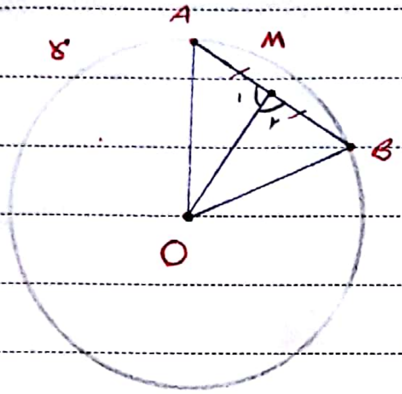
تمرین ۹ در کتاب حل شده است.

تمرین ۱۰ و ۱۱ جلوتر در جزوه حل شده است.

تمرین ۱۲ داخل کتاب حل شده است.

تمرینات ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ جلوتر داخل جزوه حل شده است.

۱۷) آ)



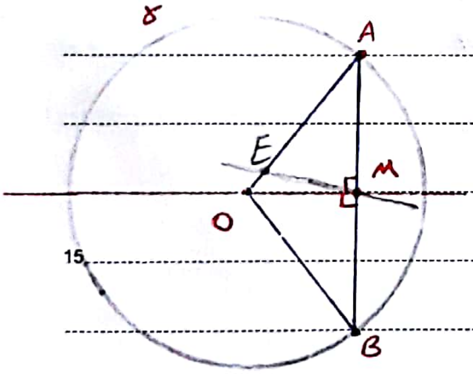
M وسط AB : $AM \cong MB$

$OM \cong OM$ ضلع مشترک $\xRightarrow{(ض ض ض)} \hat{M}_1 \cong \hat{M}_2 \xRightarrow{طبق تعریف}$ $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ زوایای قائمه اند.

$OA \cong OB$ شعاع دایره‌ی C

لذا $OM \perp AB$ است.

ب) فرض خلف می‌کنیم که عمود منصف از نقطه‌ی دیگری به نام $E \neq O$ بگذرد لذا داریم:



$AM \cong MB$

$\hat{M}_1 \cong \hat{M}_2 \xrightarrow{(ض ز ض)} \overset{\triangle}{AEM} \cong \overset{\triangle}{EMB} \Rightarrow EA \cong EB$

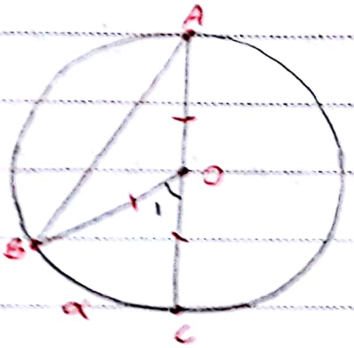
$EM \cong EM$

لذا E یک مرکز دیگری برای دایره‌ی C است و لذا دایره‌ی C دارای دو مرکز متمایز O و E است. ✗

حل به روش استاد: هر نقطه روی عمود منصف پاره خط AB از دو سر پاره خط یعنی نقاط A و B به یک فاصله است از طرفی از آنجا که OA و OB شعاع های دایره‌ی C هستند پس $OA \cong OB$ لذا نقطه‌ی O از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است پس O روی عمود منصف AB قرار دارد.

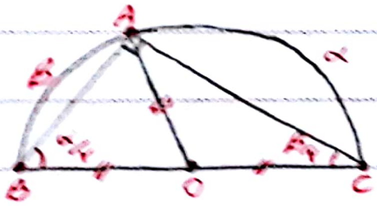
* ۱۸. برای اثبات این قضیه ابتدا باید ثابت کنیم که زاویه‌ی محاطی نصف کمان روبه‌رویش است. یعنی این همه مسئله آن است که مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$

حالت‌های ... بیابید.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \cong \hat{B} \\ \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B} \\ (\hat{O}_1)^\circ = \alpha^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه ۲.۴}} \alpha^\circ = (2\hat{A})^\circ \Longrightarrow (\hat{A})^\circ = \frac{\alpha^\circ}{2}$$

حال نشان می‌دهیم که زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر در نیم‌دایره مساوی یک قائمه است.



$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^\circ + \left(\frac{\beta}{2}\right)^\circ = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^\circ = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\text{طبق قضیه ۷.۴} : (\hat{A})^\circ + (\hat{B})^\circ + (\hat{C})^\circ = 180^\circ \Longrightarrow (\hat{A})^\circ + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^\circ = 180^\circ$$

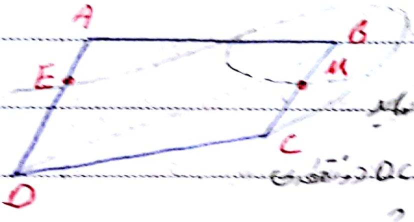
$$\Longrightarrow (\hat{A})^\circ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود ما با استفاده از قضیه ۷.۴ و مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ... نتیجه گرفتیم ... مثلث

$\overset{\triangle}{ABC}$، ثابت کردیم که مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است.

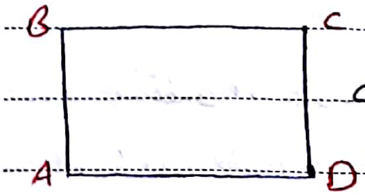
---

* ۲۳



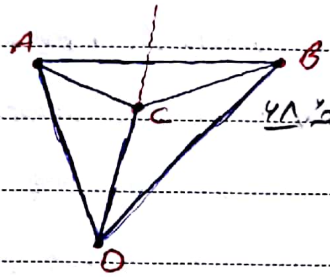
از نقطه‌ی D به نقطه‌ی B وصل می‌کنیم. با برهان خلف فرض می‌کنیم که خط $\overleftrightarrow{DC}$ با پاره‌خط AB متقاطع باشد. طبق قضیه‌ی پاش باید پاره‌خط AD یا BD را قطع کند. اگر AD را قطع کند، پس اشتراک دو خط AD و DC دو نقطه‌ی D و E می‌شوند، لازمه‌ی آن این است که دو خط AD و AC یک خط باشند، ... چهارضلعی $\overset{\square}{ADCB}$ تشکیل نمی‌شود.

چنانچه خط $\overleftrightarrow{DC}$ با پاره‌خط DB ... طبق قضیه‌ی پاش باید DC را ببرد یا BC را. خط نمی‌تواند خودش را ببرد، پس BC را می‌برد. در این صورت اشتراک دو خط DC و BC دو نقطه‌ی C و M می‌شود، یعنی دو خط DC و BC منطبق هستند، ... لذا چهارضلعی ADCB تشکیل نمی‌شود و این تناقض است. پس فرض خلف باطل است. لذا خط $\overleftrightarrow{DC}$ پاره‌خط AB را نمی‌برد.



*۲۴ دو رأس A و C در دو طرف خط $\overleftrightarrow{BD}$ اند

زیرا اگر چنین نباشد شکل چهارضلعی کوژ به صورت زیر می‌شود که در آن خط $\overleftrightarrow{DC}$ شامل ضلع CD ضلع AB را می‌برد و این با تعریف چهارضلعی کوژ در تناقض است.

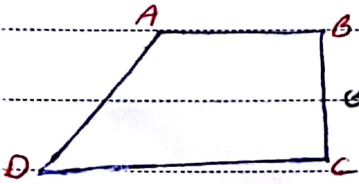


لذا A و C در دو طرف خط BD اند و طبق قضیه‌ی قطعه بر صفحه‌ی ۴۸ قطر AC قطر BD را می‌برد.

۲۵ S و T را مجموعه‌های کوژ در نظر می‌گیریم لذا برای اثبات کوژ بودن $S\cap T$ باید نشان دهیم که:

✓ $A,B\in S\cap T \Longrightarrow AB\in S\cap T$

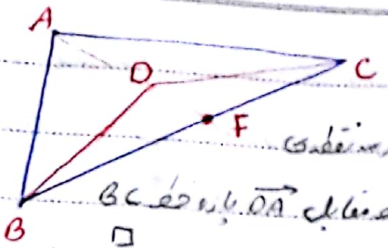
$$A,B\in S\cap T \Longrightarrow \begin{cases} A,B\in S \xRightarrow{\text{چون S مجموعه‌ای است کوژ}} AB\in S \\ \cap \qquad\qquad\qquad\qquad \cap \qquad \Longrightarrow AB\in S\cap T. \\ A,B\in T \xRightarrow{\text{چون T مجموعه‌ای است کوژ}} AB\in T \end{cases}$$



اثبات کوژ بودن درون یک چهارضلعی کوژ:

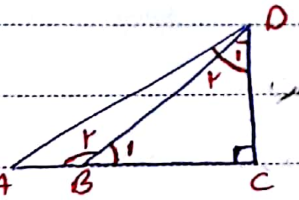
طبق تمرین ۱۹ صفحه‌ی ۸۸ درون زاویه‌ها مجموعه‌ای است کوژ لذا درون دو زاویه‌ی $\hat{B}$ و $\hat{D}$ نیز مجموعه‌ای است کوژ و طبق نتیجه‌ی همین تمرین نیز اشتراک درون این دو زاویه که همان درون چهارضلعی کوژ می‌شود نیز مجموعه‌ای است کوژ.

چنانچه قطرهای چهارضلعی همدیگر را در نقطه‌ای خارج از چهارضلعی قطع کنند آنگاه چهارضلعی مورد نظر کوژ نمی‌گردد و این تناقض است.



★ ۲۶ مثلث ABC را در نظر می‌گیریم به طور خلف فرض می‌کنیم که اضلاع و درون مثلث $A\hat{B}C$ غلاف کوژ سه نقطه‌ی A، B، C نباشند، و اضلاع و درون چهارضلعی $AB\overset{\square}{D}C$ غلاف کوژ سه نقطه‌ی A، B، C باشد. از نقطه‌ی A به نقطه‌ی D وصل می‌کنیم طبق قضیه‌ی قطعه بر نیم‌خط مقابل $\overrightarrow{DA}$ پاره‌خط BC را در نقطه‌ی F چنان قطع می‌کند که B*F*C باشد لذا پیدا کردیم نقطه‌ای به نام F که داخل درون و اضلاع $AB\overset{\square}{D}C$ نیست ولی مابین B و C قرار دارد و این با تعریف غلاف کوژ در تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و حکم یعنی غلاف کوژ بودن اضلاع و درون مثلث $A\hat{B}C$ ثابت ■

★ ۲۷



طبق قضیه‌ی ساکری-لژاندر: $B\hat{C}D: (\hat{B}_1)^\circ + (\hat{D}_1)^\circ + (\hat{C})^\circ \leq ۱۸۰^\circ \xRightarrow{(\hat{C})^\circ = ۹۰^\circ} (\hat{A}_1)^\circ + (\hat{D}_1)^\circ \leq ۹۰^\circ$

$\Longrightarrow (B_1)^\circ < ۹۰^\circ = (\hat{C}_1)^\circ \Longrightarrow (\hat{B}_1)^\circ < (\hat{C}_1)^\circ \xRightarrow{\text{قضیه‌ی ۳.۴}} \hat{B}_1 < \hat{C} \xRightarrow[\text{در مثلث } B\hat{C}D]{\text{طبق گزاره‌ی ۴.۵ صفحه‌ی ۱۰۱}}$

$\Longrightarrow CD < BD$ ①

طبق قضیه‌ی زاویه‌ی بیرونی: $(\hat{B}_2)^\circ > (\hat{C})^\circ = ۹۰^\circ \Longrightarrow (\hat{B}_2)^\circ > ۹۰^\circ$ ②

قضیه‌ی ۳.۴

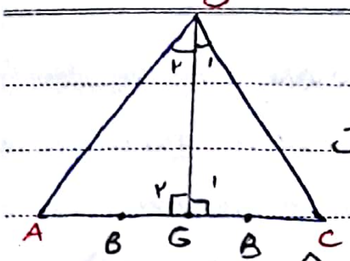
$A\hat{B}D$ طبق قضیه‌ی ساکری-لژاندر: $(\hat{A})^\circ + (\hat{D}_2)^\circ + (\hat{B}_2)^\circ \leq ۱۸۰^\circ \xRightarrow{(\hat{B}_2)^\circ > ۹۰^\circ} (\hat{A})^\circ + (\hat{D}_2)^\circ < ۹۰^\circ \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (\hat{A})^\circ < ۹۰^\circ$ ③

$\left.\begin{matrix} ② \\ ③ \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (\hat{A})^\circ < (\hat{B}_2)^\circ \xRightarrow{\text{قضیه‌ی ۳.۴}} \hat{A} < \hat{B}_2 \xRightarrow[\text{در مثلث } A\hat{B}D]{\text{طبق گزاره‌ی ۴.۵ صفحه‌ی ۱۰۱}}$

$\Longrightarrow BD < AD$ ④

$\left.\begin{matrix} ① \\ ④ \end{matrix}\right\} \Longrightarrow CD < BD < AD$



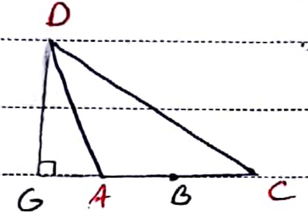
* ۲۸ شکل مثلث $D\hat{A}C$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم؛ عمودی از رأس D بر ضلع AC رسم می‌کنیم و پای عمود را G می‌نامیم. نقطه‌ی B روی ضلع AC نسبت به نقطه‌ی G سه حالت دارد:

(I). $G=B$: در این صورت طبق تمرین ۲۷ صفحه‌ی ۱۲۰ (تمرین قبلی) در مثلث‌های $G\hat{C}D$ و $G\hat{A}D$ داریم: $DB<DC$ و $DB<DA$.

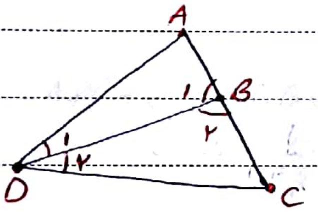
(II). $G*B*C$؛ لذا طبق تمرین ۲۷ صفحه‌ی ۱۲۰ (تمرین قبلی) در مثلث $G\hat{C}D$ خواهیم داشت: $DB<DC$.

(III) $A*B*G$؛ لذا طبق تمرین ۲۷ صفحه‌ی ۱۲۰ (تمرین قبلی) در مثلث $A\hat{G}D$ خواهیم داشت: $DB<AD$. ⊗

چنانچه عمود خارج از رأس D خارج از پاره‌خط AC بیفتد به همین شکل اثبات می‌گردد.



اثبات به روش دانیال شمسی:



فرض: $A*B*C \Longrightarrow$ حکم: $DB<DA$ یا $DB<DC$

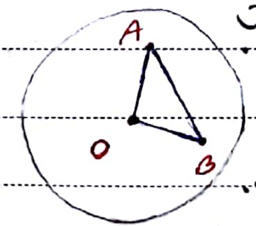
اثبات به روش برهان خلف: $DB>DA$ و $DB>DC$ $\xRightarrow[\text{صفحه‌ی ۱۰۱}]{\text{طبق گزاره‌ی ۵.۴}}$ $\begin{cases}\hat{A}>\hat{B}_1\\ \hat{C}>\hat{B}_1\end{cases}$

$$+\ \hat{A}+\hat{C}>\hat{B}_1+\hat{B}_2 \xRightarrow[\text{صفحه‌ی ۱۰۱}]{\text{قضیه‌ی ۳.۴}} \hat{A}+\hat{C}>180^\circ \quad ✗$$

با فرع ۱ قضیه‌ی زاویه‌ی بیرونی صفحه‌ی ۱۰۲ در تناقض است.

---

* ۲۹



فرض: A و B درون دایره است.

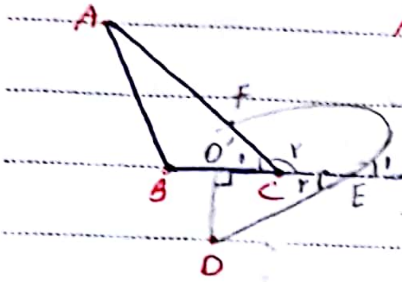
حکم: پاره‌خط AB درون دایره است.

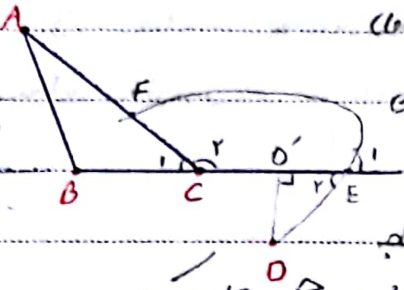
A درون دایره است. $\xRightarrow{\text{طبق تعریف}}$ $OA<OR$ ①

B درون دایره است. $\xRightarrow{\text{طبق تعریف}}$ $OB<OR$

طبق تمرین ۲۸ صفحه‌ی ۱۲۰: $\forall C \ \ s.t. \ \ A*C*B$: $OC<OA$ یا $OC<OB$ $\xRightarrow{\text{طبق ①}}$ $OC<OR$ $\xRightarrow{\text{تد}}$ تمام نقاط C درون دایره‌اند

$\Longrightarrow$ پاره‌خط AB درون دایره است.





۳۰) از نقطه‌ی D به خط $\overrightarrow{BC}$ عمود می‌کنیم اگر D′ پای عمود باشد حداقل یکی از زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{B}$ حاده است. فرض می‌کنیم که زاویه‌ی $\hat{C}$ حاده باشد. ضلع BC را از نقطه‌ی C امتداد می‌دهیم یک نقطه‌ی E را روی نیم‌خط مقابل $\overrightarrow{CB}$ در نظر می‌گیریم چنانچه E * D′ * B باشد حال نشان می‌دهیم که نیم‌خط $\overrightarrow{DE}$ مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را قطع نمی‌کند.

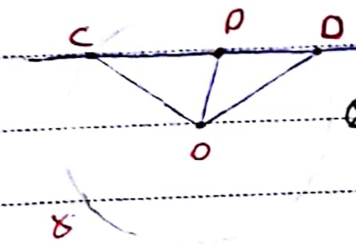
برهان خلف: اگر نیم‌خط $\overrightarrow{DE}$ مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را در ضلع AC در نقطه‌ی F قطع کند در این صورت زاویه‌ی خارجی $\hat{E}_1$ که حاده است (چون که در مثلث $D\hat{D'}E$ زاویه‌ی $\hat{D'}$ قائمه است پس باید دو زاویه‌ی دیگر یعنی $\hat{E}_2$ و $\hat{D}$ حاده باشند و چون $\hat{E}_2$ و $\hat{E}_1$ متقابل به رأس‌اند پس زاویه‌ی $\hat{E}_1$ هم حاده است.) از زاویه‌ی داخلی $\hat{C}_2$ که منفرجه است (چون که $\hat{C}$ حاده فرض شد پس $\hat{C}_2$ منفرجه است) کوچکتر است که این با قضیه‌ی زاویه‌ی بیرونی در تناقض است.

۳۱ الف) اثبات ⟸: به خلف فرض می‌کنیم که D * P * C نباشد لذا باید یا   P واقع بر l درون دایره‌ی γ ⟺ C * P * D

P * D * C باشد یا D * C * P باشد چنانچه از نقطه‌ی O به نقاط C، P و D وصل کنیم طبق تمرین ۲۸ صفحه‌ی ۱۲۰ از C * D * P نتیجه می‌شود که $OP>OD$ یا $OC>OD$ پس طبق تعریف نقطه‌ی P خارج از دایره‌ی γ قرار می‌گیرد ✗.

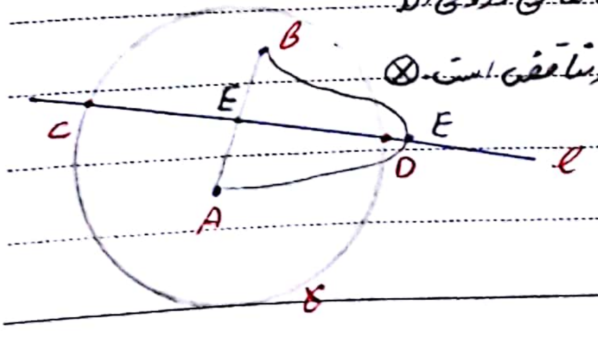
چنانچه D * C * P باشد از تمرین ۲۸ صفحه‌ی ۱۲۰ نتیجه می‌شود که $OD>OC$ یا $OP>OC$ لذا نقطه‌ی P باز هم خارج از دایره‌ی γ قرار می‌گیرد ✗.

اثبات ⟹:



اگر D * P * C باشد چنانچه از نقطه‌ی O به نقاط C، P و D وصل کنیم طبق تمرین ۲۸ نتیجه می‌شود که $OC>OP$ یا $OD>OP$؛ لذا طبق تعریف نقطه‌ی P درون دایره‌ی γ قرار دارد ⊗.

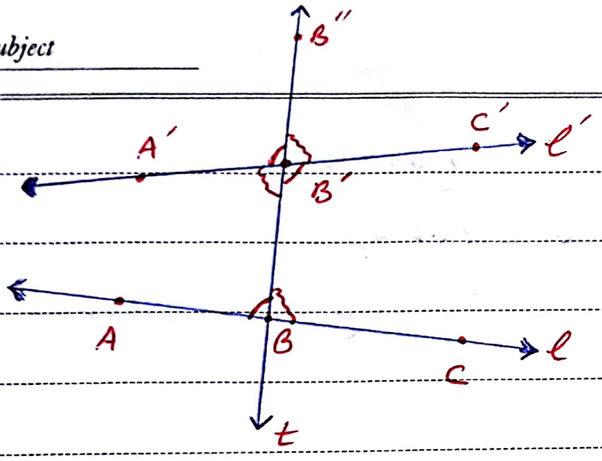
ب) به خلف فرض می‌کنیم که E محل تلاقی خط l با پاره‌خط AB خارج یا روی دایره قرار داشته باشد در این صورت نقطه‌ی E نقطه‌ای روی پاره‌خط AB است که درون دایره نیست ولی A و B نقاط درونی‌اند پس این با تمرین ۲۹ صفحه‌ی ۱۲۰ که کوژ بودن دایره را اثبات می‌نماید در تناقض است ⊗.



SALEH

Subject

Year: Month: Date:



(I) $A'\hat{B'}B'' \cong A\hat{B}B' \Longleftrightarrow A\hat{B}B' \cong B\hat{B'}C'$ ۳۲

(II) $C'\hat{B'}B'' \cong C\hat{B}B' \Longleftrightarrow C\hat{B}B' \cong B\hat{B'}A'$

اثبات (I): $\Longrightarrow$:

طبق فرض $A'\hat{B'}B'' \cong A\hat{B}B'$

گزاره‌ی ۳، ۱۵ صفحه‌ی ۷۳: $A'\hat{B'}B'' \cong B\hat{B'}C'$

زوایای متقابل به رأس

$\xrightarrow[\text{انطباق}]{\text{بنداشت پنجم قابلیت}} A\hat{B}B' \cong B\hat{B'}C'$

$\Longleftarrow$:

طبق فرض: $A\hat{B}B' \cong B\hat{B'}C'$

گزاره‌ی ۳، ۱۵ صفحه‌ی ۷۳: $A'\hat{B'}B'' \cong B\hat{B'}C'$

زوایای متقابل به رأس

$\xrightarrow[\text{انطباق}]{\text{بنداشت پنجم قابلیت}} A'\hat{B'}B'' \cong A\hat{B}B'$

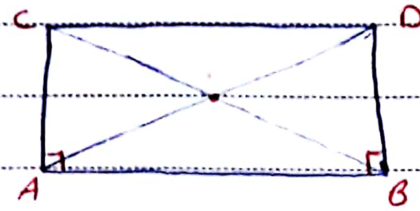
اثبات (II) نیز به همین شکل است.

Subject   Year: Month: Date:

تمرینات دوره‌ای صفحه‌های ۱۳۴ ، ۱۳۵ در کتاب حل شده.

تمرینات صفحه‌ی ۱۳۵

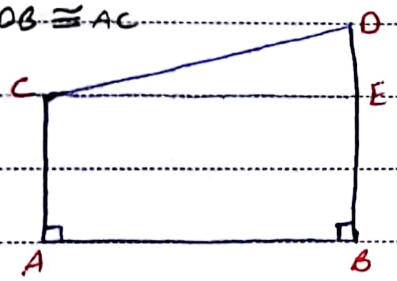
۱



$$\left\{\begin{aligned} &AD \cong BC && \text{طبق فرض} \\ &D\hat{A}B \cong C\hat{B}A && \text{هر دو قائمه} \\ &AB \cong AB \end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow BD \cong AC \; ①$$

$$\left\{\begin{aligned} &DC \cong DC \\ &AD \cong BC \\ &DB \cong AC \end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BDC} \Longrightarrow \hat{D} \cong \hat{C} \; ▨$$

۲

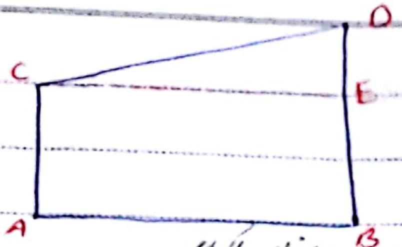


حل: $AC < BD \Longrightarrow \exists\, E \;\; s.t. \left\{\begin{aligned} &B * E * D \\ &BE \cong AC \end{aligned}\right.$

لذا طبق تعریف چهارضلعی $\overset{\square}{ACEB}$ یک چهارضلعی ساکری بوده و لذا طبق تمرین ۱ صفحه‌ی ۱۳۵ $A\hat{C}E \cong B\hat{E}C$ پس خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} &B\hat{E}C > \hat{D} \\ &A\hat{C}E \cong B\hat{E}C \end{aligned}\right\}$$ طبق قضیه‌ی زاویه‌ی بیرونی در مثلث $\overset{\triangle}{CDE}$: $B\hat{E}C > \hat{D}$

$$\xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۴}]{\text{طبق گزاره‌ی ۲۱.۳ (ج)}} \left.\begin{aligned} &A\hat{C}E > \hat{D} \\ &\hat{C} > A\hat{C}E \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \hat{C} > \hat{D} \; ▨$$



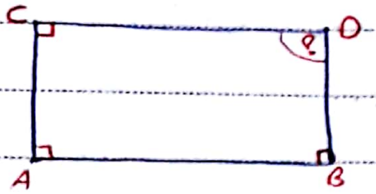
۲

فرض: $(\hat{D})^\circ < (\hat{C})^\circ \Longrightarrow$ حکم: $AC < BD.$

به خلف فرض می‌کنیم که $AC < BD$ نباشد لذا دو حالت پیش می‌آید:

(I) $AC \cong BD \xrightarrow[\text{طبق تمرین ۱ صفحه‌ی ۱۳۵}]{\text{چهارضلعی } ABDC \text{ چهارضلعی ساکری}} \hat{C} \cong \hat{D}$ ×

(II) $AC > BD \xrightarrow[\text{۱۳۵}]{\text{طبق تمرین ۲ صفحه‌ی}} \hat{D} > \hat{C}$ ×



۴) (آ) اگر زاویه‌ی $\hat{D}$ منفرجه (یا بیش از ۹۰ درجه) باشد لذا مجموع زوایای چهارضلعی $AB\overset{\frown}{D}C$ بیش از ۳۶۰° می‌شود و این با فرع ۲ صفحه‌ی ۱۵۶ که می‌گوید مجموع زوایای یک چهارضلعی کوژ حداکثر ۳۶۰ است در تناقض است.

(ب) به خلف فرض می‌کنیم که $AC \cong BD$ نباشد لذا دو حالت پیش می‌آید:

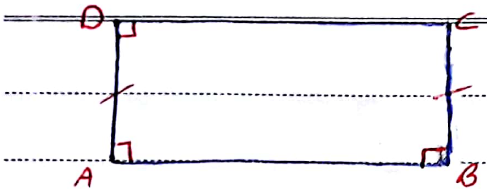
(I) $AC > BD \xrightarrow{\text{طبق تمرین ۲ صفحه‌ی ۱۳۵}} \hat{D} > \hat{C}$ × چون که $\hat{D}$ و $\hat{C}$ هر دو قائمه‌اند.

(II) $AC < BD \xrightarrow{\text{طبق تمرین ۲ صفحه‌ی ۱۳۵}} \hat{D} < \hat{C}$ × چون که $\hat{D}$ و $\hat{C}$ هر دو قائمه‌اند.

(ج) چنانچه زاویه‌ی $\hat{D}$ حاده باشد و چون زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{B}$ قائمه‌اند پس می‌توان نتیجه گرفت که: $\hat{D} < \hat{C}$ و $\hat{D} < \hat{B}$ لذا داریم:

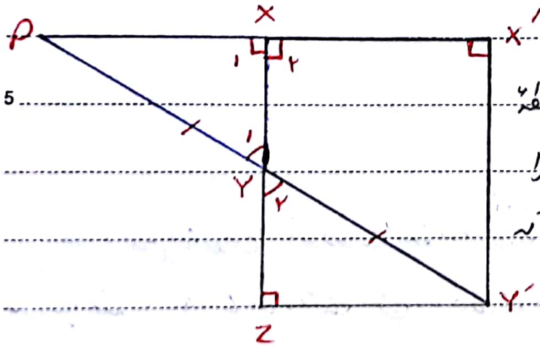
$\hat{D} < \hat{C} \xrightarrow[\text{۱۳۶}]{\text{طبق تمرین ۳ صفحه‌ی}} AC < BD.$

$\hat{D} < \hat{B} \xrightarrow[\text{۱۳۶}]{\text{طبق تمرین ۳ صفحه‌ی}} AB < CD.$



د) چهارضلعی ساکری و لامبرت $\overset{\square}{ABCD}$ را در نظر می‌گیریم از آنجا که در تمرین ۱ صفحه‌ی ۱۳۵ اثبات شد که: $\hat{C} \cong \hat{D}$ و $\hat{D}$ نیز زاویه‌ای است قائمه پس:
$\hat{C}$ نیز زاویه‌ای ۹۰° (قائمه) بوده و لذا طبق تعریف چهارضلعی $\overset{\square}{ABCD}$ یک مستطیل است.

ه



برهان: پاره‌خط PY را از نقطه‌ی Y به اندازه‌ی خودش ادامه می‌دهیم تا به نقطه‌ی Y' برسیم حال از نقطه‌ی Y' بر خط $\overleftrightarrow{PX}$ عمود می‌کنیم و پای عمود را X' می‌نامیم؛ XY را آن اندازه ادامه می‌دهیم تا بتوانیم عمود Y'Z را بر $\overleftrightarrow{XY}$ فرود بیاوریم واضح است که در مثلث $\overset{\triangle}{PX'Y'}$ دو برابر وتر $\overset{\triangle}{PXY}$ است چون که $YY' \cong PY$ پس

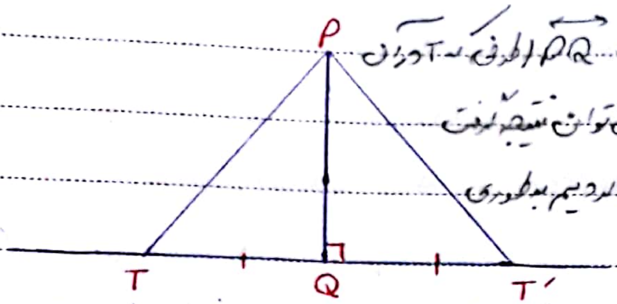
$2 = \frac{2PY}{PY} = \frac{PY'}{PY}$ داریم:

$\hat{X}_1 \cong \hat{Z}$ هر دو قائمه
$PY \cong YY'$
$\hat{Y}_1 \cong \hat{Y}_2$ متقابل به رأس

$$\xRightarrow{(ز ز ض)} \overset{\triangle}{PXY} \cong \overset{\triangle}{Y'ZY} \Rightarrow XY \cong YZ \; *$$

حال چهارضلعی $XX'Y'Z$ چهارضلعی لامبرت است و لذا طبق تمرین ۶ صفحه‌ی ۱۳۶ در این چهارضلعی داریم: $X'Y' > XZ \overset{*}{\cong} 2XY$ ■

و

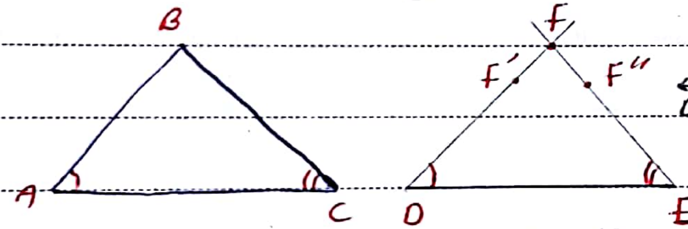


۷- برهان خلف: فرض می‌کنیم که وجود داشته باشد دو نقطه‌ی T' و T'' در یک طرف $\overleftrightarrow{PQ}$ (طرفی که T در آن نیست) بطوری که $T\overset{\triangle}{Q}P \cong T'\overset{\triangle}{Q}P$ و $T\overset{\triangle}{Q}P \cong T''\overset{\triangle}{Q}P$ لذا می‌توان نتیجه گرفت که دو نقطه‌ی T' و T'' در یک طرف $\overleftrightarrow{PQ}$ (طرفی که T در آن نیست) پیدا کردیم بطوری که: $T\hat{P}Q \cong T'\hat{P}Q$ و $T\hat{P}Q \cong T''\hat{P}Q$ و این با بنداشت چهارم قابلیت انطباق که می‌گفت تنها یک نقطه وجود دارد بطوری که: $T\hat{P}Q \cong T'\hat{P}Q$ در تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و حکم یعنی منحصر به فرد بودن نقطه‌ی T' ثابت.

∝ ۸- اصل پنجم اقلیدس: اگر دو خط به وسیله‌ی موربی چنان قطع شوند که مجموع اندازه درجه‌های دو زاویه‌ی درونی واقع در یک طرف مورب کمتر از ۱۸۰ باشد، آنگاه این دو خط یکدیگر را در همان طرف مورب تلاقی می‌کنند.

اصل والیس: مثلث نامشخص $\overset{\triangle}{ABC}$ و پاره خط نامشخص DE داده شده‌اند. مثلثی مانند $\overset{\triangle}{DEF}$ (به ضلع DE) وجود دارد چنانکه با $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه است. (و چنین نموده می‌شود که: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEF}$) اصل پنجم اقلیدس ⟺ اصل والیس

اثبات ⟸: جلوتر با استفاده از اصل پنجم اقلیدس اصل توازی اثبات شد. لذا مجموع زوایای هر مثلث ۱۸۰° می‌شود. پس مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و پاره خط DE را در نظر می‌گیریم طبق بنداشت چهارم قابلیت انطباق وجود دارد نیم خط‌های DF' و EF'' در یک طرف $\overleftrightarrow{DE}$ بطوری که: $\hat{A} \cong \hat{D}$ و $\hat{C} \cong \hat{F}$



لذا چون مجموع زوایای مثلث‌ها ۱۸۰° است پس با استفاده از قضیه‌ی ۳.۴ صفحه‌ی ۱۰۱ داریم:

$$(\hat{B})^\circ = 180^\circ - (\hat{A})^\circ - (\hat{C})^\circ = 180^\circ - (\hat{D})^\circ - (\hat{E})^\circ = (\hat{F})^\circ \xRightarrow{\text{طبق قضیه‌ی ۳.۴}} \hat{B} \cong \hat{F}$$

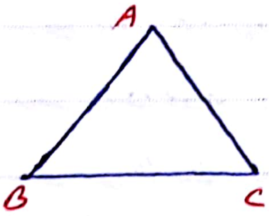
صفحه‌ی ۱۰۱

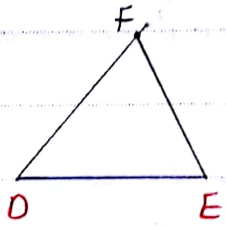
پس طبق (ز ز ز) مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ متشابه‌اند.

اثبات ⟹

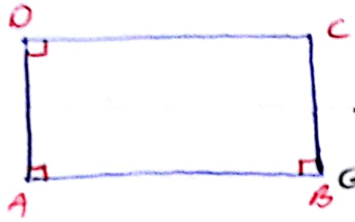
چون که یک ویژگی برای $\overset{\triangle}{DE}$ گفته شده پس دیگر DE نامشخص نمی‌گردد.

۱۴ مثلث نامشخص $\overset{\triangle}{A\hat{B}C}$ و پاره خط $AB \cong DE$ داده شده‌اند. مثلثی مانند $\overset{\triangle}{DEF}$ (به ضلع DE) وجود دارد، چنانکه با $\overset{\triangle}{A\hat{B}C}$ قابل انطباق است. برهان: مثلث نامشخص $\overset{\triangle}{A\hat{B}C}$ و پاره خط $AB \cong DE$ را در نظر می‌گیریم طبق بنداشت چهارم قابلیت انطباق وجود دارد نیم خط منحصر به فرد $\overrightarrow{DF}$ در یک طرف $\overleftrightarrow{DE}$ به طوری که $A\hat{B}C \cong F\hat{D}E$؛ طبق بنداشت اول قابلیت انطباق روی نیم خط $\overrightarrow{DF}$ وجود دارد نقطه‌ی منحصر به فرد F به طوری که $AC \cong DF$ لذا داریم:

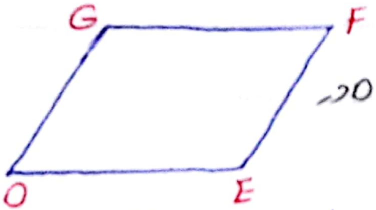




$$\begin{array}{l} AC \cong DF \\ A\hat{B}C \cong F\hat{D}E \\ BC \cong DE \end{array} \xrightarrow{(ض ز ض)} \overset{\triangle}{A\hat{B}C} \cong \overset{\triangle}{D\hat{E}F} \blacksquare$$



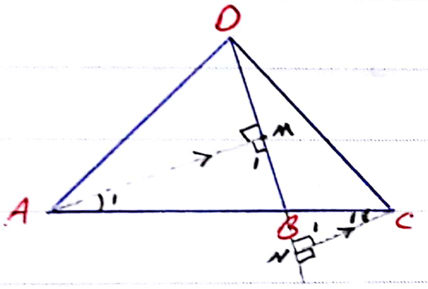
۱۵ چهارضلعی نامشخص، لامبرت $\overset{\square}{ABCD}$ را در نظر می‌گیریم، از آنجا که $\overleftrightarrow{DC}$ و $\overleftrightarrow{CB}$ عمود بر خط $\overleftrightarrow{AB}$ اند لذا طبق فرع صفحه‌ی ۹۷؛ این دو خط موازی اند همچنین به همین دلیل چون که دو خط $\overleftrightarrow{DC}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ عمود بر خط $\overleftrightarrow{AD}$ اند پس این دو خط هم موازی اند لذا طبق تعریف چهارضلعی لامبرت $\overset{\square}{ABCD}$ یک متوازی الاضلاع است.



متوازی الاضلاع DEFG را در نظر می‌گیریم برای آن که نشان دهیم این چهارضلعی یک چهارضلعی کوژ است لذا باید نشان دهیم که پاره خط GF در یک طرف $\overleftrightarrow{DE}$ و همچنین پاره خط DE در یک طرف $\overleftrightarrow{GF}$ قرار دارد.

به خلف فرض می‌کنیم که DF در دو طرف $\overleftrightarrow{DE}$ باشد یعنی نقاط G و F در دو طرف $\overleftrightarrow{DE}$ باشند لذا طبق تعریف پاره خط GF خط $\overleftrightarrow{DE}$ را می‌برد و بنابراین خطوط $\overleftrightarrow{DE}$ و $\overleftrightarrow{GF}$ موازی نخواهند بود و این با تعریف متوازی الاضلاع در تناقض است. به همین شکل ثابت می‌نماییم که پاره خط DE در یک طرف خط GF قرار داشته و لذا متوازی الاضلاع نامشخص $\overset{\square}{DEFG}$، چهارضلعی است کوژ ⊗

۲۴ *



حکم: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD.\sin A\hat{D}B}{CD.\sin C\hat{D}B} = \frac{AM}{CN}$

برهان: از رئوس A و C به خط $\overleftrightarrow{DB}$ عمود می‌نماییم این دو عمود را AM و BN می‌نامیم از آنجا که این دو بر یک خط عمودند پس طبق فرع صفحه‌ی ۹۷ این دو موازی بوده و لذا طبق عکس قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی برای دو خط موازی $\overleftrightarrow{AM}$ و $\overleftrightarrow{BN}$ و مورب $\overleftrightarrow{BM}$ داریم که: $\hat{A}_1 \cong \hat{C}_1$ لذا داریم:

$\hat{A}_1 \cong \hat{C}_1$

$\hat{M}_1 \cong \hat{N}_1$ هردو قائمه $\xrightarrow{(ز ز ز)} \frac{AB}{BC} = \frac{AM}{CN} = \frac{AD.\sin A\hat{D}B}{CO.\sin C\hat{O}B}$

$\hat{B}_1 \cong \hat{B}_2$ متقابل به رأس