* ریاضی مهندسی - جلسه ی اول - ۹۲/۲/۲۴ - استاد کریمی - دوشنبه - 17-21:30 | 1

۹۵ درصد سؤالات ذهنی ← در زمان زیر ۱ دقیقه!

وظایف مدرس ← جهت دادن
← یاد دادن

وظایف دانشجو

① مرور ← اصلی ترین پارامتر ← بیشترین ضربه رو از اون می خورند!!
بعد از ۷۲ ساعت، احتمال اینکه مطلب از ذهن خارج شود بالای ۹۰ درصد است!
مرور + جمع بندی + خلاصه برداری ← تسلط ← تست
در کنکور باشد مرور واجب تر از مطالعه کردن است!

② اگه درست و کامل با کلاس پیش رفتی که OK!
اگه نه! باید پیش مطالعه داشته باشی!

③ حق تقدم با افرادی است که سؤال می پرسند!

کتاب - جلد ۱ و ۲ -

* برق ← ۶ تا ۷ تا سؤال

* فرمول های مثلثات رو تا جلسه ی آینده حفظ کن!

ریاضیات مهندسی ← فوریه
← توابع مختلط ← ۵۰ درصد
← معادلات با مشتقات جزئی
← ساده ترین ← کم زمان ترین
← ۵۰ درصد

ترتیب سادگی (کم زمانی): معادلات با مشتقات جزئی ← توابع مختلط ← فوریه

* فوریه :

فوریه:
- سری فوریه
- انتگرال فوریه
- تبدیل فوریه

سمت راست متناوب است پس سمت چپ نیز باید باشد

- سری فوریه : می‌خواهیم یک تابع متناوب $f(x)$ را برحسب مجموعی از توابع $\cos\frac{n\pi}{l}x$ و $\sin\frac{n\pi}{l}x$ بنویسیم.

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{متناوب}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\cos\frac{n\pi}{L}x}_{\text{متناوب}} + b_n \underbrace{\sin\frac{n\pi}{L}x}_{\text{متناوب}}$$

پس توابع نامتناوب سری فوریه ندارند فقط مخصوص توابع متناوب است

قدم اول : ضرایب مجهول چه طوری بدست می‌آیند؟

* یک معادله $\Leftarrow$ $2n+1$ مجهول

راه حل معادله : خاصیت تعامد

- اگه خاصیت تعامد رو درک کنید نیازی نیست فرمول‌های فوریه را حفظ کنید!

دو بردار در هم عمود $\leftarrow$ ضرب داخلی صفر

* ضرب داخلی دو تابع حقیقی

ضرب داخلی f و g در بازه‌ی $[a,b]$ =

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$ ضرب داخلی f و g

فرض: f و g مخالف صفر

اگر ضرب داخلی دو تابع صفر شود $\leftarrow$ بر هم عمودند

f و g در بازه‌ی $[a,b]$ متعامد هستند $\Leftrightarrow$ $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$

خانواده ⇐ توابعی که یه ویژگی های مشخص داشته باشند که ما با مقدار دهی به n این توابع را بدست آوریم

ex: $\sin x, \sin 2x \Rightarrow$ فرق دارند اما تابع مولد خفتشون sin است، پس از یک خانواده اند

$g_n(x)$ ⇐ یک خانواده

* اگر در یک خانواده از توابع ⇐ توابع دو به دو بر هم عمود باشند ⇐ $g_n(x)$: پایه متعامد

$$\langle g_n(x), g_m(x)\rangle = \int_a^b g_n(x) g_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \|g_n\|^2, & m = n \end{cases}$$

$$v \cdot v = |v|^2 \qquad \langle f, f\rangle = \int_a^b f^2\,dx = \|f\|^2$$

مفهوم نرم برای توابع = مفهوم اندازه برای بردارها

نرم = ضرب داخلی هر تابع در خودش

$\sin nx$ ⇐ دو به دو بر هم عموداند

$$\int_{(T)} \sin nx \sin mx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \end{cases}$$

اثبات ⇐ $$\int_{(T)} \sin^2 nx\,dx = \int_0^T \frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx = \frac{T}{2} - 0 = \frac{T}{2}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4n}\sin(2nx)$$

$$\int_{(T)} \cos nx \cos mx\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \end{cases}$$

* تابع پیوستی $f(x)$ را می‌توان برحسب پایه‌ی متعامد $g_n(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ مطابق زیر بسط داد

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(x)$$

$$a_n=\frac{1}{\|g_n\|^2}\int_a^b f(x)g_n(x)dx=\frac{\langle f,g_n\rangle}{\langle g_n,g_n\rangle}$$

*مثل نرمالیزه کردن بردار است که تقسیم بر اندازش می‌کردیم یعنی تقسیم بر ضرب داخلی در خ

طول بازه مهم است: $\int_{(T)}=\int_0^T \quad \int_{-L}^{L} \quad \int_{2L}^{4L} \quad \int_T^{2T} \cdots$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\quad L=\frac{T}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{(T)} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad T=2L$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{(T)} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\langle 1,1\rangle=\int_0^T 1^2dx=T \qquad \text{نرم یک}=T$$

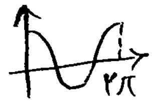
$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{(T)} f(x)\,dx$$

نرم‌ها (1)

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{(T)} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{(T)} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{(T)} f(x)\,dx$$

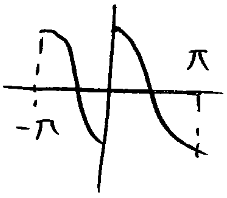


متناوب هستند یا خیر؟ زوج هستند یا فرد یا نه زوج نه فرد؟

۱) $y=\cos x$ $\quad 0\leq x\leq 2\pi$ متناوب نیست — نه زوج نه فرد

۲) $y=x$ $\quad 0<x<1$ متناوب نیست، نه زوج نه فرد

۳) $y=x-[x]$ $\quad$ نه زوج نه فرد ـ متناوب $T=1$



۴) $y=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$ $\quad$ متناوب نیست ـ فرد

۵) $y=e^{-x}$ $\quad$ متناوب نیست، نه زوج است و نه فرد

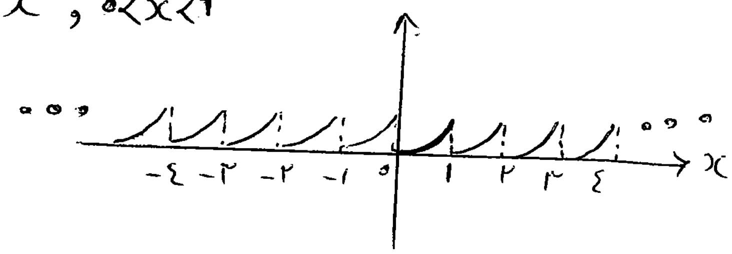
نکته: هر موقع تابعی با بیش از یک ضابطه داشتیم بهترین راه برای تشخیص زوج و فرد بودن رسم شکل است!

۱) توابعی که ذاتاً متناوب هستند:

$\begin{cases} y=\sin x\\ y=\cos x\\ y=x-[x]\\ y=\operatorname{tg} x\\ \vdots\end{cases}$

۲) توابعی که ذاتاً متناوب نیستند، اما به صورت تصنعی می‌توان آن‌ها را متناوب کرد

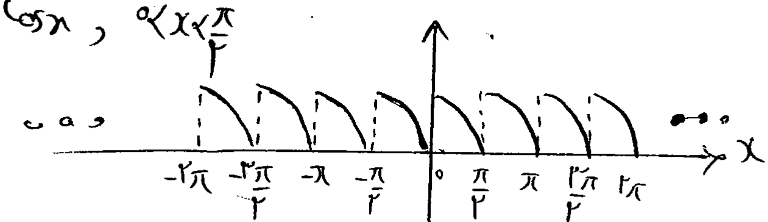
$y=x^2,\ 0<x<1$



$f(x)=x^2\ (0<x<1)$

$f(x+1)=f(x)$

$y=\cos x,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$



* هر تابعی که در بازه‌ی محدود تعریف شده باشد متعلق به گروه (۲) است

* عادت کن توی ریاضی هندسی حتماً اول به بازه دقت کنی!

* متناوب $\Leftarrow$ $-\infty$ تا $+\infty$

۳) توابعی که ذاتاً متناوب نیستند و بصورت تصنعی هم متناوب نمی‌شوند

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \\ y = e^{-x} \\ y = x^2 + 3x \\ \vdots \end{cases}$$

* توابع گروه (۲)، سری فوریه دارند
- گروه ۳، حتماً بازه نامحدود است

به بازه نگاه کن $\Leftarrow$ بازه محدود $\Leftarrow$ گروه ۲ از بین می‌رود
بازه نامحدود $\Leftarrow$ گروه ۱ هم نیست چون از $-\infty$ تا $+\infty$ نیست
پس تنها جایی که ضابطه مهم $\Leftarrow$ از $-\infty$ تا $+\infty$ است

$y = f(x) \,,\, x > 0 \Rightarrow$ (۳) گروه

$y = f(x) \,,\, a < x < b \Rightarrow$ (۲) گروه

$y = c$ عدد ثابت $\Rightarrow$ (۱) گروه

$y = x^2 \,,\, 0 < x < 1 \Rightarrow$ (۲) گروه

* بازه‌ی گروه (۱)، همیشه از $-\infty$ تا $+\infty$ است.

$y = f(x)$ → $\sin x$ (۱) / x (۳) $\Rightarrow$ با توجه به ضابطه رجوع کرد! / چون بازه تعریف از $-\infty$ تا $+\infty$ است!

(۶۹) درصد سؤالات کنکور $\Leftarrow$ گروه ۲
(۱) درصد سؤالات کنکور $\Leftarrow$ گروه ۱

* در گروه ۲، همیشه دوره‌ی تناوب، بازه‌ی تعریف تابع است!

گر گروه ای مشکل اصلی بدست آوردن کوچکترین دوره تناوب است.

ما در سری فوریه، کوچکترین دوره‌ی تناوب را نیاز نداریم

دقت ها هر تابع دارا متناوب را روی هر مضربی از دوره‌ی تناوب آن بنویسیم، سری فوریه‌ی آن فرقی نمی‌کند

پس در ریاضی مهندسی، معضلی به نام انتخاب دوره تناوب نداریم.

* سه مدل بیان برای سؤالات گروه ۲ داریم

① سری فوریه تابع $y=f(x)$ و $0<x<a$ را بدست آورید

② سری فوریه تابع $y=f(x)$, $0<x<a$ و $f(x+a)=f(x)$ را بدست آورید

③ اگر تعریف تابع در یک دوره‌ی تناوب بصورت $y=f(x)$, $0<x<a$ باشد، سری فوریه تابع را بدست آورید.

شکل ① در اصل غلط است ولی چون پیش فرض ذهنی این است، دیگه طراح کم‌فروشی می‌کن یعنی خود دانشجو باید تشخیص بده که این فقط تعریف آن در یک دوره است.

گروه ۲

$$\text{فرد } f(x) = \begin{cases} a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0 \\ a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = 0 \\ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x}_{\text{فرد} \times \text{فرد} = \text{زوج}} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases} \Longleftrightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\text{زوج } f(x) = \begin{cases} a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx \\ a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \\ b_n = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

توضیح

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

زوج ⇒ زوج   زوج   ~~فرد~~

فرد ⇒ ~~زوج~~   ~~زوج~~   فرد

سوال اصلی: از کجا تشخیص بدیم بسط فوریه‌ی تابع زوج یا فرد (قبل از محاسبه‌ی ضرایب)؟

f ← بازه متقارن است $(-a,a)$
- ← f زوج ← بسط فوریه زوج
- ← f فرد ← بسط فوریه فرد
- ← f نه زوج نه فرد ← بسط فوریه نه زوج نه فرد

f ← بازه متقارن نیست ← شکل سری فوریه تابع را رسم می‌کنیم

* شکل سری فوریه تابع = شکل متناوب شده (تعمیم یافته) $f(x)$ است

* مثال) زوج یا فرد بودن بسط فوریه توابع داده شده را بررسی کنید.

1) $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$ ⇒ متقارن نیست ← رسم شکل سری فوریه

2) $f(x)=\begin{cases} x & -1<x<1 \\ 2-x & 1<x<3 \end{cases}$ ⇒ بازه متقارن نیست ← شکل تابع رسم

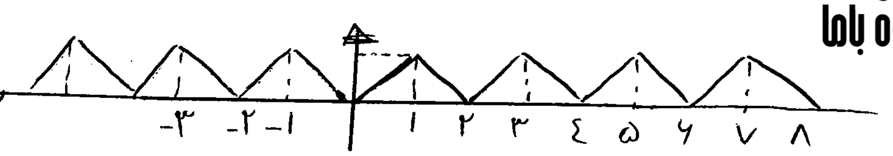
3) $f(x)=x \qquad 0<x<1$ ⇒ بازه متقارن نیست ← شکل سری فوریه رسم

4) $f(x)=x-\frac{1}{2} \qquad 0<x<\frac{1}{2}$ ⇒ متقارن نیست ← شکل سری فوریه رسم

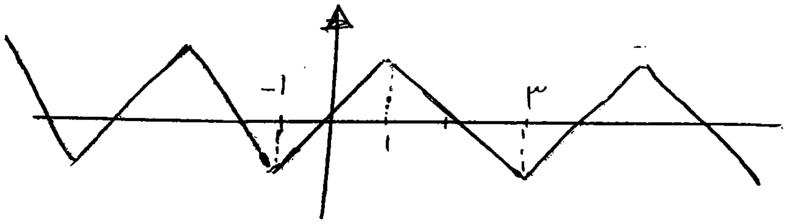
5) $f(x)=x+1 \qquad 0<x<1$ ⇒ متقارن است (تابع نه زوج نه فرد پس بسط فوریه هم نه زوج نه فرد)

6) $f(x)=x \qquad -1<x<1$ متقارن است ← تابع فرد

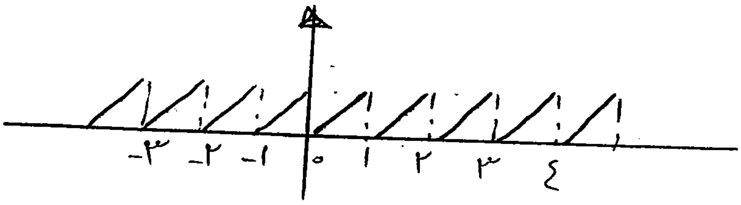
۱) سط فوریه زوج است



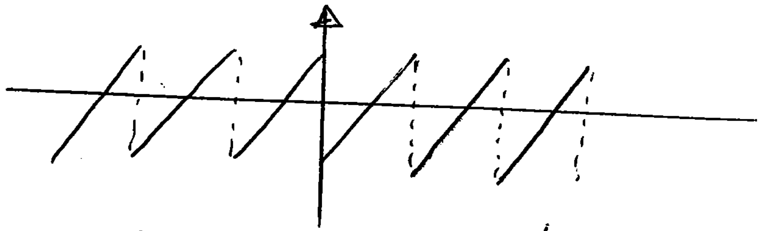
۲) سط فوریه فرد است



۳) سط فوریه نه زوج است، نه فرد



۴) سط فوریه فرد است



۵) سط فوریه نه زوج است و نه فرد

۶) سط فوریه فرد است

* اگه بازه متقارن نباشه، اصلاً به ضابطه نگاه نمی‌کنیم!

← تنها راه تشخیص: شکل سری فوریه است.

چرا اصرار داریم قبل از محاسبه ضرایب، تشخیص زوج و فرد بدیم؟ محاسبات کم می‌شه!
چون شاید a_n یا b_n حذف شوند (صفر شوند)

* در تابع زوج حداقل یکی از a_n یا a_0 مخالف صفر باشد

* در تابع نه زوج نه فرد حداقل یکی از a_n یا b_n یا a_0 مخالف صفر باشد.

* روش کلی محاسبه سری فوریه :

۱) تشخیص دوره‌ی تناوب (T)

۲) تعیین حدود انتگرال : ابتدا بررسی می‌کنیم که بسط فوریه زوج یا فرد است یا خیر ⇐

⇐ اگر بسط فوریه زوج یا فرد باشد ⇐ از فرمول های گروه (۲) ضرایب را محاسبه می‌کنیم

* در این فرمول ها حتماً بازه‌ی انتگرالگیری از 0 تا L است

⇐ اگر بسط فوریه نه زوج و نه فرد باشد ⇐ از فرمول های گروه (۱) ضرایب را محاسبه کنیم

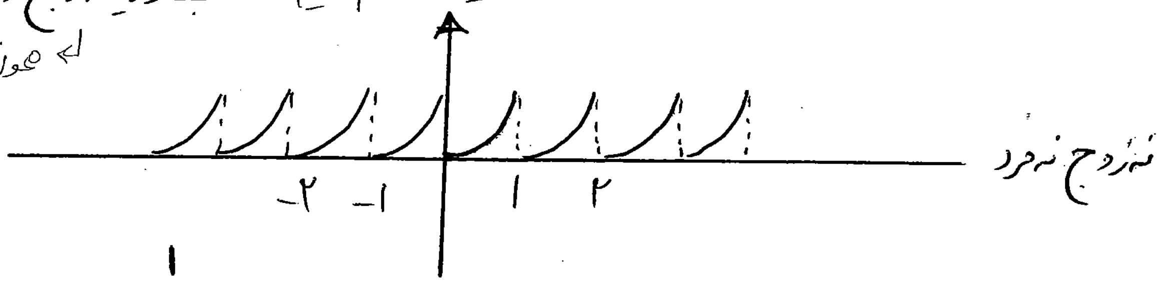
بازه‌ی انتگرال همواره بهتر است بازه‌ی تعریف تابع در نظر گرفته شود

* مثال : بسط فوریه‌ی تابع $y=x^2$, $0<x<1$ را بدست آورید.

$$T=1 \Rightarrow L=\frac{1}{2}$$

بازه متقارن نیست ⇐ شکل سری فوریه را رسم می‌کنیم . بسط فوریه نه زوج و نه فرد است

↳ چون حدود تعریف شده حد انتگرال



$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{1/2}\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \cdots \\ a_n = \dfrac{1}{1/2}\displaystyle\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{n\pi}{\frac{1}{2}}x\right)dx = \cdots \\ b_n = \dfrac{1}{1/2}\displaystyle\int_0^1 x^2\sin\left(\frac{n\pi}{1/2}x\right)dx = \cdots \end{cases}$$

ـــ حل تمرین اینطوری هم میشه :

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_2^3 (x-2)^2 \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_2^3 (x-2)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{\frac{1}{2}} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_2^3 (x-2)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{\frac{1}{2}} x\right) dx$$

درسته! ولی ضرورت نداره، چون کار رو سخت‌تر می‌کنه!

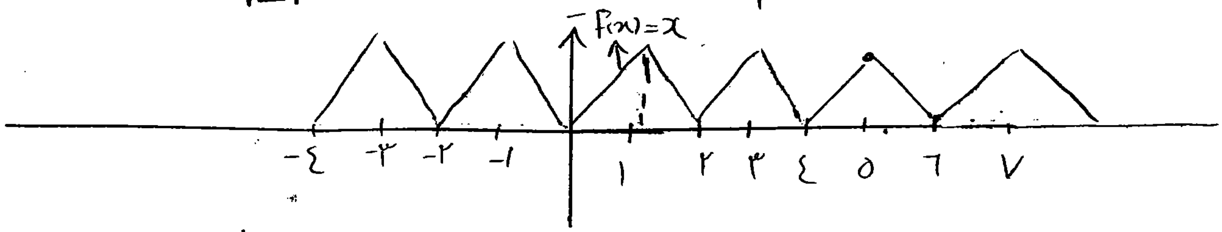
ولی اگه با عوض کردن بازه، راحت‌تر بشه انتگرال گرفت $\Leftarrow$ ولی تا حالا هم بازه‌ای که طراح داده، بهترین بوده و لازم نیست عوض کنیم!

* مثال : سری فوریه تابع $f(x)$ که تعریف آن در یک دوره به صورت زیر است را بدست آورید

$$f(x) = \begin{cases} x-4 & , \quad 4<x<5 \\ 6-x & , \quad 5<x<6 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} T = 6-4 = 2 \\ l = 1 \end{array}$$

$T=2$

بازه متقارن نیست $\Leftarrow$ رسم شکل سری فوریه



$b_n = 0 \Leftarrow$ شکل سری فوریه تابع زوج است

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x \, dx = 1$$

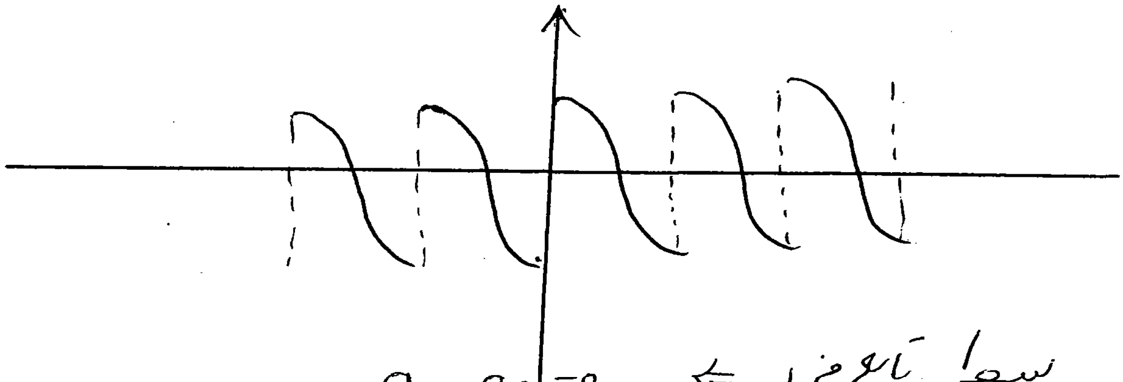
$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = -2 \, \frac{1-\cos n\pi}{n^2 \pi^2}$$

همه در توابع زوج و فرد ← بازه ۰ تا L اهمیت دارد : همه بازه ی انتگرالگیری ۰ تا L باشد

* مثال : سری فوریه تابع $f(x)$ که تعریف آن در یک دوره بصورت $f(x)=\cos x$, $0<x<\pi$ است را بدست آورید.

$T=\pi$

بازه متقارن نیست ← رسم شکل سری فوریه



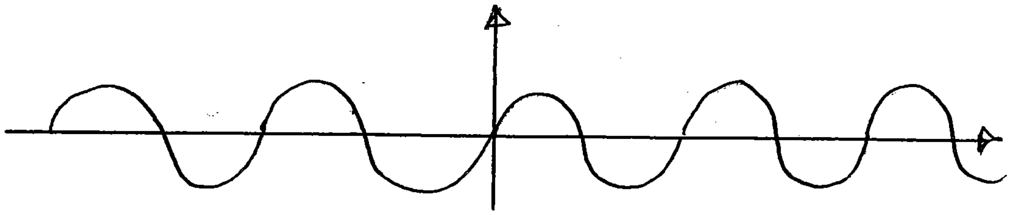
سپس تابع فرد ← $a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\sin(2nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos n\pi}{2n+1}+\frac{1-\cos n\pi}{2n-1}\right)$$

* مثال : سری فوریه تابع $f(x)=\sin x$ و $0<x<2\pi$ را محاسبه کنید.

$T=2\pi$

بازه متقارن نیست ← رسم شکل سری فوریه



فرد $\Rightarrow a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\sin(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi}=0$$

$n\neq 1$

۰ شد ⟸ ایراد کار کجاست؟ کار من درسته برخلاف $n=1$.

پس $n=1$ را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = 1$$

$$f(x) = \cancel{\frac{a_0}{2}}^{0} + \sum \cancel{a_n}^{0} \cos nx + \underbrace{b_n}_{} \sin nx = \sin x$$

فقط b_1 داریم

$b_1 = 1$

مثال) $f(x) = x^7 + 4x^6 + 7x^5 + 3x^2 + 4$ بسط مک لورن؟

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

هدف بسط مک لورن ⟸ تابع را برحسب توان‌های x بسط دهیم

پس وقتی تابع اینطوریه، همین می‌شه بسط مک لورن

پس در حل مسئله به هدف فکر کنید!!!

هرکسی با توجه به داشته‌هایی که داره، بهترین انتخاب رو برای خودش داره!

هرچی داشته بیشتر ⟸ حق انتخاب بیشتر

حل مسئله: هدف ⟸ اول هدف تعیین کنید، بعد دنبال مسیر باشید

هدف سری فوریه ⟸ تابع را برحسب مجموعی از توابع $\sin nx$ و $\cos$

از هر راهی بلدید، برحسب مجموع $\sin nx$ و $\cos$ بنویسید می‌شه سری فوریه!

در سوال بالا هدف اینه که بر حسب $\sin nx$ بنویسیم خوب دقت خودش $\sin x$ هست، پس دیگه حله!

ex: $f(x) = \sin^2 x$ و $0 < x < 2\pi$

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{2} = \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x}$$

سری فوریه : عدد ثابت + مجموعی از جملات سینوس و کسینوس

$a_n \cos nx$, $n=2$, $a_n \to a_2$

$$\begin{cases} a_0/2 = 1/2 \\ a_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\boxed{\text{بقیه ضرایب صفرند}}$

* اگر تابع مثلثاتی نبود یا ثابت نبود ⟸ اصلا کاری به این روش نداریم
↲ فقط مخصوص مثلثاتی و ثابت است

سوال: هر مثلثاتی دیدیم، حلش کنیم؟ نه به این دسته‌بندی دقت کن!

* تابع مثلثاتی
- بازه تعریف دارد ⟸ بازه‌ی تعریف (تفاوت تصغیر) مضرب صحیحی از تناوب ذاتی باشد، به روش های مثلثاتی می‌توان سری فوریه را بدست آورد.
- بازه تعریف ندارد : همواره به روش های مثلثاتی، می‌توان سری فوریه را بدست آورد.

* مثال قبل ⇒ تناوب تصنعی $=1\pi$ ، تناوب ذاتی $=2\pi$ ⇒ می‌شه!

$f(x)=\cos x,\ 0<x<\pi$ تصنعی $=\pi$ ، ذاتی $=2\pi$ ⇒ نمی‌شد!

* برق ۷۶/ در نمایش سری فوریه مثلثاتی $f(t)=\sin^2 t\cos 2t$ (با پریود 2π)

به شکل $\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nt+b_n\sin nt$ داریم:

۱) $a_0=-\frac{1}{4}$ و $a_2=\frac{1}{2}$ و $a_4=-\frac{1}{4}$

۲) $a_0=-\frac{1}{2}$ و $a_2=\frac{1}{2}$ و $a_4=-\frac{1}{4}$

۳) $a_0=4$ و $a_2=2$ و $a_4=4$

۴) $a_0=8$ و $a_2=2$ و $a_4=4$

تازه تعریف کرده ⇐ می‌رم سراغ روش‌های مثلثاتی

هرجا توان دیدی حذف
هرجا حاصلضرب دیدی ⇐ حاصلجمع

$$\frac{1-\cos 2t}{2}\cos 2t=\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}\cos^2 2t$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}}_{a_2}\cos 2t\underbrace{-\frac{1}{4}}_{\frac{a_0}{2}}\underbrace{-\frac{1}{4}}_{a_4}\cos 4t$$

نکته: هرجا توی گزینه‌ها، تعداد ضرایب سری فوریه محدود داشت، حتماً به روش‌های مثلثاتی حل می‌شود!

* مثال : مکانیک ۷۹ ابزار دقیق ۹۰

سری فوریه تابع $f(x)=4\sin x\cos^2 x$ کدام است؟

۱) $3\sin x+3\cos 3x$ ۲) $2\sin x+2\sin 3x$

۳) $\sin x+\cos 3x$ ۴) $\sin x+\sin 3x$ ✓

$$f(x)=4\sin x\,\frac{1+\cos 2x}{2}=2\sin x+\underbrace{2\sin x\cos 2x}_{\sin 3x-\sin x}=\sin x+\sin 3x$$

* با عددگذاری هم می‌شه گزینه رو حدس زد؛ ضرایب محدود باشند

بین گزینه ۲ و ۴

$f(0)=0$ ۱ غ

۲ می‌تونه درست باشه

۳ هم غلط

۴ می‌تونه درست باشه

$\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ۲ غ ۴ درست

* تقارن نیم موج - کسینوسی یا سینوسی فرد - نیم دامنه - همگرایی یا واگرایی سری فوریه

مشتق‌گیری / انتگرال‌گیری سری فوریه

تا ابتدای محاسبه سری‌ها با استفاده از سری فوریه

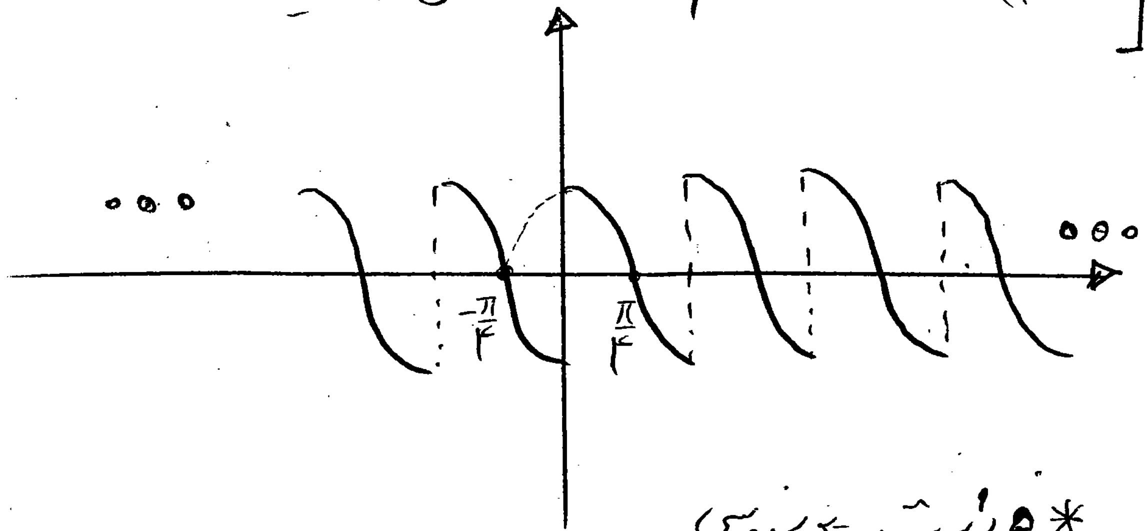
* ریاضی مهندسی - ۹۲,۴,۲۱ - جلسه‌ی دوم

* وظایف ۹): سری فوریه تابع $f(x)=\cos(2x)$ ، $0<x<\frac{\pi}{2}$ با دوره تناوب $\frac{\pi}{2}$ چگونه است؟

۱) سینوسی ۲) سینوسی کسینوسی ۳) کسینوسی ۴) سری فوریه ندارد

به بازه نگاه می‌کنیم ← اگر متقارن بود ← ضابطه
← اگر متقارن نبود ← شکل سری فوریه را رسم می‌کنیم!

شکل تابع در بازه‌ی مورد نظر رسم ← تکرار : شکل سری فوریه



* فرد است ← سینوسی

سینوسی ← فرد
کسینوسی ← زوج
سینوسی کسینوسی ← نه زوج، نه فرد

$T=\frac{\pi}{2} \Rightarrow (-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$ قرینه رو به بالا = زوج ⇐ پس فرد است

* توی سایت: ۱۲ صفحه راجع به توابع زوج و فرد! دانلود کنین! m_karimi.ir

*سراسری ۷۰) اگر تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف شده باشد، آنگاه سری فوریه $f(t)$ عبارت است از:

$$f(t)=\begin{cases} t & , \ 0<t<1 \\ 2-t & , \ 1\leq t<2 \end{cases} \quad , \quad f(t+2)=f(t)$$

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$

۲) $\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos(2k-1)\pi t$ ✓

۳) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\pi t)$

۴) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$

* روش کلی: ۱) تشخیص دوره تناوب ⇐ ۹۹ درصد تستها ⇐ بازه تعریف = دوره تناوب

۱ درصد ← راهنمایی عمومی!

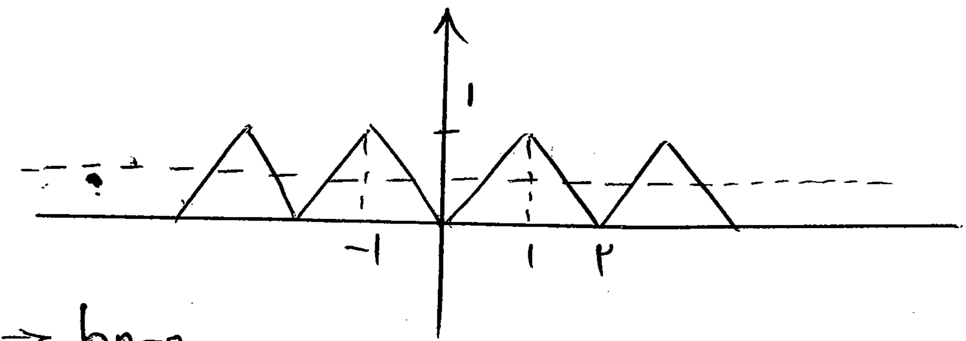
۲) تشخیص زوج یا فرد بودن بسط: اول ← بازه نگاه ← متقارن ← ضابطه ← زوج ← زوج / فرد ← فرد / نه زوج نه فرد ← نه زوج نه فرد

← نامتقارن ← رسم شکل سری فوریه ← زوج ← زوج / فرد ← فرد / نه زوج نه فرد ← نه زوج نه فرد

بازه متقارن نیست ⇐ رسم شکل سری فوریه!

$T=2 \rightarrow h=1$

$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$



تابع زوج $\Rightarrow b_n=0$

$\frac{a_0}{2}=$ ثابت فوریه $=$ مقدار متوسط $=$ dc تابع $=$ $\dfrac{\text{جمع جبری مساحت در یک دوره}}{T}$

$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$

اگر در یک دوره تناوب شکل مثلث داشته باشیم: $\frac{a_0}{2}$ خطی است که بر ارتفاع عمود است و ارتفاع را نصف می‌کند.

10

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{h}\displaystyle\int_0^h f(x)\cos\frac{n\pi}{h}x\,dx \\ h=1 \end{cases} \Rightarrow a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 t\cos n\pi t\,dt = \left(\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi^2}\right)\times(-2)$$

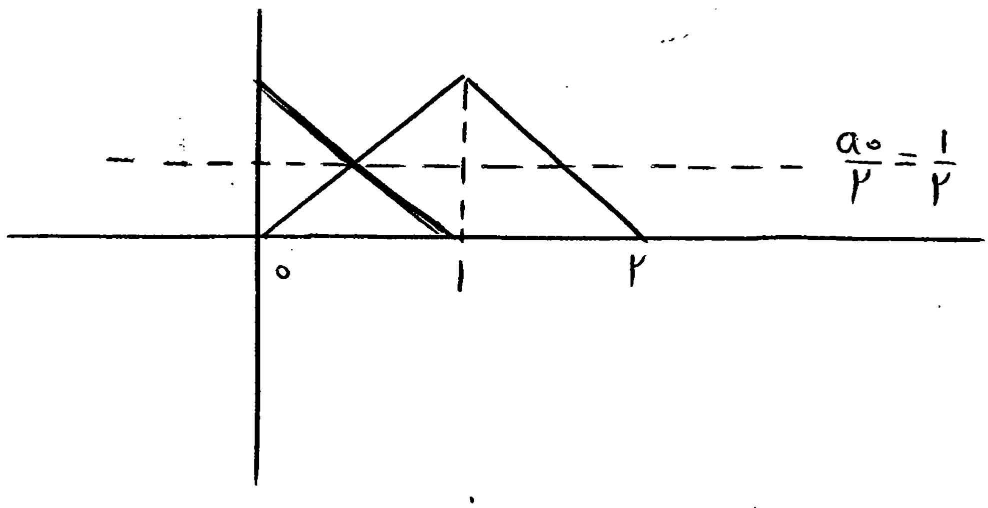
هرجا اینطوری بشه مقدار دهی می‌کنیم یعنی یه بار n زوج و یه بار n فرد!

$$\begin{cases} n=2k \Rightarrow a_n = 0 \\ n=2k-1 \Rightarrow a_n = \dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi^2} \end{cases} \Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & , n=2k \\ \dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi^2} & , n=2k-1 \end{cases}$$

* اگر قرینه‌ی نیم پریود اول نسبت به $\frac{a_0}{2}$ بدست آوردیم و به اندازه‌ی نیم پریود به سمت راست جابه‌جا کنیم در صورتیکه بر نیم پریود دوم منطبق گردد، سری فوریه فقط شامل هارمونیک های فرد است.

$a_n \to a_1, a_3, \dots$

$b_n \to b_1, b_3, \dots$



گزینه ۱ ⇐ هم فرد وجود دارد هم زوج

گزینه ۲ ⇐ کار هر چی بدی ⇐ فقط کسینوس های فرد ✓

گزینه ۳ ⇐ هم فرد و هم زوج

گزینه ۴ ⇐ هم زوج و هم فرد

[هیچ وقت خودمون تصمیم نمی گیریم از چه روشی بریم. سوال به جای ما از چه روشی حل کن!
پس از گزینه ها اگه دیدیم حداقل یکیشون زوج یا فرد نداره میشه از این روش استفاده کرد.]

* تست ۷۱ (ص ۳۲) هرگاه $F(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<2\pi\\ -\sin x, & -2\pi<x<0\end{cases}$ و $f(x+4\pi)=f(x)$ آنگاه

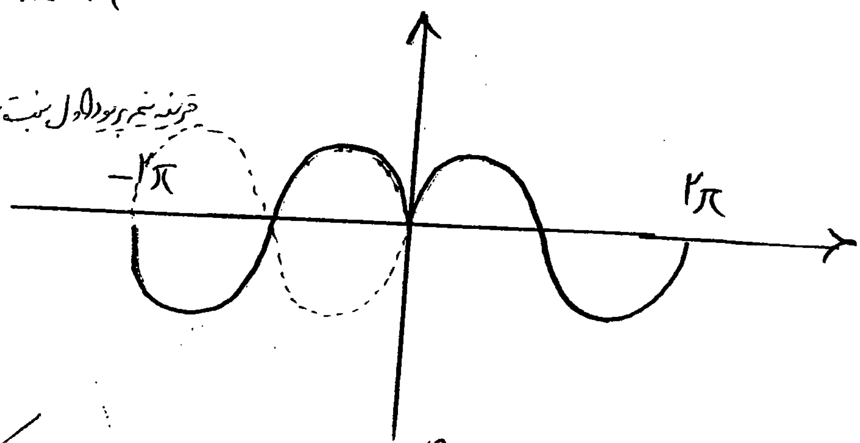
در سری فوریه $f(x)$ فقط ضرایب جملات زیر ممکن است غیر صفر باشد.

۱) زوج کسینوسی × ۲) فرد کسینوسی ✓ ۳) زوج سینوسی × ۴) فرد سینوسی ×

$T=4\pi$

قرینه نیم پریود اول نسبت به $\frac{a_0}{2}$

زوج است



هر وقت تابع چند ضابطه ای: برای تشخیص زوج و فرد بودن تابع: رسم شکل تابع

زوج $b_n=0$ $\xRightarrow{b_n\ \text{سینوسی!}}$ ۳ و ۴ حذف

$\frac{a_0}{2}=0$ جمع سری صاف شد!

تو ریاضی مهندسی هیچوقت سعی و خطا انجام نمی‌دیم!

هر کاری که انجام میدیم حداقل یه گزینه رو رد می‌کنیم!

سری فوریه فقط شامل هارمونیک‌های فرد است:

$$a_n \begin{cases} \rightarrow a_{2k}=0 \Rightarrow \text{حذف} \\ \rightarrow a_{2k-1}\neq 0 \Rightarrow \text{فرد کسینوسی} \end{cases}$$

سراسری ۷۷) اگر در یک پریود

$$f(t)=\begin{cases} -t-3 & -3\leqslant t\leqslant -2 \\ -1 & -2\leqslant t\leqslant -1 \\ t & -1\leqslant t\leqslant 1 \\ 1 & 1\leqslant t\leqslant 2 \\ -t+3 & 2\leqslant t\leqslant 3 \end{cases}$$

در سری فوریه تابع

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{3}\right)$$

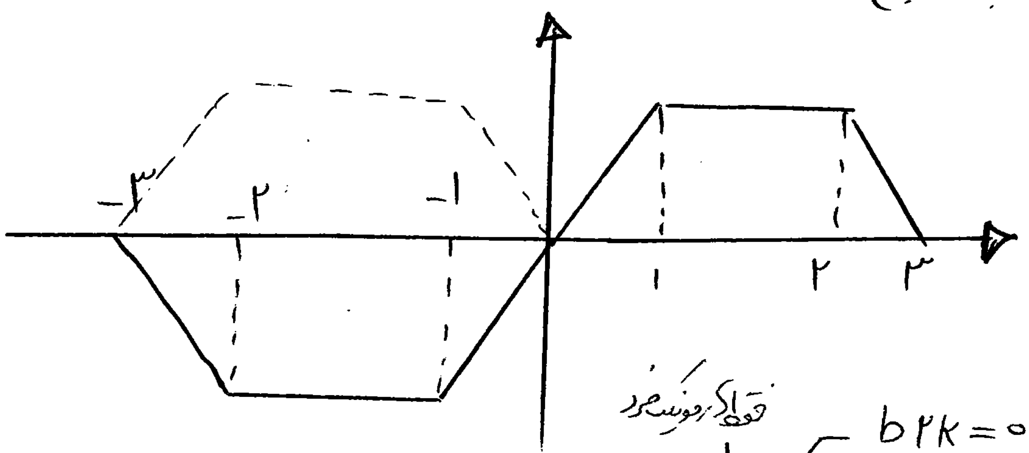
۱) a_n و n فرد ✗ ۲) a_n و n زوج ✗

۳) b_n و n زوج ✗ ۴) b_n و n فرد ✓

$T=6 \longrightarrow h=3$

متقارن است ⇐ نیازی به شکل سری فوریه نداریم!

اما چون تابع چند ضابطه‌ای است بهتر است برای تشخیص زوج و فرد بودن شکل تابع را رسم کنیم



فقط هارمونیک فرد

$$b_n \begin{cases} b_{2k}=0 \quad \times \text{ گزینه ۳} \\ b_{2k-1}\neq 0 \quad ✓ \text{ گزینه ۴} \end{cases}$$

f فرد $\rightarrow a_0=a_n=0 \Rightarrow$ گزینه ۱ و ۲ غلط

اگر در سط $f(x)$ ، $\frac{a_0}{2}=0$ و سط فوریه فقط شامل هارمونیک های فرد باشد، آنگاه داریم :

الف) سط فوریه نه زوج باشد نه فرد (تقارن نیم موج)

$$\begin{cases} a_{2n}=0 \quad , \quad a_{2n-1}=\frac{2}{L}\int^{L} f(x)\cos(2n-1)\frac{\pi}{L}x\,dx \\ b_{2n}=0 \quad , \quad b_{2n-1}=\frac{2}{L}\int^{L} f(x)\sin(2n-1)\frac{\pi}{L}x\,dx \end{cases}$$

ب) سط فوریه تابع زوج یا فرد باشد (تقارن ربع موج)

سط فرد باشد $\Rightarrow \begin{cases} a_n=0 \\ b_{2n}=0 \;,\; b_{2n-1}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\sin(2n-1)\frac{\pi}{L}x\,dx \end{cases}$

سط زوج باشد $\Rightarrow \begin{cases} b_n=0 \\ a_{2n}=0 \;,\; a_{2n-1}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\cos(2n-1)\frac{\pi}{L}x\,dx \end{cases}$

نکته ⇐ در مبحث سری فوریه ها هر تقارنی باعث می شود یک سری از ضرایب سری فوریه صفر شوند و از ناحیه ی خودشون، انتگرال شون دو برابر می شه و حدود انتگرال شون تقسیم بر ۲ می شه

زوج بودن $\Longrightarrow \begin{cases} b_n=0 \\ a_n=\overset{\frac{1}{L}\times 2}{\frac{2}{L}}\int_{0 \to \frac{0}{2}=0}^{L \to \frac{2L}{2}=L} \end{cases}$

فرد بودن $\Rightarrow \begin{cases} a_0=a_n=0 \\ b_n=\overset{\frac{1}{L}\times 2}{\frac{2}{L}}\int_{0 \to \frac{0}{2}}^{L \to \frac{2L}{2}=L} \end{cases}$

تقارن گردونیک فرد

$$\begin{cases} a_{2n}=0 \text{ و } b_{2n}=0 \\ a_{2n-1},\ b_{2n-1} = \text{ضریب} \times 2,\ \dfrac{\text{حدود انتگرال}}{2} \end{cases}$$

نه زوج نه فرد → $\times 2 \quad \frac{2}{L}\int_{0}^{L} \to \frac{2L}{2},\ \frac{0}{2}$

زوج $b_{2n-1}=0$ → a_{2n-1} $\times 2 \quad \frac{4}{L}\int_{0}^{\frac{L}{2}} \to \frac{L}{2},\ \frac{0}{2}$

فرد $a_{2n-1}=0$ → b_{2n-1} $\times 2 \quad \frac{4}{L}\int_{0}^{\frac{L}{2}} \to \frac{L}{2},\ \frac{0}{2}$

ص ۲۶

* قطعیک (۷۵

۱)

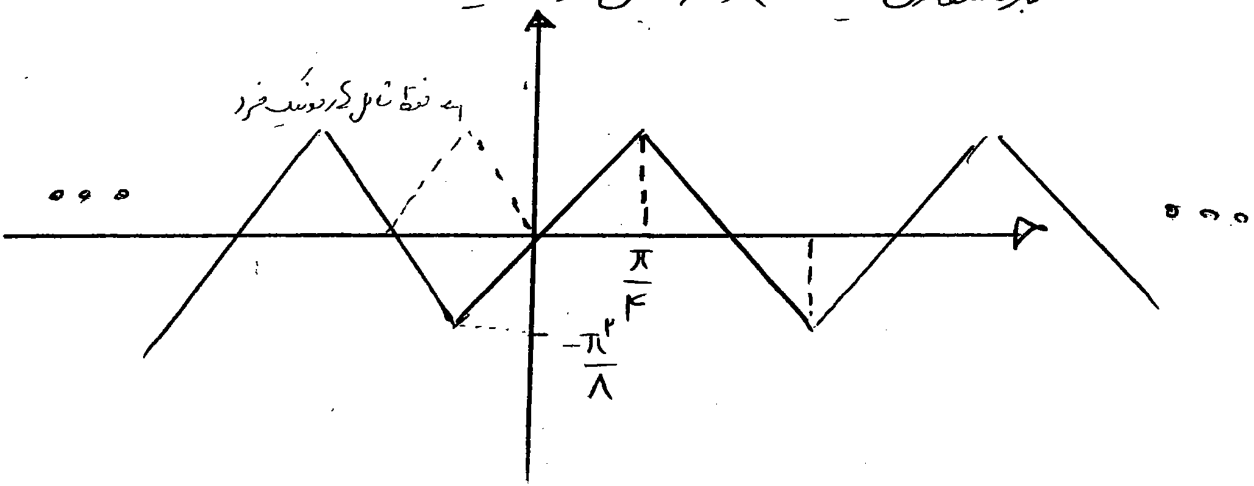
۳)

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{-(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^2}\sin(\pi t) \quad \nearrow \quad \frac{-(-1)^n}{(2n-1)^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \quad (2$$

۴) ✓

$$T = 2\pi \Rightarrow l = \pi$$

با زه متقارن نیست ⇐ رسم شکل سری فوریه!



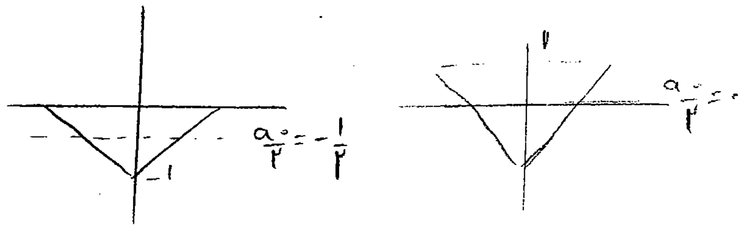
فرد $\Rightarrow a_0 = a_n = 0$

* تذکر: هرگاه در بسط فوریه شکل تابع در یک دوره مثلث متساوی الساقین باشد دو مطلب زیر همواره برقرارند:

۱) بسط فوریه همواره فقط شامل هارمونیک های فرد است

۲) مقدار متوسط تابع خطی است عمود بر ارتفاع که ارتفاع را نصف می کند (با توجه به علامت ارتفاع)

ex:



* طبق نکته فوق هم فقط شامل هارمونیک های فرد!

$$b_{2n}=0,\quad b_{2n-1}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\sin(2n-1)\frac{\pi}{L}x\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi t}{4}\sin(2n-1)t\,dt$$

$$=\frac{\overbrace{\sin(\cancel{2n-1})\frac{\pi}{2}}^{(-1)^{n+1}}}{(2n-1)^2}\Rightarrow \text{مقداردهی!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$$

$$\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} \rightarrow (-1)^{n+1}$$

به ازای یک n درستش کن، بقیش خودکار درست می‌شه! منظورم $n=1$ است!
تابعی داشتیم که ۱ داد، همون ۱ و ۱- و بشه، به $(-1)^n$ بنویس، به ازای $n=1$ درستش کن، بقیش خودبخود درسته!

توی گزینه ۲ ⇐ ... n=1,3,5 عکس در گزینه ۴ ـ جای n ← ۲n−۱ می‌گذاریم!

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\pi x\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi t}{4}\sin t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi(\pi-t)}{4}\sin\pi t\,dt\right]=0$$

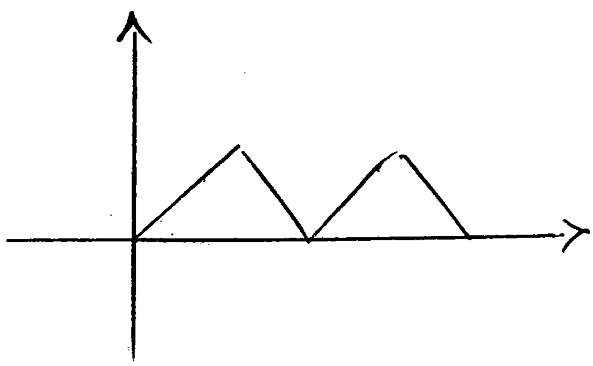
اگه تشخیص اولی رو درست داری ⇐ کل کار ساده‌تر می‌شد!

* اگر تابع در یک دوره تناوب، دو بار تکرار شده باشد ⇐ نصف تابع حرکت = منطبق ⇐ کسینوس زوج

* حالت تعمیم ← ۳ بار ← مضرب ۳ : کسینوس ۳k

۴ بار ← مضرب ۴ : کسینوس ۴k

هرگاه تابع در یک دوره دو بار تکرار شده باشد، شامل کسینوس‌های زوج است!

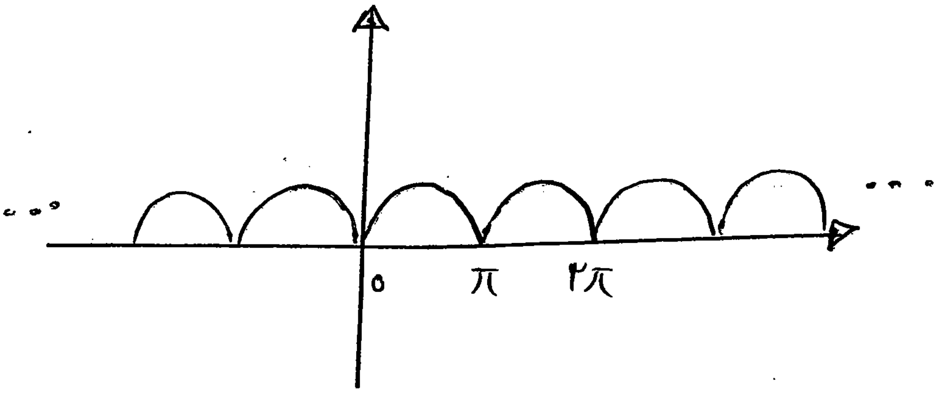


ص ۵۲ ، (دکتر ای اغراق بهنام ج)

۱) ✗ ۲) ✗

۳) ✗ ۴) ✓

$T=2\pi \Rightarrow$ بازه متقارن نیست ⟸ شکل سری فوریه رسم



$\Bigg[$ بسط فوریه تابع زوج $\Rightarrow b_n = 0$ ۲و۳ حذف

در یک دوره دوبار تکرار شده $\Rightarrow$ فقط زوج $\rightarrow$ ۱ و ۴

نکته: $T=2\pi \Rightarrow L=\pi \Rightarrow \frac{a_0}{2}+\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$

زوج $\cos 2nx$ و $\sin 2x$

اشتباه نکنیم زوجه! : $T=\pi,\ L=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{a_0}{2}+\sum a_n \cos 2nx + \sum b_n \sin 2nx$

$\Downarrow$

$\cos 4nx$ ⟸ باید این باشه که زوج باشه!

وجود $2n$ لزوماً به معنای زوج بودن نیست!

تا اول $\frac{n\pi}{L}$ را تشکیل ندهیم دیدیم به جای n ← $2n$ نداشته ⟸ اشتباه ممنوع می‌گیرد

$$\begin{cases} y=\sin^2 x \ , 0<x<2\pi \xRightarrow{T=2\pi, L=\pi \Rightarrow a_n \cos nx} y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow a_2=-\frac{1}{2} \\ y=\sin^2 x \ , 0<x<4\pi \xRightarrow{T=4\pi, L=2\pi \Rightarrow a_n \cos \frac{n}{2}x} y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow a_4=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T \to a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \\ 2T \to a_2, a_4, a_6, \dots \end{cases}$$

* سری فوریه یکی است، تنها تفاوت در تمام ضرایب فرق دارند!

$$\begin{cases} y=|\sin x| \ , 0<x<\pi \ , \ a_1, a_2, a_3, \dots \\ y=|\sin x| \ , 0<x<2\pi \ , \ a_2, a_4, a_6, \dots \end{cases}$$

* اینجا هم سری فوریه ها یکی هستند اما ضرایب فرق دارند!

که منظور همون اندیس ضرایب است!

a_n همواره نسبت به n تابعی زوج است یعنی $a_{-n}=a_n$

b_n همواره نسبت به n تابعی فرد است یعنی $b_{-n}=-b_n$

۹۸ درصد وقت‌ها:

- x^{2k} زوج
- x^{2k-1} فرد
- $\sin x$ فرد
- $\cos x$ زوج

زوج + زوج = زوج

فرد + فرد = فرد

زوج + فرد = نه زوج، نه فرد

زوج × زوج = زوج

فرد × فرد = زوج

زوج × فرد = فرد

– مثل + است!

÷ مثل × است!

$x^2+x \Rightarrow$ نه زوج نه فرد

$x+1 \Rightarrow$ نه زوج نه فرد

$1 = x^0 =$ زوج

$a_n = \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{x^2}$ زوج

$a_n = \frac{1}{n} \sim \frac{1}{x}$ فرد $\Rightarrow$ کاملاً غلط است!

نسبت به n مثل عدد ثابت است! کاری به n نداریم!

** اثبات: $a_n = \frac{1}{L}\int_{(T)} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx$

برحسب n، زوج است

پس a_n هم بایستی زوج باشد!

ص ۳۲

طباطبایی (۸۴

۱) ✗

۲) ✓

۳) ✗

۴) ✗

$b_n = \frac{\text{فرد}}{\text{فرد}} =$ زوج $\Rightarrow$ b_n باید فرد $\Rightarrow$ گزینه ۱ غلط است

$b_n = \frac{\sin = \text{فرد}}{n = \text{فرد}} =$ زوج $\Rightarrow$ گزینه ۴ غلط است ؛ چون b_n باید فرد باشد

$a_n = (\text{فرد} + \text{زوج}) =$ نه زوج نه فرد $\Rightarrow$ a_n باید زوج باشد $\Rightarrow$ گزینه ۳ غلط است

Sin( )   1

(دکتری ای انرژی به خارج مهندسی برق و پزشکی)

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✗

۴) ✓

۱) غ $\Rightarrow$ a_n باید زوج باشد $\Rightarrow$ $a_n = \frac{1}{\underbrace{2n}_{\text{زوج}} - \underbrace{1}_{\text{فرد}}}$ $\Leftarrow$ نه زوج نه فرد

۲) غ $\Rightarrow$ b_n باید فرد $\Rightarrow$ نه زوج نه فرد = زوج + فرد $b_n = \frac{1}{2n+1}$

۳) غ $\Rightarrow$ b_n باید فرد $\Rightarrow$ زوج = زوج + زوج $b_n = \frac{1}{\underbrace{4n^2}_{\text{زوج}} - \underbrace{1}_{\text{زوج}}}$

* مکانیک ۱۱۲) اگر F تابعی با دوره تناوب 2π (حل دوم)

۱) ✗ ✗

۲) ✗ ✗

۳) ✓ ✓

۴) ✗ ✗

✗ گزینه ۱ غ $\Rightarrow$ a_n باید زوج $\Leftarrow$ فرد $\Leftarrow$ $\frac{1}{m}$

گزینه ۲ می‌تونه درست باشه! $(-1)^m = (-1)^{-m}$

$(-1)^m$: $n = 2 \to 1$، $n = -2 \to 1$ $\Rightarrow$ زوج است $\Rightarrow$ $\frac{(-1)^m}{m}$ زوج/فرد = فرد

$a_{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)^2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ زوج: گزینه ۳ هم می‌تونه درست باشد

✗ گزینه ۴ غلط است ← غلط b_n باید فرد $\Leftarrow$ زوج $\Leftarrow$ $b_n = \frac{1}{n^2}$ $\Leftarrow$ $b_{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)^2}$

*نکته

$$n \begin{cases} \to k \\ \to -k \end{cases} \Rightarrow$$

- پاسخ ها کسینوسی ⇐ زوج
- پاسخ ها سینوسی ⇐ فرد
- به غیر از موارد فوق ⇐ نه زوج نه فرد!

ex: $\sum \frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx$

$a_n=\frac{1}{n^2}$ ✓ $\quad b_n=\frac{1}{n}$ ✓

ادامه حل سؤال ⇐

حالا بین ۲، ۳ ⇐

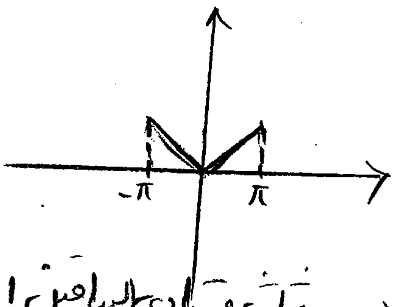
$f(x)=|x| \xrightarrow{\text{زوج است}}$ سط فوریه زوج است

* سط فوریه زوج $\Rightarrow b_n=0 \Rightarrow$ گزینه ۲ غلط است ✗

روش دوم

حل سؤال با استفاده از گزینه ها؟

$T=2\pi$



[گزینه ۲ و ۳ و ۴ ⇐ $b_n=0$ ← تابع زوج است ✗

گزینه ۱ و ۴ ⇐ کسینوسی فقط فرد ✗

(m فقط باید فرد باشد)

↲ در یک دوره = مثلث متساوی الساقین!

* سؤال مکانیک ۷۵
ص ۲۶

$$(-1)^{\frac{n+1}{2}} \begin{cases} n=1 \Rightarrow -1 \\ n=-1 \Rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow \text{فرد}$$

گزینه ۴ ← درست است

$$\frac{\text{فرد}}{\text{زوج}} = \text{فرد} = b_n$$

* گزینه ۳ ⇐ $\frac{1}{n^2}$ = زوج ⇐ b_n باید فرد ⇐ غلط!

گزینه ۱ ⇐ $-\frac{1}{n^2}$ = زوج ⇐ b_n باید فرد ⇐ غلط

گزینه ۲ ⇐ $-\frac{1}{n}$ = فرد ⇐ با این روش حذف نمی‌شود!

---

* بسط نیم دامنه:

تعریف تابع در نصف دامنه، تعریف نامعلوم ← سری فوریه!

طرح چنین سؤالی غلط است!

پس مفهوم این نیست که نصف دامنه‌ی تابع معلوم است!

نصف دامنه تابع ← زبان ریاضی | می‌شه سری فوریه نوشت؟ بله!
نصف دیگه ← داستان

داستان تعریف شده می‌تونه هر چیزی باشه؟ نه!

دو حالت دارد:
→ نصف دامنه تعریف و در صورت سؤال بگه زوج! ← قرینه نسبت به محور y!
→ نصف دامنه تعریف و در صورت سؤال بگه فرد! ← قرینه نسبت به مبدأ!

منظور از نیم دامنه همینه! نصف دامنه با تعریف ریاضی، نصف دامنه با کلمه‌ی زوج و فرد می‌آد!

سؤال طلایی: از کجا بفهمیم منظور طراح سؤال "نصف دامنه" یا "کل دامنه" است؟

سط نیم دامنه :

- سط نیم دامنه همواره دو ویژگی زیر را دارا است :

۱) دامنه‌ی تعریف تابع باید در بازه‌ی $[0, h]$ باشد

$$\begin{cases} y=f(x), & 1<x<3 \quad \times \\ y=f(x), & -1<x<5 \quad \times \\ y=f(x), & -1<x<1 \quad \times \end{cases}$$

۲) حتما در صورت سؤال به زوج یا فرد بودن سط اشاره شده باشد !

۱) سط فوریه تابع $f(x)=\cos x \,,\, 0<x<\pi$ را بدست آورید. تمام دامنه ⟵ $T=\pi,\ h=\frac{\pi}{2}$

۲) سط کسینوسی تابع $f(x)=\cos x \,,\, 0<x<\pi$ را بدست آورید $\xleftarrow{\text{نیم دامنه}}$ $h=\pi$

ویژگی ۲ ، ویژگی ۱

*ex سط سینوسی $-\pi<x<\pi \,,\, f(x)=x$ را بدست آورید ⟸ تمام دامنه

$T=2\pi$

ویژگی ۲ را دارد ، ویژگی ۱ را ندارد

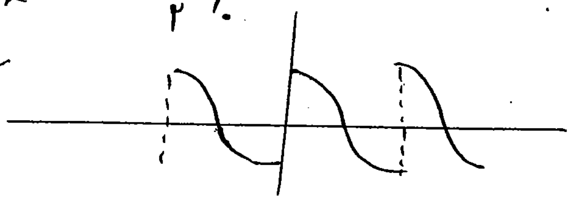
برای محاسبه‌ی سط نیم دامنه، دیگه رسم شکل سری دوره لازم نیست ⟸ چون خودش زوج، فرد بودنو به ما گفته! پس بحث نیم دامنه‌ها از ترازو کم دامنه‌است.

*مثال) بسط سینوسی تابع $f(x)=\cos x \,,\, 0<x<\frac{\pi}{2}$ را بدست آورید ⟸ نیم دا

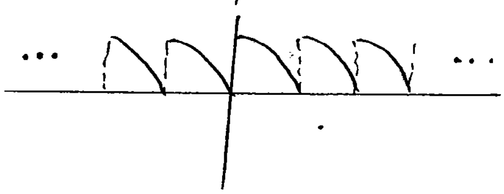
ویژگی ۲ ، ویژگی ۱

$$\begin{cases} \text{تابع فرد} \Rightarrow a_0=a_n=0 \,,\quad h=\frac{\pi}{2} \\ b_n=\frac{2}{h}\int_0^h f(x)\sin\frac{n\pi}{h}x\,dx=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\sin 2nx\,dx=\dots \end{cases}$$

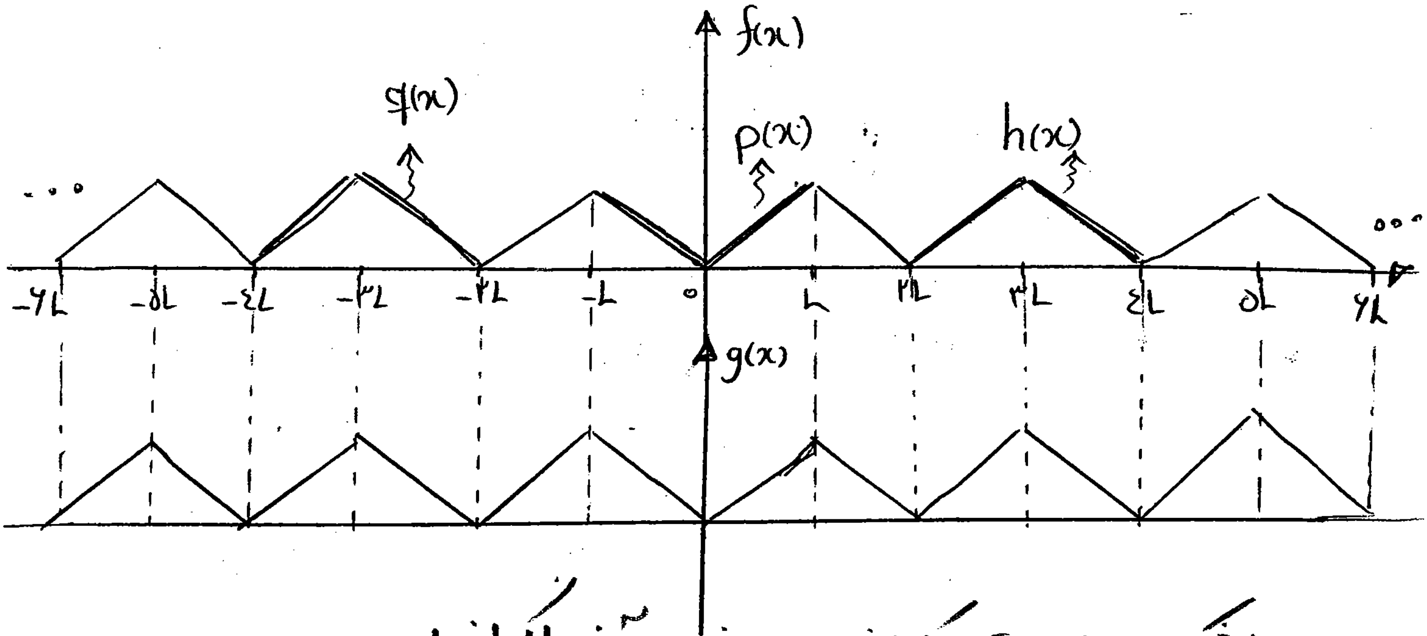
شکل نیم دامنه



شکل تمام دامنه



با رسم شکل سری فوریه نشان دهید سط فوریه‌ی تابع $f(x)=\begin{cases} x & ,0<x<L \\ 2L-x & ,L<x<2L \end{cases}$ با سط فوریه
کسینوسی تابع $g(x)=x \;,\; 0<x<1$ یکسان است.
(درجه ۲)



* شکل سری فوریه‌ی دو تابع یکسان ⇐ سری فوریه آن‌ها یکسان!

$q(x)=\begin{cases} x+4L & ,-4L<x<-3L \\ -2L-x & ,-3L<x<-2L \end{cases} \;,\; p(x)=\begin{cases} -x & ,-L<x<0 \\ x & ,0<x<L \end{cases} \;,\; h(x)=\begin{cases} x-4L & ,4L<x< \\ 6L-x & ,5L<x<6L \end{cases}$

* پس اصلی‌ترین دلیل که دنبال سط نیم دامنه هستیم ⇐ ساده‌نویسی ⇐ در محاسبات کار را راحت می‌کند

تابع زوج ⇒ $\left[\begin{array}{l} b_n=0 \\ a_0=\frac{2}{L}\int_0^L x\,dx \;,\; a_n=\frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\cdots \end{array}\right.$

تو همشون از ۰ تا L ⇐ تابع با x برابر است!

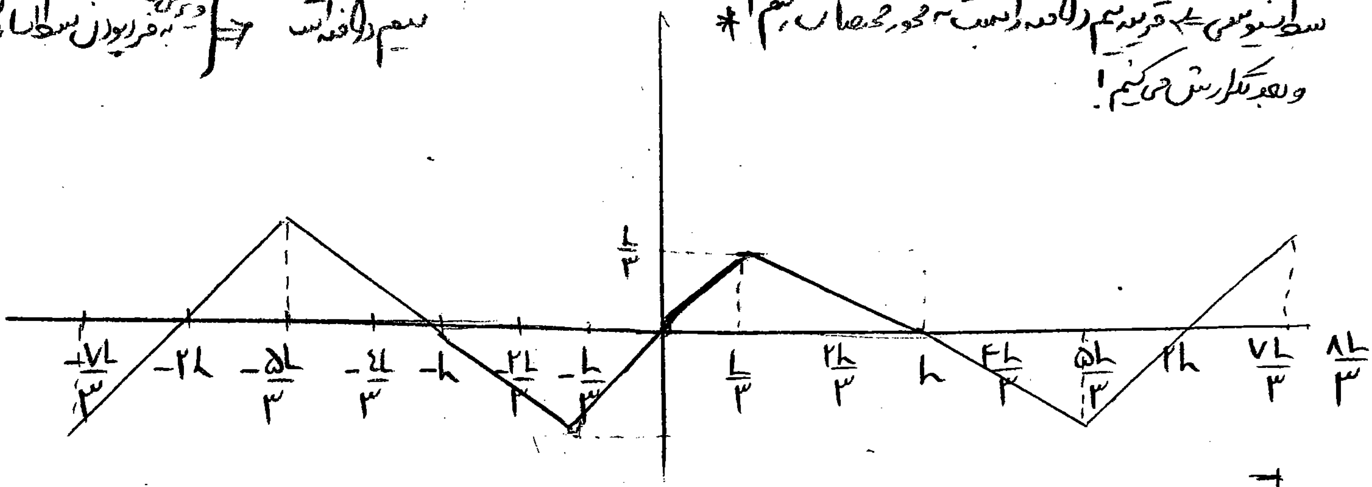
* پس دیدیم یه ساده‌ترشون همان نیم دامنه بود ⇐ $g(x)$

* همین به نیم دامنه بود داره!

* هر سط زوج و فرد تمام دامنه‌ای ⇐ می‌شه یه نیم دامنه براش نوشت!

* سطر اینو می‌بینی ← قرینه نیم دامنه نسبت به محور مختصات رسم!
و بعد تکرارش می‌کنیم!

نیم دامنه است ⇐ { ویژگی ۱ : > 0 ، ویژگی ۲ : به فرد بودن سطر اشاره



۱ غ است ⇐ « $\frac{L}{3}$ باید $-\frac{L}{3}$ باشد!

۲ غ است ⇐ $-\frac{L}{3} \to -\frac{L}{3}$ ✓ و $0 \to 0$ ✓ و $-\frac{L}{3} \to L$ × باید $-\frac{L}{3}$ باشد

۳ غ است ⇐ غ است
$L \to 0$ ✓
$\frac{5L}{3} \to -\frac{L}{3}$ ✓
$\frac{5L}{3} \to \frac{5L}{3}$ ×

۴ درست است ← $L \to 0$ ✓ ، $\frac{5L}{3} \to -\frac{L}{3}$ ✓

* سؤال اشتباه علمی دارد!

جزوه باما

تست ۳۰

(برق ۸۵) هرگاه $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ باشد، حاصل $\int_0^{\pi} f(x)\sin^3 x\,dx$

کدام گزینه است؟

۱) صفر ۲) $\frac{3\pi}{8}$ ۳) $\frac{3\pi}{16}$ ۴) $\frac{13\pi}{36}$ ✓

$a_0=a_n=0 \Rightarrow$ فرد $f(x)$ و $L=\pi$ ⇐ $\frac{n\pi}{L}=n \Rightarrow L=\pi$

$b_n=\frac{1}{n^2}$

فرد $f(x) \Rightarrow b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

* اگر انتگرالی خواستند که توش یک تابع مجهول وجود داشت ⇐ باید برحسب انتگرالهای معلوم سعی کنید بنویسید

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{\pi}{2}b_n$$

* حالا مثلاً اگه توی سوال خواسته بود ⇐ $\int_0^{\pi} f(x)\sin 5x\,dx=\frac{\pi}{2}b_5=\frac{\pi}{50}$

حالا حل خودمون ⇐

$$\sin^3 x=\sin^2 x.\sin x=\frac{1-\cos 2x}{2}\sin x=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\underbrace{\sin x\cos 2x}_{\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin x}=$$

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

$$I=\frac{3}{4}\int_0^{\pi}\underbrace{f(x)\sin x}_{\frac{\pi}{2}b_1}\,dx-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\underbrace{f(x)\sin 3x}_{\frac{\pi}{2}b_3}\,dx$$

$$=\frac{3\pi}{8}b_1-\frac{\pi}{8}b_3=\left(\frac{3\pi}{8}\times 1\right)-\left(\frac{\pi}{8}\times\frac{1}{9}\right)=\frac{\pi}{8}\left(3-\frac{1}{9}\right)=\frac{\pi}{8}\times\frac{26}{9}=\frac{13\pi}{36}$$

کامپیوتر ۹۲) ضرایب بسط فوریه $f(x)$ با دوره تناوب 2π بصورت $\left(\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}, a_n=\frac{2}{n}, b_n=\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ است. جمله مستقل از x در سری فوریه تابع $g(x)=f(x)\sin^2 x$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) صفر ✓ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin^2 x\,dx$$

پاسخ

برای $f(x)$ ها:

$$\begin{cases}\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx\end{cases}$$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\frac{1-\cos 2x}{2}=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}f(x)\,dx}_{\frac{1}{2}\times\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx}_{\frac{a_0}{2}}}-\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}f(x)\cos 2x\,dx}_{-\frac{1}{4}\times\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos 2x}_{a_2}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{a_0}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}\times a_2\right)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}\times 1\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

* تا صفحه‌ی ۴۶ درس را هم بخونید! ☺

* انتهای سری فوریه بخونید! : پیش مطالعه

صفحه ۱۳ - تست ۲۸

(سراسری ۸۸) هرگاه $f(x)$ تابعی زوج باشد، ویژگی ۲ . به ازای $f(x) = \underbrace{x}_{f_1} + \underbrace{\cos 2x}_{f_2}$

$\pi \geqslant x \geqslant 0$ ویژگی ۱، آنگاه در سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[-\pi, \pi]$

ضریب $\cos 2x$ کدام است؟

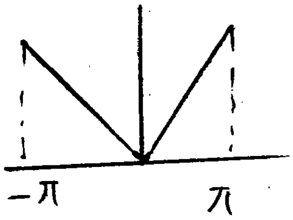
۱) ۰ ۲) ۱ ✓ ۳) $1 - \frac{1}{2\pi}$ ۴) $1 + \frac{1}{2\pi}$

بحث نیم دامنه است ⇐ ویژگی ۱ و ویژگی ۲ را دارد!

$l = \pi \Rightarrow a_n \cos nx \Rightarrow a_2 = ?$

بجای a_2 کلی اول a_2 برای x پیدا می‌کنیم بعد a_2 برای $\cos 2x$ و بعد با هم جمع می‌کنیم!

برای f_1 :



$\Rightarrow a_2 = 0$

$\xrightarrow{f_1 + f_2} a_2 = 0 + 1 = 1$

برای f_2 : $\underset{\text{دوره تناوب} = 2\pi}{\cos 2x} \rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ \text{سایر ضرایب} = 0 \end{cases}$

چون تقطیعی مضرب ۲ از ذاتی است به روش مثلثاتی

روش ۱) هر وقت روش مثلثاتی نوشتیم، از توان یا ضرب نداشته باشه جواب خودش. چون ما اینجا کاری به توان و روش کلی مثلثاتی انجام دادیم، تواند حذف و ضرب به جمع تبدیل بشود

روش ۲) خودش جزء درستش جلوش میونه! $a_2 = 1 \times \cos 2x$

جواب اول سوال: در صورت تست سعی که با بی تعریف دو ... دارد. اشتباه طراح ... را داده ۱۰ صفحه توضیح داده!

روش کلی همیشه جواب می‌دهد!

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\cos^2 x)\cos nx\,dx$$

منطق حکم می‌کند اول ۲ بذاریم ← بعد حل کنیم

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\cos^2 x)\cos 2x\,dx=\dots=1$$

* روش اول کوتاه‌تر بود! اما همیشه روش کلی رو هم بخاطر داشته باش!

نکته‌ی زیبای این سؤال: داده‌ها را در نیم دامنه داده و پرسش را در تمام دامنه پرسیده!
کسی می‌تونه به این سؤال پاسخ بده که مفهوم نیم دامنه را درک کرده باشد!

کنکور ۹۲) سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $0<x<L$, $f(x)=x(L-x)$ کدام است؟

۱) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{L^2}{(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{l}$ ✗

۲) $\frac{l^2}{4}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)$ ✗

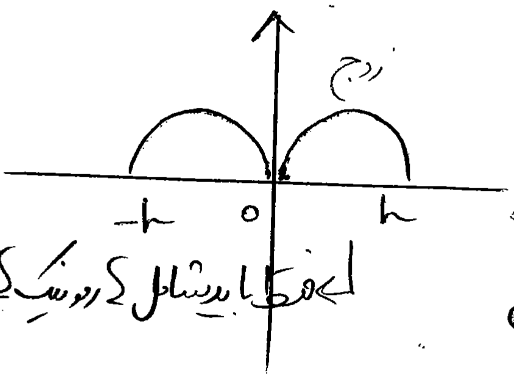
۳) $\frac{L^2}{6}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{L}$ ✓ (زوج)

۴) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}$ ✗ (فرد)

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L(xL-x^2)\,dx=\frac{2}{L}\left(\frac{x^2}{2}L-\frac{x^3}{3}\right)_0^L=\frac{2}{L}\left(\frac{L^3}{2}-\frac{L^3}{3}\right)=\frac{L^2}{3}$$

۱ و ۲ غ

$$\frac{a_0}{2}=\frac{L^2}{6}$$



سری تنها زوج است!

چون در یک دوره ۲ بار تکرار شده ← فقط باید شامل کسینوس‌های زوج باشد!

$a_n\cos\frac{n\pi}{l}$

(همه ی آنرینه ها لا یده می گیریم : توجه)

* از روی سریها اول فهمیدم باید $\frac{a_0}{2}$ حساب کنم

* همگرایی ضرایب فوریه

دنباله های a_n و b_n، دنباله های همگرا به صفر هستند.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

گزینه ها به ما کمک می کند! هر جا دیدی حد a_n و b_n وقتی n میره صفر نشد اون گزینه غلط!

(برق ۷۰) تست ۲۰ اگر تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف شده باشد آنگاه سری فوریه $f(t)$ عبارتست از:

$$f(t)=\begin{cases} t & , \quad 0\le t<1 \\ 2-t & , \quad 1\le t<2 \end{cases}$$

$$f(t+2)=f(t)$$

۱) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos(\frac{\pi}{2}t)$ ✗

۲) $\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos(2k-1)\pi t$ ✓

۳) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(2\sin\frac{n\pi}{2})\cos(n\pi t)$ ✗

۴) $\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2})\cos\frac{n\pi}{2}t$ ✗

$T=2 , h=1 \Rightarrow a_n \cos n\pi t$ $\Rightarrow$ گزینه ۴ غلط است.

داشتن عبارتی مثل $\left\{\begin{array}{l} 2k\pi t \\ (2k-1)\pi t \\ 4\pi t \\ \vdots \end{array}\right.$ در تستی ایراد داره

$\lim_{n\to\infty} \sin(n) =$ وجود ندارد گزینه ۳ غلط است:

* حداقل سرعت همگرایی ضرایب فوریه متناسب با $\frac{c}{n}$ است

هرچی توان مخرج بیشتر ← سرعت همگرایی بیشتر!

کمترین مقداری که توان می پذیرد، ۱ است!

$$a_n = \frac{\cancel{2}7n^2+4n+1}{9n^7+3n^2+n+1} = \frac{7n^2}{9n^7} = \frac{c}{n^5}$$

$n \to \infty$

* اگر sin و cos داشتی از آن کاملاً صرف نظر کن چون نوسانی اند و در سرعت تاثیری ندارند!

قبل در نظر شون نمی گیری!!

۲۲

هوا فضا ۸۴) کدام سری، سری فوریه تابعی انتگرال پذیر و مشتق پذیر با دوره تناوب 2π است.

حل

۱) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ ×

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$ ✓

۳) $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)\cos nx$ × $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

۴) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n-1)x}{\sqrt{n}}$ ×

* از روی درجه و فرمول ضرایب b_n, a_n هم حل می‌شه!

* قضیه

$f(x)$ ناپیوسته $\Longleftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n}$ همگرا می‌شود.

f پیوسته و f' ناپیوسته $\Longleftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^2}$ همگرا شود

($\frac{c}{n^2}$ حداقل سرعت a_n و b_n است)

f, f' پیوسته و f'' ناپیوسته $\Longleftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^3}$ همگرا شود

($\frac{c}{n^3}$ حداقل سرعت a_n و b_n است)

⋮ ⋮

$f, f', \dots, f^{(k-1)}$ پیوسته و $f^{(k)}$ ناپیوسته $\Longleftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^{k+1}}$ همگرا شود

($\frac{c}{n^{k+1}}$ حداقل سرعت a_n و b_n است)

فرق تابع هموار و پیوسته : تابع هموار: مشتقات آن پیوسته است!

تابع اول: f پیوسته و f' ناپیوسته

تابع دوم: f و f' پیوسته و f'' ناپیوسته ← از تابع اولی هموارتر است!

پس مفهوم «هموارتر» داریم!

هرچه تابع هموارتر باشد ← سرعت همگرایی بیشتر است!

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

هرچه تابع ناپیوسته‌تر ← زمان بیشتری می‌خواد تا همگرا شه!

* منظور از همگرا: شکل Σ هرچقدر به شکل اصلی تابع نزدیک‌تر شود!

حالا می‌ریم سراغ کاربرد قضیه:

① اگر شکل f و مشتقاتش و داشته باشیم، قبل از محاسبه ضرایب سری فوریه، می‌تونیم سرعت همگرایی آن را پیش‌بینی کنیم

② برعکس: خود ما که صورت سری فوریه را داریم قبل از رسم شکل می‌شه در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی آن صحبت کنیم. مثلاً: $\frac{c}{n^3}$: f پیوسته، f' ناپیوسته

۲۳ مفهوم جمله ۲: اما ضریب باشه بهتر می‌تونه شکلی او، اینه سرعتش a_n و b_n از ...

ص ۵۲

(* دکترای اعزام به خارج مهندسی برق دیزیگلی)

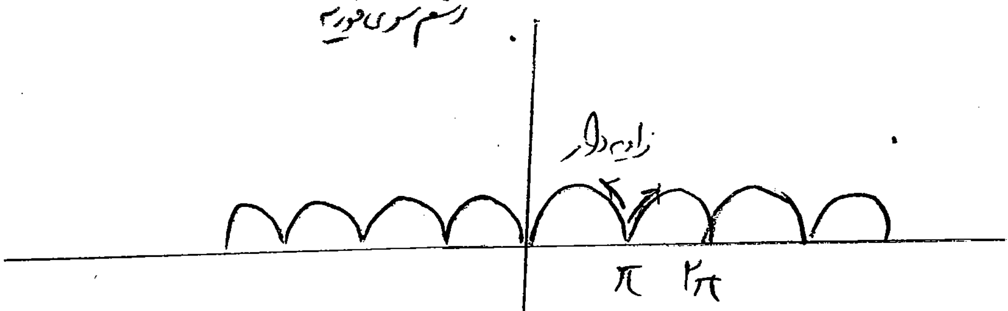
سری فوریه تابع $f(x)=|\sin x|$ و $0<x<2\pi$

۱) ✓ ۲) ✗

۳) ✗ ۴)

معیار استفاده از سرعت همگرایی ← تفاوت توان (سرعت همگرایی) ضرایب!

$T=2\pi$ و $l=\pi$ بازه متقارن نیست برای زوج در نظر بودن ↓ رسم سری فوریه



f زوج $\Rightarrow b_n=0 \Rightarrow$ حذف | گزینه ۲ و ۳

f پیوسته است!

f' ناپیوسته است (تنها معیارهای پیوستگی مشتق یک تابع پیوسته نقطه زاویه‌دار است)

نقطه زاویه‌دار داشت ⇐ f' ناپیوسته

نقطه زاویه‌دار نداشت ⇐ f' پیوسته

{در این نقطه مماس به معنی دو ندارد ⇐ دو تا نیم‌مماس داریم!}

f' ناپیوسته! ⇐ شیب مماس سمت راست ≠ شیب مماس سمت چپ : یعنی نقطه زاویه‌دار
(مشتق راست ≠ مشتق چپ)

f پیوسته و f' ناپیوسته ⇐ حداقل یکی از an یا bn باید با سرعت آن $\frac{c}{n^2}$ باشد

$b_n = 0$ ، پس حتماً an باید سرعتش $\frac{c}{n^2}$ باشد.

$\left.\begin{matrix}\text{پیوسته } f \\ \text{ناپیوسته } f'\end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n \sim \frac{c}{n^2} \Rightarrow$ گزینه‌ها حذف!

اگه اول سرعت همگرایی تست می‌کردیم ⇐ ۲ تاهم حذف!

مهم * تاکید: همیشه سرعت همگرایی را از روی شکل تشخیص می‌دهیم. شکل رو رسم می‌کنیم تا پیوستگی را بررسی کنیم

* معمولاً در سؤالات کنکور تا f' کافیه!

اگر بخواهی درمورد f'' اظهار نظر کنی باید f' رو رسم کنی! یعنی از ضابطه مشتق می‌گیری بعد رسم می‌کنی و بعد نظر می‌دهی!!!

**خودتونه که باید حل کردن سرعت همگرایی خوب با نه!!! ** *

Random تستش کن!

اگر اختلاف زیادی بین سرعت همگرایی گزینه‌ها ⇐ حل کن

اما اگر سرعت همگرایی یکسان ⇐ کار بعدی مان است!

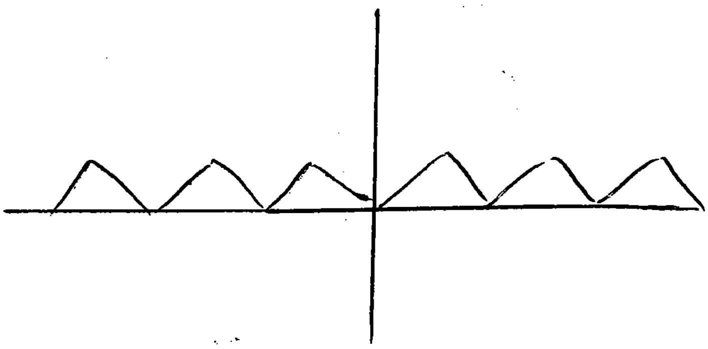
۲۴ مکانیک ۷۲ | اگر F تابعی با دوره تناوب 2π باشد که با ضابطه $F(x)=|x|$ به ازای $x\in[-\pi,\pi]$ تعریف شده است. آنگاه سری فوریه F برابر است با:

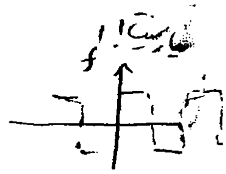
۱) ✗

۲) ✗

۳) ✓

۴) ✗





f پیوسته، f' ناپیوسته (نقطه‌ای) $\Rightarrow a_n \sim \frac{c}{n^2}$ ۱ و ۲ حذف

صاف

* مثال: برق ۷۴:

۱)

۲)

۳) ✓

۴)

$a_n = \_\_\_\_ , n \neq 0 \sim \frac{c}{n^2}$ $b_n = \_\_\_\_ \sim \frac{c}{n}$

$\Rightarrow f$ ناپیوسته

بررسی سایر گزینه‌ها!

۱) اولین ناپیوستگی سوم ⇐ پس حداقل یکی از a_n یا b_n باید $\frac{c}{n^2}$ باشد ⇐ غ

۲) دو تا شرط باید داشته باشد ⇐ حد صفر

سرعت از $\frac{c}{n}$ کمتر نشه ⇐ نمی‌تواند غ است ⇐ می‌تواند

۴) قضیه گفته می‌تواند! نمی‌تواند غ است ⇐ غ است!

ج دهم

* شرایط دیریکله

برای محاسبه‌ی مقدار سری فوریه در نقطه‌ی x_0، نیازی به محاسبه‌ی ضرایب فوریه نیست بلکه می‌توان مطابق زیر عمل کرد:

x_0 نقطه پیوستگی $\Rightarrow$ مقدار سری فوریه $= f(x_0)$

x_0 نقطه گسستگی $\Rightarrow$ مقدار سری فوریه $= \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)}{2} =$ میانگین حد چپ و راست در نقطه x_0

* مثال) مقدار سری فوریه $f(x)$ که تعریف آن در یک دوره‌ی تناوب مطابق زیر است، در نقاط داده شده را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \\ -2 & 2 < x < 3 \end{cases}$$

$x_0 = 0 \Rightarrow$ نقطه گسستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= \dfrac{-2+0}{2} = -1$

$x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ نقطه پیوستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$x_0 = 1 \Rightarrow$ نقطه پیوستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= f(1) = 1$

$x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow$ نقطه پیوستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= f(\frac{3}{2}) = 1$

$x_0 = 2 \Rightarrow$ نقطه گسستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= \dfrac{1-2}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$x_0 = \frac{5}{2} \Rightarrow$ نقطه پیوستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= f(\frac{5}{2}) = -2$

$x_0 = 3 \Rightarrow$ نقطه گسستگی $\rightarrow$ مقدار سری فوریه $= \dfrac{-2+0}{2} = -1$

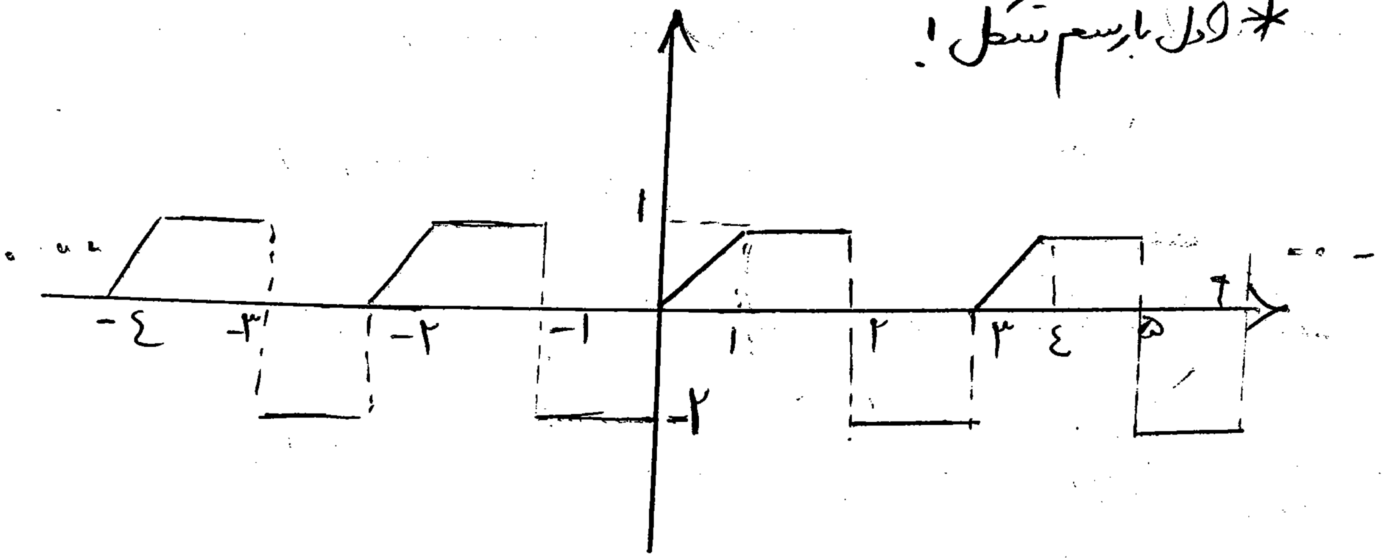
$x_0 = \underline{2678911352} \xrightarrow{\text{باقیمانده}} \equiv 1$ مقدار سری فوریه $= 1$

باقیمانده تقسیم بر ۳

$x_0 = -1967.3215427/5 \equiv 2.5 \rightarrow$ مقدار سری فوریه $= -2$

$x_0 = 8967543210.5 \equiv 0.5 \rightarrow$ مقدار سری فوریه $= \frac{1}{2}$

* اول با رسم شکل!



برای سه تا x_0 آخر ⇐ مضارب دوره تناوب را حذف می‌کنیم.

روی شکل نگاه کن ← رفتار دوره ۵ مثل رفتار در ۲ است!

وقتی می‌گیم مضارب دوره تناوب را حذف، یعنی بر ۳ تقسیم کن و باقیمانده را بنویس!

نقطه x_0:

- داخل دوره
  - نقاط داخل بازه ⇐ همواره پیوسته
  - نقاط تغییر ضابطه ⇐ میانگین حد چپ و راست.
- روی مرز دوره ⇐ میانگین مقدار ابتدا و انتهای دوره.
- خارج دوره ⇐ با حذف مضارب دوره تناوب به داخل دوره یا روی مرز دوره، تبدیل می‌شود!

* هر تابع تکه ضابطه‌ای، همواره در دامنه‌ی تعریف خود، پیوسته است!

تکه ضابطه‌ای: تکلیف روشنه ⇐ نقاط داخل همه پیوسته!

نقاط مرز را جداگانه بررسی می‌کنیم!

چند ضابطه‌ای ⇐ داخل بازه: حتماً پیوسته!

نقاط تغییر ضابطه: چه پیوسته، چه ناپیوسته ⇐ $\frac{\text{حد راست} + \text{حد چپ}}{2}$

* پس با توجه به نکات فوق نیازی به رسم شکل نداریم!

ص ۴۸

(تست مکانیک ۸۲) مقدار سری فوریه‌ی قطعه‌ای تابع متناوب $-\pi<x<\pi$ و $f(x)=x^2+x$ در نقطه $x=\pi$ کدام است؟

۱) π ۲) π^2 ✓ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\pi^2+\pi$

π مرز است: $\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}=\frac{\pi^2+\cancel{\pi}+\pi^2-\cancel{\pi}}{2}=\pi^2$

* خودم هم نفهمیدم چی شد ☹

سؤال: بنظرتون دامنه اگه $[0,\pi]$ بود ⇐

بطور کلی، مقدار صفر؟

حتماً باید تمام دامنه را در نظر بگیرید! نیم دامنه غلط است!

$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ -x & -1<x<0 \end{cases}$ $\frac{\text{حد راست}+\text{حد چپ}}{2}$ $f(1)=1,\ f(-1)=1 \Rightarrow \frac{1+1}{2}=1$ ⇐ (۱) نزول

$y=x,\quad 0<x<1$

در راستای استفاده نوع علامت $f(1)=1,\ f(-1)=-1 \Rightarrow \boxed{0}$

بازه کل دامنه $-1<x<1$

همیشه حالت کلی‌اش را در نظر بگیر با شکل یا ضابطه دوره تناوب را مشخص کن.

برای بررسی پیوستگی منحنی سری فوریه $y=f(x)$ و $a<x<b$ ، کافی است $f(b)$, $f(a)$ را مقایسه کنیم. در صورت مساوی بودن، در مرزها، منحنی پیوسته است.

در صورت مساوی نبودن در مرزی، منحنی پیوسته نیست.

نیم دامنه:
- با رسم شکل تمام دامنه را مشخص می کنیم
- کل ضابطه را در تمام دامنه بدست می آوریم
- از تعریف زوج یا فرد استفاده می کنیم

* مثال) در بسط سینوسی تابع (تابع فرد)

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 2-x, & 1<x<3 \end{cases}$$

، مقدار سری فوریه در نقاط زیر را بدست آورید.

$x=0 \xRightarrow{\text{تعریف تابع فرد}} f(0)=0$

$x=\frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

$x=2 \Rightarrow f(2)=3-2=1$

مرزی $x=3 \Rightarrow \dfrac{f(3)+f(-3)}{2}=0$

فرد: $f(-3)=-f(3)$

$\frac{\text{حد راست} + \text{حد چپ}}{2}$

$x=-1 \rightarrow f(-1) = -f(1) = \frac{1+2}{2} = -\frac{3}{2}$

$x=-2 \rightarrow f(-2) = -f(2) = -1$

$x=5 \rightarrow f(5) \underset{(-6)}{=} f(-1) = -f(1) = -\frac{3}{2}$

$x=12 \rightarrow f(12) \underset{(-12)}{=} f(0) = 0$

$x=-17 \rightarrow f(-17) \underset{(+18)}{=} f(1) = \frac{3}{2}$

مثلاً $\Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x = 5-6 = -1 \end{cases}$ $\quad f(-1) = -f(1) = -\frac{3}{2}$

* انتگرالگیری از سط فوریه : از طرفین سط فوریه همواره می توان انتگرال گرفت!

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\int f(x)dx = \overset{?}{\frac{a_0}{2}x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left(\frac{L}{n\pi}\right)\sin\frac{n\pi}{L}x + b_n\left(\frac{-L}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi}{L}x\right) \overset{?}{+ C}$$

* انتگرالگیری همواره سرعت همگرایی را افزایش می دهد

$$\frac{c}{n^k} \xrightarrow{\int} \frac{c}{n^{k+1}}$$

* مشتق گیری از سری فوریه : اگر $f(x)$ پیوسته باشد، از طرفین سط می توان مشتق گرفت

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(-\frac{n\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n\left(\frac{n\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

* مشتق‌گیری همواره سرعت همگرایی را کاهش می‌دهد

$$\frac{c}{n^k} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{c}{n^{k-1}}$$

* محاسبه‌ی سری‌ها با استفاده از سری فوریه

۱) سری فوریه تابع مورد نظر را بدست می‌آوریم

۲) جمله‌ی عمومی سری داده شده را مشخص می‌کنیم

۳) ضرایب فوریه را با جمله‌ی عمومی مقایسه می‌کنیم. در صورت مشابه بودن (یکسان بودن سرعت همگرایی) با علامت‌گذاری مناسب و ساده کردن، حاصل سری داده شده را بدست می‌آوریم. در غیر اینصورت با اعمال مواردِ زیر روی سری فوریه، تابع ضرایب فوریه را مشابه جمله‌ی عمومی سری می‌کنیم:

انتگرال‌گیری
مشتق‌گیری
روابط پارسوال

* تمرکز اصلی بحث سوم است!! اول و ۲ رو معمولاً طراح می‌ده!

رابطه پارسوال $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{h}\int_{(T)} \left(f(x)\right)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)}$$

* تنها کاربردی که سری فوریه داره جمع توان بودن است!

ex:
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n}$$

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \Rightarrow \frac{c}{n}$ سرعت هر دو $\Rightarrow$ عدد نهایی را بدست آورد

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ هم انتگرال جواب، هم پارسوال! اولویت با پارسوال است! (حتما) $\Rightarrow$ پارسوال

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \Rightarrow$ دو بار انتگرال

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Rightarrow$ یک بار انتگرال + پارسوال

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \Rightarrow$ ۴ بار انتگرال

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \Rightarrow$ ۲ بار انتگرال + پارسوال

برای ۳ای سری اول به پارسوال بعد انتگرال؟ نه!

۲ تا نکته $\Leftarrow$ هیچ وقت بیش از یک پارسوال نداریم

$\Leftarrow$ پارسوال حتما آخرین مرحله است و بعد از آن اجازه‌ی انجام هیچ عملیاتی نداریم

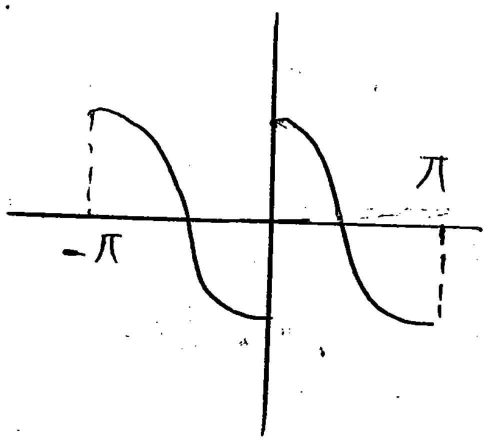
* هر سوالی تو کنکور دیدید، قبل از محاسبه بایستی این مسیر را تشخیص بدهید!

ص کتاب ۶۶

* مثال: با استفاده از بسط فوریه $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\pi \\ -\cos x, & -\pi<x<0\end{cases}$ حاصل سری داده شده را بدست آورید.

$$\frac{1}{1^2\times3^2}+\frac{1}{3^2\times5^2}+\frac{1}{5^2\times7^2}+\dots=\sum\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\sum\frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

$T=2\pi \Rightarrow$ بازه متقارن: شکل خود تابع رسم



فرد $\Rightarrow a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n+1}+\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}(1+\cos n\pi)\frac{2n}{n^2-1}$$

* هرگاه در سری فوریه عبارتهایی مانند $\cos n\pi$ ، $1-\cos n\pi$ ، $\sin\frac{n\pi}{2}$ ، $\cos\frac{n\pi}{2}$ و ... در ضرایب فوریه ایجاد شد برای استفاده از سری فوریه

برای محاسبه‌ی سری، این عبارات حتماً باید مقداردهی شوند

$n=2k \dots$

$n=2k+1 \dots$

$$1+\cos n\pi = \begin{cases} 2 & , n=2k \\ 0 & , n=2k-1 \end{cases} \Rightarrow b_{2k}=\frac{4}{\pi}\,\frac{2k}{4k^2-1}$$

* قدم اول انجام شد!

$$\begin{cases} \cos x & , 0<x<\pi \\ -\cos x & , -\pi<x<0 \end{cases} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{4k^2-1}\sin 2kx$$

$$\cos x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{4k^2-1}\sin 2kx \quad , 0<x<\pi \checkmark$$

* کدام یک از این سری فوریه‌ها درست است؟ هر دو درست است!

هر تابع زوج یا فردی، همچنین می‌توانیم نیم‌دامنه‌ی متناظر آن را بنویسیم.

$0<x<l$ در رو دوران محقق بنویسیم ⟸ نیم دامنه! ⟸ همیشه به عنوان نیم دامنه‌اش نگاه کرد!

ایده: حالا تون نیم دامنه، با حساب نیم دامنه ⟸ دوباره تمام دامنش شد!

این دوتا هر دو درستند اما انتخاب ما دومی است!

ضابطه‌ی تابع را از ۰ تا l بنویس ⟸ هر تابع زوج یا فرد

نیم دامنه!

قدم بعد: جمله عمومی سری

قدم سوم: مقایسه ← شبیه نیستند!

* با چه عملیاتی میشه ۲k رو از بین ببرم؟

$$\cos x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{4k^2-1}\sin 2kx \quad 0<x<\pi \Rightarrow$$ انتگرال می‌گیریم

یا رسوال

$$\int \Rightarrow \quad \sin x = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx + C$$

C: ثابت فوریه $\sin x$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{4}{\pi}$$

* همیشه ثابت سمت راست، ثابت فوریه سمت چپ است.

بالای سطر آن فرد است: انتگرال فرد ← زوج ← پایینی زوج است!

دقت: در فوریه، بالایی زوج ← انتگرال آن فرد بود ← $C=0$ و نیازی به جمله C نبود!

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx \quad , 0<x<\pi$$

(زوج در زوج برابر همیشه ثابت است)

a_0 و $\cos$ دارد ← زوج

پارسوال : $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum \frac{1}{(4k^2-1)^2}$: چون زوج است

کران ← نصف

بازه ← دو برابر

برای یادگیری ← $\boxed{\frac{a_0^2}{2} = 2\left(\frac{a_0}{2}\right)^2}$ $\Rightarrow$ (که اشتباه رخ نده!) ← $2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 2\times\frac{4}{\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}$$

جلسه ی بعد: اتمام سری فوریه

تا آخر انتگرال فوریه

تا اول ص ۱۰۳ : پیش مطالعه

ریاضی مهندسی - دوشنبه - ۹۲,۵,۱۴ - جلسه‌ی چهارم

کوکانیک - ص ۷۰

× الف)
× ب)
✓ ج)
× د)

$$x^2+x=x+4\sum(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+C$$

گزینه الف (غ) است:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\int f(x)dx=\overset{?}{\frac{a_0}{2}x}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{l}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)+b_n\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)+$$

*جملات سری فوریه فقط از جنس sin و cos هستند و تا اینجا $\frac{a_0}{2}x$ را باید به آن طرف تساوی انتقال داد.

* با انتگرال‌گیری از سری فوریه $f(x)$ سری فوریه $\int f(x)\,dx$ بدست نمی‌آید

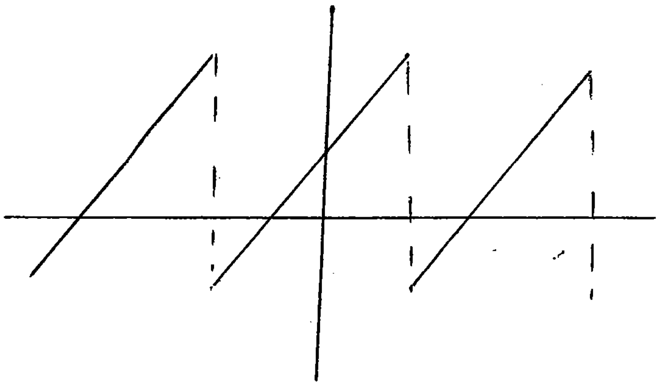
بلکه سری فوریه $\int f(x)dx-\frac{a_0}{2}x$ بدست می‌آید

پس گزینه‌ی الف غ است، چون با انتگرال‌گیری سری فوریه $x^2+x-x=x^2$ بدست می‌آید نه x^2+x!

ب) جمله‌ی ب غلط است!

$$2 = -4\sum (-1)^n \cos nx$$

روش اول:



f ناپیوسته است $\Rightarrow$ مشتق‌گیری مجاز نیست

روش دوم: $f(\pi) \neq f(-\pi) \Rightarrow$ f ناپیوسته

روش سوم: $b_n \sim \frac{c}{n} \Rightarrow$ f ناپیوسته

روش چهارم: مشتق‌گیری باعث کاهش سرعت همگرایی می‌شود و چون b_n حداقل سرعت مجاز را دارم

مشتق‌گیری حتماً سرعت همگرایی را کاهش می‌دهد

کمترین سرعت مجاز $= \frac{c}{n}$

* پس با مشتق‌گیری از عبارت درست به غلط رسیدیم!

روش پنجم: با مشتق‌گیری به سری واگرا می‌رسیم

حد $(-1)^n$ صفر نمی‌شود پس $\sum$ واگرا است ≠ جمع ها ≠ ... ما اینجا ۲ شده که

روش ششم: از سری فوریه‌ی $g(x)$ سمت راست فقط عدد ۲ است

به ... باید ۲ شده است!

$$\sum a_n \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ یا وجود نداشته باشد} & \Rightarrow \text{سری واگرا} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 & \Rightarrow \text{مشکوک} \end{cases}$$

جواب بین «ج» و «د» ⇐ «د» ساده‌تر است، چون زیر یکی بدیم!

π روی مرز است ⇐ ابتدا و انتها جمع و بر ۲ تقسیم!

$$\frac{-2\pi+1+2\pi+1}{2}=1 \Rightarrow$$ پس «د» هم غلط است!

پس «ج» صحیح است!

* بررسی ج : قدم اول: سری فوریه ⇐ طراح داده ✓

قدم دوم: جمله‌ی عمومی سری!

$$\sum \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$ ⇐ (هر وقت - و + داشتیم $(-1)^k$ بزار بعد به ازای k ارزش‌هاش رو تعیین کن)

قدم سوم: مقایسه جمله: مشابهند: هر دو سری مثل $\frac{c}{n}$

قدم چهارم: عددگذاری : هر موقع خواستی عددگذاری باید در یک لحظه رعایت بشه!

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cancel{2}\times\frac{\pi}{\cancel{2}}+\cancel{1}=\cancel{1}-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} \Rightarrow \pi=-4\sum\frac{(-1)^{2k-1}(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}}$$

⇐ ج درست است!

مقداردهی : $$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^{k+1}, & n=2k-1\end{cases}$$

↲ $(-1)^k$ مانند قبل به ازای k ارزش‌هاش رو تعیین کن حل!

[* سؤال: چرا $\frac{\pi}{2}$ انتخاب؟ به چه چیزی برای ذهنت داشته باش. یکی از عواملی که باعث می‌شه حل خودت اعتماد داشته باشی اینه که اطلاعات نقطه $\frac{\pi}{2}$ داند. وقتی هدف تو حرکت مسیر هموار می‌شود. اولین چیزی که یادت باشه $\sin n\pi$ اندازه بین صفره!]

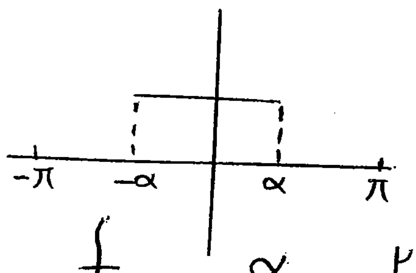
انتخاب بین ۰ تا π است. چون سری فوریه مثلثاتی است. پس انتخاب دارم ۰، $\frac{\pi}{2}$، π، چون بجز این‌ها هر چی بدم باز هم این sin رو دارم پس ۰ و π حذف می‌شوند چون Σ رو از بین می‌برند بین $\frac{\pi}{2}$ می‌مونه!
آنهم $\frac{\pi}{2}$ جواب داد که چی! آنهم تست ۱۳ که غلط حل شده!

* تفاوت دانشجویان "قوی" و "متوسط" ⇐ نظم اطلاعات ⇐ (اعتماد به اطلاعات)

** مدیریت جلسه‌ی آزمون

* برق ۸۹، کامپیوتر ۹۱ صفحه ۱۳، تست ۲۹

۱)　　۲)　　۳)　　۴)



قدم اول و دوم و انجام داده فقط برای مقایسه باید بدم Σ باشد:

$$f(x)=\frac{\alpha}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}\cos nx$$

قدم سوم: هر وقت کل داشتی، بجز پارسوال، چیز دیگه‌ای حک کردن اشتباهه!

$l=\pi$

$$\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}(1)^2dx}_{\frac{2}{\pi}\alpha}+0=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2\Rightarrow\sum\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2=\frac{\alpha\pi-}{2}$$

۳۳

پارسوال : $\frac{1}{h}\int_{(T)} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$

نکته : $\frac{2}{l}\int_0^l \leftarrow \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \leftarrow$ زوج * معیار زوج و فرد بودن سمت است !!

نکته : $\frac{n\pi x}{h}$ $\quad \cos x \Rightarrow l = \pi$

* نکته : این تابع عدد ثابت نیست !

معماری کشتی ۸۴ صفحه ۴۰، سؤال ۱۲۷

$$f(t) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t + \frac{(-4)}{n\pi}\sin n\pi t\right]$$

باشد

۱) ۲) ۳) ✓ ۴)

* detail :

مقایسه : توان ۲ ⇐ پارسوال ⇐ حالا به $\frac{1}{n^2}$ اضافت، باید حواسش کم و باید از عین سری فوریه بوسیله‌ی یاد ⇐ $\frac{1}{n^4}$ مقایسه : تشابه

* توان دو ⇐ پارسوال ! عالیه ⇐ $\sum \frac{16}{n^2\pi^2}$ ⇐ $f(0)$ ⇐ دو طرف تساوی را صفر دادیم ⇐ $t=0$ ⇐ باید $\cos n\pi t$ این‌ها ← عددگذاری ↲

نقطه‌ی پیوستگی ⇐ شرایط دیریکله

$T = 2 \Rightarrow l = 1$

* اینجا تابع نه زوج، نه فرد !

پارسوال : $\frac{1}{1}\int_0^2 t^4\,dt = \frac{32}{9} + \sum \frac{16}{n^4\pi^4} + \sum \frac{16}{n^2\pi^2} \Rightarrow \frac{8}{3}$

باید $\cos n\pi t$ یک بشود ⇐ $t=0$

هر موقع خواستی عددگذاری کنی باید شرایط دیریکله رعایت شود !

$t = 0 \quad \Rightarrow \frac{0+4}{2} = \frac{4}{3} + \sum \frac{4}{n^2\pi^2}$ $\quad \Rightarrow$ $\frac{16}{n^2\pi^2}$ می‌خواهم، پس در ۴ ضرب

$$\sum \frac{16}{n^2\pi^2} = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{۳۲}{۵} = \frac{۳۲}{۹} + \sum \frac{۱۶}{n^۴\pi^۴} + \frac{۸}{۳}$$

$$\frac{۲}{۵} - \frac{۲}{۹} - \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{\pi^۴}\sum \frac{۱}{n^۴}$$

$$\sum \frac{۱}{n^۴} = \pi^۴\left(\frac{۱}{۹۰}\right)$$

نکته: عموماً اگر خواستید عددگذاری کنید ← با Cos !
اما اگه عددگذاری شود ← اونی که ترکیب تره!

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(۲n-1)^P} = ? \qquad *$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^P} = ?$$

$$A = \frac{1}{1^P} + \frac{1}{۲^P} + \frac{1}{۳^P} + \cdots = \underbrace{\frac{1}{1^P} + \frac{1}{۳^P} + \frac{1}{۵^P} + \cdots}_{\text{فردها}} + \underbrace{\frac{1}{۲^P} + \frac{1}{۴^P} + \frac{1}{۶^P} + \cdots}_{\text{زوج ها}}$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(۲n-1)^P} + \frac{1}{۲^P}\Big(\underbrace{\frac{1}{1^P} + \frac{1}{۲^P} + \frac{1}{۳^P} + \cdots}_{A}\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(۲n-1)^P} = A\left(1 - \frac{1}{۲^P}\right)}$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots - \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{6^p} + \cdots \right)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = A\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) - \frac{1}{2^p} A$$

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = A\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)}$$

مهم* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

مهم* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \pi^3 \times (\quad)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \pi^4 \times \left(\frac{1}{90}\right)$$

$$*\ \sum \frac{1}{n^p} \begin{cases} p\leq 1 & \text{واگرا} \\ p>1 & \text{همگرا} \end{cases}$$

ص ۵۲۲

مکانیک ۹۴) سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $0\leq x\leq l$ ، $f(x)=x(l-x)$ کدام است؟

۱) $\frac{L^2}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{L^2}{(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{l}$

۲) $\frac{l^2}{4}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{l}$

۳) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{l}$

۴) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{l}$

$\sum\frac{1}{n^2}$ رو حفظ دارم ⇐ عدد نداری!

باید $x=0$ قرار دهم تا $\sum\frac{1}{n^2}$ بدست بیاد!

گزینه ۱ ⇐ $x=0$ $\quad f(0)=0$

گزینه ۱: $0=\frac{l^2}{2}-\frac{l^2}{\pi^2}\sum\cancel{\frac{1}{m^2}}$ ⇒ ۱ غلط است

گزینه ۲: $0=\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{\pi^2}\underbrace{\sum\frac{1}{n^2}}_{\text{مثبت}}$ ($\frac{\pi^2}{6}$) ⇒ جمع دو عدد مثبت صفر شد! ⇒ ۲ غلط است

* حتی لازم نبود $\sum\frac{1}{n^2}$ رو بدونم!

⇐ $\sum$ مثبت ، علامت جمله اول ملاک است!

گزینه ۳: $0=\frac{l^2}{6}-\frac{l^2}{\pi^2}\times\frac{\pi^2}{6}$ ✓

گزینه ۴: $0=\frac{l^2}{6}-\frac{4l^2}{\pi^2}\sum\cancel{\frac{1}{(2m-1)^2}}\ \frac{\pi^2}{8}$ ⇒ ۴ غلط است

اگر تساوی برقرار باشد ⇐ باید در دو نقطه تغییر دهیم! اگر در یک نقطه تغییر دهیم ⇐ ۲ می‌شه!

ص ۲۰

برق ۷۰)

گزینه ۱ ⇐ $0 = \frac{1}{2} + \sum \frac{2}{n^2\pi^2}$ غ (جمع دو عدد مثبت صفر نمی‌شود)

گزینه ۲ ⇐ $0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \times \frac{\pi^2}{8}$ ✓

گزینه ۳ ⇐ $0 = \frac{1}{2} + \sum 2\sin\frac{n\pi}{2}$ $\underset{\text{واگرا}}{}$ → غ

گزینه ۴ ⇐ $0 = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}$ $\xrightarrow{\text{n زوج}}$ $0 = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{4k^2\pi^2}$ ⇐ غ

$\begin{cases} n(2k) & \text{زوج} \\ n(2k-1) & \text{فرد} \end{cases}$ (جمع دو عدد مثبت صفر نمی‌شود)

مکانیک ۸۸) سری فوریه کسینوسی — ص ۷۳، سؤال ۴

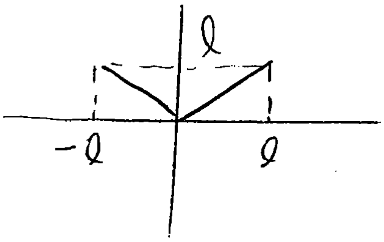
اول تا جایی که می‌تونی با روش‌های قبلی گزینه‌ها را رد کن ⇐ آخرش دو گزینه تفاوت فقط در عدد ثابتشون هست!

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✓

۴) ✗



$\frac{a_0}{2} \Rightarrow \frac{l}{2} \Rightarrow$ ۲ و ۴ حذف!

$x=0 \Rightarrow$ ۰ گزینه ۱ غلط است!

۱ و ۰ صفر می‌شه! $\Leftarrow$ جمع دو عدد مثبت صفر نمی‌شه! پس ۱ غلط است!

ص ۶۹

مکانیک ۹۰، مواد ۹۲، دکتری مکانیک ۹۲

ترتیب دوم: خیلی از Σ کمک می‌گیرد!

پس حفظ کردن آن Σ ارزش دارد!

هوافضا ۹۱

برق ۹۲ $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{3x}{2}+\sin^2\frac{5x}{2}$ باشد مقدار انتگرال $A=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ کدام است؟

۱) 7π ۲) $\frac{21}{4}$ ۳) $\frac{21}{8}\pi$ ۴) $\frac{21}{4}\pi$ ✓

در حالت پارسوال → Σ بخواهند

↓ $\int$ بخواهند

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 5x=\begin{cases}\frac{a_0}{2}=\frac{3}{2}\\ a_1=a_3=a_5=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

ضرایب $b=0$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{18}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\Rightarrow \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{21\pi}{4}}$$

تفاوت:

۲ دانشجو: هر دو درس را بلدند (اطلاعات یکسان) ← ۱- سریع جواب می‌دهد / ← طول می‌کشد خوب بدهد ⇐ چرا؟؟؟

البته

* اولین شرط لازم برای حل تست ← یادگیری درس

حل تست ۲۲

برق ۸۴) اگر برای $0<x<2$ داشته باشیم

$$x = \frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}x\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right.\right.$$

۱)   ۲) ✓   ۳)   ۴)

از دید دانشجوی اول:

$$2\times\frac{4}{\pi}\times\frac{1}{2\pi} = \frac{4}{\pi^2}$$

از دید دانشجوی دوم: از x به x^2 ← انتگرال

$$\frac{x^2}{2} = \frac{4}{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{2}x\right) - \frac{2}{9\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \dots\right) + c \to \frac{a_0}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \dots$$

$$x^2 = \frac{8}{\pi}(\quad ---- \quad)$$

$$x^2 - x = \frac{8}{\pi}(\quad --- \quad) - \frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}x\right) + \dots\right.$$

در امتحان کنکور هرچی به دردمان نمی‌خوره، نباید بنویسیم!

عادت همه چیز نوشتن باید کم رنگ شود!

دانشجوی اول: خواسته‌ی طراح سؤال چیست؟

طراح سؤال ضریب $\cos \pi x$ را خواسته!

از x به $x^2 \Leftarrow$ انتگرال

در قسمت اول چون به دردم نمی‌خوره، حذفش می‌کنم!

از x به x^2: انتگرال، اما همه‌ی جمله‌ها احتیاج ندارم

فقط به انتگرال $\sin \pi x$ احتیاج دارم

انتگرال: $\frac{1}{2\pi}$

$\frac{4}{\pi}$ در همه ضرب: $\frac{4}{\pi}$

من $\frac{x^2}{2}$ را دارم پس در 2 ضرب: 2

یا اینجوری می‌شه نوشت:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{4}{\pi}\left(\cdots + \frac{1}{2\pi}\cos \pi x\right)$$

$\Leftarrow$ هرچی ننوشتید اشکالی ندارد!

اصرار ما اینست که کارهای اضافی انجام نشود!

۱)

۲)

۳) ✓

۴)

اصل: گزینه‌ها جزء سؤالند ← "عادت کنید گزینه‌ها را همراه صورت سوال بخوانید"

خواندن صورت سؤال هم هنر است!

* ۲ روش خواندن صورت سؤال ← ۱) عادی بخون (افراد قوی)

۲) افراد ضعیف: در روش اول باید سؤال رو چند بار بخونی، لازم نیست دقیق بخونی!

تا جایی که رسیدی به پرسش! ← پرسش رو با تمرکز بخون!

بعد از پرسش - سراغ داده‌های مسأله می‌روم!

* توصیه من: خواندن سطحی ← پرسش ← گزینه‌ها (دنبال detail) ← سؤال دقیق!

"اصل اختلاف گزینه‌ها" بسیار مهم است!

اولین چیزی که در گزینه‌ها جلب توجه می‌کند اختلاف گزینه‌هاست. که به ما جهت می‌دهد!

ما در مبحث ریاضی مهندسی همیشه خودمون مسیر را انتخاب می‌کنیم!

همیشه مسأله به ما "مسیر" را نشان می‌دهد!

تست کامپیوتر ۸۱

اولین اختلاف $= \frac{a_0}{2}$ با محاسبه آن ۲ تا از گزینه‌ها حذف ← انتخاب خوبی است!

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{4\pi^2}{3} \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{2\pi^2}{3}$$

بدون استفاده از داده‌های مسأله تست حل کردیم!

* حالا اگه توی یکی دیگه از گزینه‌ها هم $\frac{2\pi^2}{3}$ بود چی؟

یه سری تست که هستند که طراح هرجوری گزینه‌ها رو بزاره ذهنی حل می‌شه!

انجام انطوری است!

نقش دانشجوی دوم در کتاب است! ما در طراحی نقش دانشجوی اول را داریم.

* اگه توی گزینه‌ها هم $\frac{2\pi^2}{3}$ بود؟

اختلاف: + و - است!

π^2 محکم نشسته، از سری فوریه x^2 ← به x^2 می‌خوام برسم!

$-x\int x\,dx$

اختلاف چه توقع مفهوم داره؟ وقتی درس را بلد باشم

اختلاف:
- زوج و فرد بودن
- توان n
- $\frac{a_0}{2}$
- $\vdots$

* کسی درس بلد نباشه نمی‌تونه دنبال اختلاف باشه!

ص ۵۸

برگ ۷۱

۱)

۲) ✓

۳)

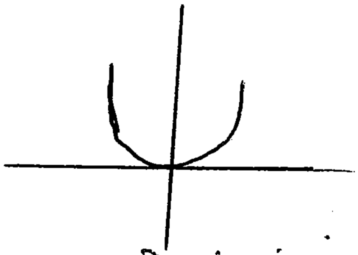
۴)

سری فوریه x^2 خواسته!

x^2 زوج

زوج ⇐ ۳و۴ حذف

اختلاف ۱و۲ ⇐ a_0 است



بالای محور ⇐ سطح زیر نمودار مثبت ⇐ a_0 مخالف صفر مثبت! ⇐ ۲ اغ

a_0 ⇐ بالای محور ⇐ +

a_0 ⇐ قسمتی بالا، قسمتی پایین ⇐ بالا بیشتر ⇐ + ، برابر ⇐ ۰ ، منفی بیشتر ⇐ −

a_0 ⇐ پایین محور ⇐ +

* حالا اگر $\frac{a_0}{2}$ که هم یکی بود ⇐ اولین اختلاف علامت + و − است!

$x \xrightarrow{\int} x^2$

$\sin \longrightarrow -\cos$ گزینه ۱ غلط است!

$\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x$

صفحه تست ۱۵

برگ ۷۸ اگر شرط به سری کسینوسی فوریه

۱) ×

۲) × $\sin 3x$ جملات اول

۳) ×

۴) ✓ $\sin x$ جمله اول

با انتگرالگیری از تابع به سری فوریه $x - \frac{a}{2}x$) می‌رسیم ⇓

* با انتگرالگیری به سری فوریه‌ی $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x\right)$ می‌رسیم بسیار جالب است!

عدد ثابت واسه ما اهمیت نداره!

دانشجوی دوم: محاسبه دانش انتگرالگیری

دانشجوی اول: اختلاف ترتیبه ۴

اولین اختلاف: ۲ کرونیک ۴

اگه از یک تابع انتگرال بگیریم ۲ کرونیک ۲ عوض نمی‌شه $\Leftarrow$ ۱ و ۳ حذف

اختلاف ۲ و ۴ $\Leftarrow$ ترتیبه ۲ از $\sin^2 x$ شروع می‌شه!

: ترتیبه ۴ از $\sin x$ شروع می‌شه!

جدول اول انتگرال $\int \cos x = \sin x$ $\Leftarrow$ ترتیبه ۲ اغلاست

۴۰ $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\ell^2 x$

صـ ۵۶

شرق ۸۷

۱) ✓

۲)

۳)

۴)

قسمت درسی: $x^2 \xrightarrow[\int]{\text{انتگرال}} x^3$

$: \frac{x^3}{3} - \frac{a_0}{2}x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\ell^2 x$

اولین اختلاف ⇐ سرعت خطی!

انتگرال ⇐ سرعت خطی ۱ واحد اضافه می‌شه!

$\frac{c}{n^2} \rightarrow \frac{c}{n^3}$ ⇐ پس ۱ درست است!

قبلی
مغناطیس ۱۹۲

اولین اختلاف $\Leftarrow \frac{a_0}{2}$ $\qquad \frac{a_0}{2}=\frac{l^2}{6} \Rightarrow$ ٤ ، ۱

اختلاف عددی : کروموزنیک

فقط شامل کروموزنیک دوم $\Leftarrow$ ج

قبلی
مغناطیس ۸۱، ص ۹۳ ، ٤

اولین اختلاف $=\frac{a_0}{2}$ $\qquad$ ۲ و ٤ حذف!

اختلاف گزینه ۱ و ۳ $\Leftarrow$ فقط ۱ اختلاف در عدد است

$\leftarrow$ تنها راه: نقطه گذاری!

* هر وقت ۱ اختلاف در عدد بود $\Leftarrow$ تنها راه نقطه گذاری است!

۸۷ (۱

۱) ✓   ۲) ✗

۳) ✗   ۴) ✗

۳ و ۴ ⇐ حذف

بین ۱ و ۲ ⇐ ۱

انتگرال : $2x \to x^2$

۳ و ۴ حذف! $\frac{c}{n^2} \xrightarrow{\int} \frac{c}{n}$: سرعت همگرایی

۱ و ۲ ← سینوسی و کسینوسی $\int \sin = \cos n \Rightarrow$ ۲ غ

* در این روش Risk وجود ندارد! Be Sure!

* هر «اختلاف معناداری» ما را به جواب هدایت کند!

مکانیک ۸۷، ص ۲۰، سؤال ۵۴

$A_n =$ B_n

۱) ✗

۲) ✓

۳) ✗

۴) ✗

باید { ضرایب کسینوس انیور = ضرایب کسینوس ادنور
سینوس " " = " " سینوس "
تانت k " = " ادنور

اولین اختلاف: ثابت k

مقدار ثابت انیور = مقدار ثابت ادنور

$$k^2 \cdot \frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2} \Rightarrow A_0 = \frac{a_0}{k^2}$$ ⇒ ۳ درجه حذف

اختلاف بعدی: یکی برحسب an، یکی برحسب bn!

از ان باید دوبار مشتق ⇐ An برحسب an است! ← ۲ اغ

نکته: تر ترا ... غلط

*هرچی به درد نمی خوره حذف کنید: اصل مهم.

صفحه یک

کامپیوتر ۸۹)

۱) ✗ ۲) ✗

۳) ✓ ۴) ✗

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 \left(1-\frac{x^4}{4}\right)dx = x-\frac{x^3}{12}\Big|_0^2 = 2-\frac{8}{12} = \frac{4}{3}$$

اولین اختلاف $a_0 =$

$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ ۱ و ۴ حذف

اختلاف بعدی: + و −

$$x \xrightarrow{\int, \times(-1)} -x^2$$

$$\sin \xrightarrow{\int} -\cos \xrightarrow{\times(-1)} \cos x \Rightarrow$$ ۲ غ

صفحه ۱۴ تست ۳۱

برق ۹۱)

$$\frac{x^2}{4}\, g(x) = \cancel{4}[$$

۱) ۲) ✓ ۳) ۴)

چه عملیاتی روی $g(x)$ ← برسیم!

حتی ما عملا $\frac{g(x)}{4}$ است! چون روی ۴ هیچ عملیاتی انجام نشده!

جمع و منها زیاد ← انتگرال

انتگرال cos شده sin ولی به منفی هم داریم!

پس باید در − ضرب!

انتگرال و در منفی ضرب

$$\frac{x^3}{12}-\frac{\pi^2}{12}x \overset{-}{\Longrightarrow} -\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{12}x \Longleftarrow$$

* تشخیص دادم انتگراله، پس واسه ۱۴ هم اتفاقی نیفتاده، پس می‌بریمش اونور!

شروع تست: فصل اول ✓

برق / مکانیک / کامپیوتر ⇐ حتماً حل کن.

شروع حل تست با رشته‌ی خودت بهتر است!

تعداد تست‌ها: حداقل ۲۵ درصد تست‌ها!

* انتگرال فوریه

$$\omega = \frac{n\pi}{\ell} \quad n \to \infty$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\;\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\right) d\omega$$

معادل سازی ←
- $\sum$ جمع ← $\int$ جمع پیوسته
- n عددی صحیح ← ω عددی حقیقی
- a_n برحسب n ← A برحسب ω
- Cos برحسب $n\pi$ ← Cos برحسب (ωx)
- b_n برحسب n ← B برحسب ω
- Sin برحسب $n\pi$ ← Sin برحسب (ωx)
- تغییرات n ← $d\omega$

دارا متناوب
تصفیر متناوب | ⟹ سری فوریه

نامتناوب | ⟹ انتگرال فوریه

$\ell \to \infty \quad \int_{-\ell}^{\ell} : \int_{-\infty}^{+\infty}$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\;\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\;\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx$$

اختلاف در تعریف مرجع : ***

کدام درسته؟ *

* قبل از محاسبه : بررسی شرایط وجود!

* اگر تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر باشد، انتگرال فوریه‌ی آن وجود دارد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \text{عدد محدود} < M \iff f(x) \text{ انتگرال‌پذیر است} \iff f(x) \text{ انتگرال فوریه دارد}$$

* هر تابع متناوب انتگرال فوریه ندارد

* مثال) بررسی کنید کدام یک از توابع زیر انتگرال فوریه دارند

۱) $y = x$ ✗ (∞ = سطح زیر نمودار)

۲) $y = \cos x$ ✗ (متناوب)

۳) $y = \begin{cases} \sin x & , x > \pi \\ 0 & , x < \pi \end{cases}$ ✗

۴) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر حالات} \end{cases}$ ✗ توی بی‌نهایت حاشیه!

هر جا مجانب قائم داشتیم انتگرال فوریه ندارد!

۵) $y = x \quad , 0 < x < 1 \Rightarrow$ چون خارج بازه‌ی $[0,1]$ تعریف تابع مشخص نیست، طراح سؤال غلط است!

طراح سؤال غلط است! در انتگرال فوریه هر تابعی به‌عنوان باید تعریفش از $-\infty$ تا $+\infty$ معلوم باشد

۶)
$$y=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ e^{x} & -1<x<0 \\ x & 0<x<1 \\ \cos x & 1<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$$ ✓

جمع چند مساحت محدود = محدود

* اگر روی یکی از گزینه‌ها بود که انتگرال فوریه وجود دارد ⇐ بررسی می‌کنیم.

جلسه‌ی آینده : شرایط وجود انتگرال فوریه را گفتیم!

پیش مطالعه : انتهای تبدیل فوریه!

* ریاضی مهندسی - دوشنبه - ۹۲٫۵٫۲۱ - جلسه‌ی پنجم

$\frac{n\pi}{l}=\omega$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

* مقایسه‌ی مبحث با مبحث سری فوریه از لحاظ سختی و سادگی

نمره سختی به مبحث سری فوریه = ۹۰

نمره سختی به مبحث انتگرال فوریه = ۱۰

* امروز ⇐ روز استراحت: تکرار ⇐ همه چیز مثل سری فوریه است ولی ساده‌تر!

در مبحث سری فوریه ⇐ ۳ روابط سری فوریه را نوشتیم ⇐ a_0 و a_n , b_n

اما فهمیدیم بایستی صرفاً به طیف التفات کنیم! چون به مشکل برخواهیم خورد!

اینجا ⇐ اگر به طیف که هم التفات کنیم، مشکلی پیش نخواهد آمد!

* آیا در اینجا تشخیص زوج و فرد محاسبات را کاهش می‌دهد؟ بله، این تشخیص ۵۰ درصد محاسبات ما را کاهش می‌دهد.

$$f(x)\ \text{زوج} \Longleftrightarrow \begin{cases} B(\omega)=0 \\ A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx \end{cases} \Longleftrightarrow f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x$$

$$f(x)\ \text{فرد} \Longleftrightarrow \begin{cases} A(\omega)=0 \\ B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx \end{cases} \Longleftrightarrow f(x)=\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x$$

حتما باید تعریف تابع از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد.

* مثال) انتگرال فوریه‌ی تابع

$$f(x)=\begin{cases}0 & , x<-6\\ x & , -6<x<0\\ \cos x & , 0<x<\pi\\ 3 & , \pi<x<5\\ 0 & , x>5\end{cases}$$

را بدست آورید.

بازه‌ها متقارن نیست ⟵ نه زوج است نه فرد!

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{-6} \cancel{0\cos\omega x\,dx}+\int_{-6}^{0} x\cos\omega x\,dx$$

$$+\int_{0}^{\pi}\cos x\cos\omega x\,dx+\int_{\pi}^{5} 3\cos\omega x\,dx+\int_{5}^{+\infty}\cancel{0\cos\omega x\,dx}\Big)=\dots$$

* عادت کنیم از این به بعد جایی که صفر است را نمی‌نویسیم!

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{-6} \cancel{0\sin\omega x\,dx}+\int_{-6}^{0} x\sin\omega x\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos x\sin\omega x\,dx$$

$$+\int_{\pi}^{5} 3\sin\omega x\,dx+\int_{5}^{+\infty}\cancel{0\sin\omega x\,dx}\Big)=\dots$$

* تذکر

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & , \ 0<x<h \\ g(-x) & , \ -h<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$ $f(x)$ زوج است

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & , \ 0<x<h \\ -g(-x) & , \ -h<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$ $f(x)$ فرد است

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & , \ 0<x<\pi \\ -\cos x & , \ -\pi<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$ فرد است!

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & , \ 0<x<\pi \\ -\sin x & , \ -\pi<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$ زوج است!

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & , \ 0<x<1 \\ -x+1 & , \ -1<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$ زوج است!

$$x^2+x+2=\sum b_n \sin nx, \quad 0<x<\pi$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+2 & 0<x<\pi \\ -(x^2-x+2) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

* مثال) انتگرال فوریه تابع $f(x)=e^{-|x|}$ را بدست آورید.

زوج است $\quad B(\omega)=0$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$$

* بسیار مهم *

$$\boxed{\int_0^{\infty} f(x)e^{-ax}dx=F(s)\Big|_{s=a}}$$

$$\sin ax \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\cos ax \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+a^2}$$

* بسط نیم دامنه

[فرقی با سری فوریه ندارد از لحاظ تئوری فقط ساده‌تر است. چون نصف از ∞- تا ∞+ فرض شده تا ∞+ به جای ۰ تا ∞+ یعنی تمام دامنه!

دیگر تعریف تابع در بازه‌ی (∞+ و ۰) داده شود "نیم دامنه" است و نیم دیگر با بیان کلمات زوج و فرد معلوم می‌شود.

[تست‌ها را هم می‌شه از روش کوتاه و هم کلی حل کرد. چون روش کلی اینجا خودش کوتاهه بهتره از روش کلی حل کنیم. تو سری فوریه آره می‌خواستیم از روش کلی حل کنیم خیلی دردسر بود اما تو انتگرال فوریه اینطور نیست!

در مرحله‌ی اول: تمرکز اصلی بر روش کلی است!

ص ۸۷

برق ۷۹، مکانیک ۹۲، هوا ۹۰

۱) ✓   ۲)

۳)   ۴)

[$f(\omega)$ نقش $A(\omega)$ را بازی می‌کند.
* طراح هر اسمی می‌تونه بزاره ⇐ (ضریب $\cos \omega x$ = $A(\omega)$)
چون جملات سینوسی نداریم ⇐ تابع زوج

$$f(\omega)=A(\omega)$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos \omega x\, dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=}$$

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}=f(\omega)$$

[* یه دفعه طراح ضریب $\cos \omega x$ رو گذاشته بود $B(\omega)$! حواست باشه!

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<\alpha \\ C & \cancel{\alpha}\,{-\beta}<x<\beta \\ 0 & x>\beta \end{cases}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin \omega}{\omega}\cos \omega x\, d\omega$$

۱)

۲) ✓

۳)

۴)

توضیح حل: هر وقت انتگرال فوریه داشتی: متغیر را تبدیل به ω کن $\omega \leftarrow x, t, \lambda, \ldots$

حتماً این کار را انجام بده!

انتگرال ما نیم دامنه است یا تمام دامنه؟ تمام دامنه ⇐ حتماً باید زوج باشد ⇐ بازه باید متقارن باشد ⇐ $\alpha=-\beta$

چون در سری نیم دامنه انتگرال از صفر شروع شده!

تابع زوج ⇐ چون $\cos \lambda x$ داریم ⇐ ($\sin \lambda$ ربطی نداره چون برحسب λ است)

$\alpha=-\beta$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\beta} C\cos \omega x\, dx=\frac{2C}{\pi}\,\frac{\sin \beta\omega}{\omega} \quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{2C}{\pi}=1 \\ \beta=1\end{array}\right.$$

$$\longrightarrow A(\omega)=\frac{\sin \omega}{\omega}$$

* برق ۸۰ نفت ۹۲

ص ۹۳، سؤال ۶

$$\int_0^{\infty} f(\omega)\cos \omega x\, d\omega=\begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<x<1 \\ \frac{1}{4}, & x=1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$

۱)

۲)

۳) ✓

۴)

$$f(\omega)=A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\cos\omega x\,dx=\frac{\sin\omega}{\pi\omega}$$

قضیه: اگر تابعی در بازه‌ی محدودی در نقاط محدودی تعریف نشده باشد یا در نقاط محدودی مقدارش با مقدار تابع برابر نباشد ⇐ تاثیری تو انتگرال ندارد!

ص ۹۳، سؤال ۷

* برق ۸۱)

۱) ✓ ۲)

۳) ۴)

$$f(\omega)=B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\sin\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)$$

* طراحان برق، کامپیوتر را مکانیک کنید!

ص ۹۸، سؤال

* ابزار دقیق ۹۰)

* مثل سؤال قبلی است!

dx را عوض ⇐ به جای x ⇐ ω

$$\int_0^\infty f(\omega)\sin\alpha\omega\,d\omega=\begin{cases}1-\alpha, & 0\le\alpha\le 1\\ 0, & \alpha>1\end{cases}$$

حالا چند تا تست به روش کوتاه حل می کنیم!

همه ی روش های کوتاه سری فوریه (به جز یه روش که) در این جا هم صادقند!
(یه روشی که می گفتیم n زوج حذف! اینجا ساپوسته است و مجنیه اینا!)

- روش های کوتاه مبحث سری فوریه در مبحث انتگرال فوریه نیز قابل استفاده هستند.

① $A(\omega)$ نسبت به ω تابعی زوج است $A(-\omega)=A(\omega)$
$B(\omega)$ نسبت به ω تابعی فرد است $B(-\omega)=-B(\omega)$

② سرعت همگرایی ⇐ همگی صادقند!

③ $A(\omega)$ و $B(\omega)$ به ازای هر ω محدود هستند (کراندار هستند)

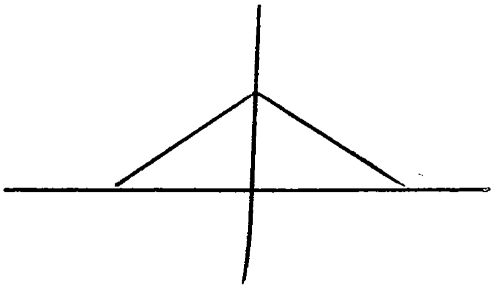
④ $\lim_{\omega \to \infty} B(\omega) = 0$ و $\lim_{\omega \to \infty} A(\omega) = 0$

ص ۸۷

* برق ۷۹، مخابرات ۹۲، مواد ۹۰

روش کوتاه: اولین چیزی که باید حواسمون باشه اختلاف فرضیه که
اولین اختلاف با سرعت همگرایی

۱) ✓
۲) ✗
۳) ✗
۴) ✗



۱) پیوسته و ۲) ناپیوسته : سرعت همگرایی $\frac{c}{\omega^2}$ ⇐ ۴ غ

به ازای هر ω از صفر تا بی‌نهایت خروجی باید محدود باشد $\frac{2}{0}=\infty$ ⇐ ۲ غ

هرجایی توی $A(\omega)$ و $B(\omega)$ ریشه‌ی مخرج نداشته وصله شد ⇐ ۲ غ

اختلاف ۱ و ۳ ⇐ علامت (-)

اختلاف در عدد ⇐ چهار راه : عددگذاری!

به جای x، صفر می‌ذاریم که فقط انتگرال $F(\omega)$ بمونه!

$F(0)$ نقطه پیوستگی : شرط دیریکله :

$$x=0 \Rightarrow \int_0^{\infty} F(\omega)\,d\omega = 1$$

تابع معینی باشه، انتگرالش روی هر بازه‌ای معین است!

گزینه ۳ هموار و منفی است ⇐ $\left\{ \begin{array}{l} \text{از } I(\omega) \text{ اگر} \\ \text{مخرج مثبت} \end{array} \right.$ ⇐ پس ۳ هم غلط است!

ص ۹۳ تست ۷

برق ۸۱)

۱) ✓ ۲) ✗

۳) ✗ ۴) ✗

گزینه ۳ و ۴ غلط ⇐ $F(\omega)$ همان $B(\omega)$ است که باید فرد باشد

فرد = زوج × فرد + زوج

عدم خازن :

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{1+\cos\omega}{2\omega} = \frac{2}{0} = \infty \xrightarrow{H} \text{گزینه ۲}$$

۲ هم غ است!

یک نکته دیگه : گزینه ۱ ⇐ $\lim_{\omega \to 0} B(\omega) = 0$

صفحه ۹۴، س ۱۰
(سوال ۸۲)

۱) ✗ ۲) ✓

۳) ✓ ۴) ✗

$f(\omega)$ باید فرد باشد ⇐ ۱ و ۳ حذف!

بین ۲ و ۴ ⇐ سخت یک راه : عدد گذاری

$\omega =$ ریشه مخرج $= 1$

گزینه ۴) $\frac{2 \times (1-\cos\pi)}{\pi(0)} = \frac{4}{0} = \infty$ ⇐ ۴ رد می‌شه!

۲ درست است!

اگه عنوان سؤال رو نخت کنند ← محاسبات سخت : سؤال بعدی

صنت، سؤال ۳۲

نفت ۹۰) در معادله انتگرالی $x>0$ ، $\displaystyle\int_0^\infty f(\omega)\cos\omega x\,d\omega = \frac{e^{-x}\sin x}{x}$

۱) ✓   ۲)

۳)   ۴)

ایراد سؤال: سمت چپ زوج، سمت راست نه زوج نه فرد ← تساوی غلط!

تصحیح ← $x>0$ (نیم دامنه: دیگه مهم نیست)

* $f(\omega)$ نقش $A(\omega)$ را دارد!

$$f(\omega) = A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{x}\cos\omega x\,dx$$

* علامت منفی ندارم ← تابع زوج

$$= \frac{2}{\pi}L\left\{\frac{\sin x\cos\omega x}{x}\right\}\Bigg|_{s=1} = \cdots$$

راه طولی‌تر :

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin x\sin\omega x\,dx = -\frac{2}{\pi}L\{\sin x\sin\omega x\}\Big|_{s=}$$

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{\pi}L\{\cos(\omega-1)x - \cos(\omega+1)x\}\Big|_{s=1}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{1+(\omega-1)^2} - \frac{1}{1+(\omega+1)^2}\right\}$$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= -\frac{1}{\pi}\left(tg^{-1}(\omega-1)-tg^{-1}(\omega+1)\right)+C \\ &= -\frac{1}{\pi}tg^{-1}\frac{\omega-1-\omega-1}{1+\omega^2-1}+C \\ &= -\frac{1}{\pi}tg^{-1}\frac{-2}{\omega^2}+C = \frac{1}{\pi}tg^{-1}\left(\frac{2}{\omega^2}\right)+C \\ &= -\frac{1}{\pi}tg^{-1}\left(\frac{\omega^2}{2}\right)+C_1 \end{aligned}$$

این سؤال هنوزم غلط گیر داره! (هر ۴ گزینه غلطه) $\lim_{\omega\to\infty}A(\omega)=0$

پاسخ صحیح را باید ⇐ $\left\{\frac{1}{\pi}tg^{-1}\left(\frac{2}{\omega^2}\right)+C\right\}$ ⇐ حد در بی‌نهایت صفر! باید صفر شه ⇐ پس C باید صفر شه!

در سر جلسه این جایگذاری را انداختم که عدد ثابته C_1!

$$\begin{cases} tg^{-1}\alpha - tg^{-1}\beta = tg^{-1}\left(\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right) \\ tg^{-1}x + Cotg^{-1}x = \frac{\pi}{2} \\ tg^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = Cotg^{-1}x \end{cases}$$

نکته: اگه ما داشته باشیم $tg^{-1}x+C$! تو گزینه‌ها $-tg^{-1}\frac{1}{x}+c_1$ هست! چرا؟

چون $\Rightarrow tg^{-1}x+C = \frac{\pi}{2}-Cotg^{-1}x+C = \frac{\pi}{2}-tg^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+C = -tg^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+C_1$

* یادآوری

$$x^n f(x) \longrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

$$x^n f(x) \longrightarrow j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

$\Downarrow$

* اگر ضرایب انتگرال فوریه $f(x)$، $A(\omega)$ و $B(\omega)$ باشند برای محاسبه‌ی ضرایب انتگرال فوریه‌ی $x^n f(x)$ کافی است از $A(\omega)$ و $B(\omega)$، n بار نسبت به x مشتق بگیریم و علامت آن به ترتیب مشتق n ام، $\cos$ و $\sin$ است.

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

مشتق ↓

$$\frac{dB(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

مشتق ↓

$$-\frac{d^2B(\omega)}{d\omega^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{-}x^2 f(x)\sin(\omega x)\,dx$$

* می‌خواهیم در مورد x^2 (Pm) تصمیم بگیریم ⇐ علامت منفی را به آن طرف انتقال می‌دهیم!

ساخت ۹۲، سؤال ۳

*برق (۷۶)

۱) ✓ ۲) ۳) ۴)

* بسیار دقت! علامت منفی در $\underbrace{\cos}_{-\text{ادامه}}$ = – : منفی!

$n=1$

ص ۸۹

*تست برق (۸۴) زیباترین سؤالی که تا حال در مبحث انتگرال فوریه طرح شده است!

$$\int_0^\infty \underbrace{f(x)\sin(wx)\,dx}_{\frac{\pi}{2}B(w)} + \underbrace{\int_0^\infty x f(x)\cos(wx)\,dx}_{\frac{\pi}{2}\frac{dB(w)}{dw}} = 0$$

۱) ✓ ۲) ۳) ۴)

f(x) ضرب sinwx است ⇐ ۲ تابع فرد است! گزینه ۱ صدق می‌کند!

f(x) فرد است ⇐

f(x) فرد است ⇒

$$A(w)=0$$

$$B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx$$

$$\frac{dB(w)}{dw}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x f(x)\cos wx\,dx$$

$$B(w)+\frac{dB(w)}{dw}=0 \Rightarrow \frac{dB(w)}{B(w)}=-dw$$

$$\Rightarrow \ln(B(w))=-w+\ln c \Rightarrow \boxed{B(w)=Ce^{-w}}$$

وسری فوریه انتیجوری در سوم نبود!

اما اینجا دو تابش را باید بلد باشی چه $f(x)$ بدهند ← $A(\omega)$ و $B(\omega)$ را بخواهند!

چه $A(\omega)$, $B(\omega)$ بدهند ← $f(x)$ را بخواهند!

$$f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\,d\omega=\int_0^\infty ce^{-\omega}\sin\omega x\,d\omega=\frac{cx}{1+x^2}$$

$$f(1)=1 \Rightarrow c=2$$

* شرایط دیریکله در انتگرال فوریه مثل سری فوریه است ولی ساده تر

* مثال) مقدار انتگرال فوریه تابع

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<-2\\ x^2+1 & -2<x<0\\ e^x & 0<x<1\\ 4 & 1<x<3\\ 0 & x>3\end{cases}$$

در نقاط داده شده را بدست آورید.

$x=-2 \xrightarrow{\text{مرزی}}$ مقدار $=\frac{0+5}{2}$ $\qquad \frac{\text{حد راست}+\text{حد چپ}}{2}$

$x=-1 \xrightarrow{\text{داخل}}$ مقدار $=f(-1)=2$

$x=0 \xrightarrow{\text{مرز}}$ مقدار $=\frac{1+1}{2}=1$

$x=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{داخل}}$ مقدار $=f(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}$

$x=1 \xrightarrow{\text{مرز}}$ مقدار $= \frac{e+4}{2}$

$x=2 \xrightarrow{\text{داخل}}$ مقدار $= f(2)=4$

$x=3 \xrightarrow{\text{مرز}}$ مقدار $= \frac{4+0}{2}=2$

$x=9789324 \longrightarrow$ مقدار $=0$

$x=-765432/5 \longrightarrow$ مقدار $=0$

کار ساده‌تر شده!

* رابطه پارسوال

(شبیه رابطه پارسوال در سری فوریه)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx = \int_0^{\infty}\left((A(\omega))^2+(B(\omega))^2\right)d\omega$$

اگه مثلا بری توی کتاب مرجع ببینی $\frac{1}{\pi}$ اونطرف است!

هم کتاب مرجع درست است هم اینجا!

این اختلاف ناشی از اندازه ضرایبی است که اول انتخاب کردیم که ببینیش!

* محاسبه‌ی انتگرال‌های معین با استفاده از انتگرال فوریه :

(روش کار دقیقاً مثل محاسبه سری که با استفاده از سری فوریه ولی ساده‌تر!)

① انتگرال فوریه‌ی تابع مورد نظر را بدست آوریم

② عبارت مقابل انتگرال معین را با عبارت مقابل انتگرال فوریه مقایسه می‌کنیم. در صورت مشابه بودن "یکسان بودن سرعت همگرایی" با عددگذاری مناسب و ساده کردن، حاصل انتگرال را بدست می‌آوریم، در غیر اینصورت از رابطه‌ی پارسوال استفاده می‌کنیم

* طراح نقطه‌ی انتگرال تو بهمن جوری بده که یا با عددگذاری حل شه یا پارسوال! پس ساده‌تر!

* مثال) با استفاده از انتگرال فوریه‌ی سینوسی $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<a \\ 0 & x>a \end{cases}$ حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x} \sin x \, dx$

$A(\omega)=0$ و $B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{a} \sin \omega x \, dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos a\omega}{\omega}$

$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos a\omega}{\omega} \sin \omega x \, d\omega$

$x=a \Rightarrow \frac{1-\cos a\omega}{\omega} \sin a\omega \Rightarrow$ شبیه [illegible] $\frac{1-\cos \omega}{\omega}\sin$

ب) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx$

الف) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega\,d\omega$

همه جفرا یاد بگیر!
شبیه به بیشتره x را a برابر بگیرم که ملی میشوند!
عملاً جز a در مضارب a انتخاب دیگری نداریم چون نمی‌دانیم کجاس!

$$x=a \Longrightarrow \overset{f(a)}{\frac{1+0}{2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos a\omega}{\omega}\sin a\omega\,d\omega$$

$$\xrightarrow{a=1} \int_0^\infty \frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega\,d\omega = \frac{\pi}{4}$$

* در عددگذاری‌ها به خط قرمز کن حس بنی یا انتخاب شترگذاری دو بارگی اون نقطه قابل تشخیصه!

ب) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4\omega}{\omega^2}\,d\omega \Rightarrow$ مشابه نیست = پارسوال!

یادتم: $\begin{cases} \text{سرعت همگرایی} = \frac{c}{\omega} \\ \text{سرعت همگرایی} = \frac{c}{\omega^2} \end{cases}$ ⇐ پارسوال!

پارسوال:

$\frac{2}{\pi}\int^\infty \xleftarrow{\text{پارسوال}}$ زوج F^2

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a (1)^2\,dx = \int_0^\infty \frac{4}{\pi^2}\,\frac{(\overbrace{1-\cos a\omega}^{2\sin^2\frac{a\omega}{2}})^2}{\omega^2}\,d\omega$$

$$\frac{2}{\pi}a = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{4\sin^4\frac{a\omega}{2}}{\omega^2}\,d\omega$$

$$\xrightarrow{a=2} \int_0^\infty \frac{\sin^4\omega}{\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{4}$$

۱)   ۲)   ۳) ✓ $\frac{\pi}{4}$ ۴)

هشدار: سرعت همگرایی هر دو $\frac{c}{\omega}$!

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin\omega^2}{\omega}\,d\omega$$

برای عدد توان ω^2 را به یه فرم جدید بگیریم $\Leftarrow$

$$\xrightarrow[2\omega\, d\omega=du]{\omega^2=u} I=\int_0^\infty \frac{\sin u}{\omega}\,\frac{du}{2\omega}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{4}$$

$$t=0 \Rightarrow 1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega=\frac{\pi}{2}$$

ص ۵۶۸، ت ۲۰، جلد دوم

* نانومواد ۹۲)

۱)   ۲)   ۳) ✓ $\frac{\pi}{4}$ ۴)

$$x=1 \xrightarrow{\text{انقطاع نقطه وسط}} \frac{\cancel{e^{-1}}+0}{2}\;(\times e)\;=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cancel{1}-\cancel{e^{-1}}(\cos\omega-\omega\sin\omega)}{1+\omega^2}\cos\omega\, d\omega$$

* تبدیل فوریه

در مبحث سری فوریه گفتیم ⇐ دو حالت داریم → سری فوریه مثلثاتی ✓
→ سری فوریه مختلط

در مبحث انتگرال فوریه هم دو حالت داریم → انتگرال فوریه مثلثاتی
→ انتگرال فوریه مختلط ⇐ تبدیل فوریه!

پس همه‌ی اصولی که در مورد انتگرال فوریه گفتیم در مورد تبدیل فوریه هم صادق است!

مثلاً شرایط وجود انتگرال فوریه → انتگرال پذیر باشد: شرط تبدیل فوریه هم همین است و ...
یا مثلاً تابع ثابت تبدیل فوریه ندارد مثل همان انتگرال فوریه!

نکته: تبدیل فوریه با تبدیل فوریه تعمیم یافته فرق دارد مثلاً $\cos x$ تبدیل فوریه ندارد اما تبدیل فوریه تعمیم یافته دارد

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega x}\, d\omega \\[2ex] F(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-j\omega x}\, dx \end{cases}$$

سری فوریه مختلط!

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{\frac{jn\pi}{l}x} \\[2ex] C_n = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{jn\pi}{l}x}\, dx \end{cases}$$

انتخاب ما :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega x}\, d\omega \\ F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-j\omega x}\, dx \end{cases}$$

* کتاب کرزیگ : فرم متقارن : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
* سؤالات کنکور ← انتخاب ما شبیه است!

* "$F(\omega)$" را "تبدیل فوریه‌ی" $f(x)$ می‌نامیم

تبدیل فوریه:
- ← محاسبه با استفاده از تعریف
- ← محاسبه با استفاده از خواص

* مثال) تبدیل فوریه‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & , x<-2 \\ x & , -2<x<0 \\ \cos x & , 0<x<1 \\ e^{x} & , 1<x<3 \\ 0 & , x>3 \end{cases}$ را بدست آورید.

$$F(\omega) = \cancel{\int_{-\infty}^{-2} 0\, e^{-j\omega x}\, dx} + \int_{-2}^{0} x e^{-j\omega x}\, dx + \int_{0}^{1} \cos x\, e^{-j\omega x}\, dx + \int_{1}^{3} e^{x} e^{-j\omega x}\, dx + \cancel{\int_{3}^{+\infty} 0\, e^{-j\omega x}\, dx}$$

$= \dots$

* عبارت‌های شامل اینها ← به علت صفر بودن را نمی‌نویسیم!

آیا اینجا هم تشخیص زوج و فرد بودن کمک می‌کند؟ بله!

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$$

$$e^{-j\omega x}=\cos\omega x-j\sin\omega x$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx-j\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

زوج $f(x) \Rightarrow F(\omega)=2\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$ (حقیقی)

فرد $f(x) \Rightarrow F(\omega)=-2j\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$ (موهومی)

* نکته:

$\mathrm{Real}\,F(\omega)$ همه یک ضریبی از $A(\omega)$ است

$\mathrm{Im}\,F(\omega)$ همه ضریبی از $B(\omega)$ است

* مثال) تبدیل فوریه‌ی $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & , x>0 \\ -e^{x} & , x<0 \end{cases}$ را بدست آورید.

فرد است $\Rightarrow F(\omega)=-2j\int_0^{\infty} e^{-x}\sin\omega x\,d\omega=-2j\dfrac{\omega}{1+\omega^2}$

* می‌شه از روی تبدیل لاپلاس ← تبدیل فوریه محاسبه کرد!

$$\begin{cases} F(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx \\ F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \end{cases}$$

$F(\omega) = F(s)\Big|_{s=j\omega} \Longleftarrow$

① $f(x)$ برای $x<0$، برابر صفر باشد

② $f(x)$، انتگرال‌پذیر باشد

* مثال ۱)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-5x} & , x>0 \\ 0 & , x<0 \end{cases} \xRightarrow{\text{هر دو شرط را دارد}} F(\omega) = \frac{1}{s+5}\Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega+5}$$

* مثال ۲)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , x>0 \\ 0 & , x<0 \end{cases} \xRightarrow[\text{انتگرال‌پذیر نیست } \sin x]{\text{شرط دوم را ندارد!}} F(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \cancel{F(\omega) = \frac{1}{s^2+1}\Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1-\omega^2}}$$

* خواص تبدیل فوریه

۱) خاصیت تغییر مقیاس : $f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$

$$f(ax) \rightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

۲) خاصیت انتقال نوع ۱ : $e^{jax} f(x) \xrightarrow{F} F(\omega - a)$

۳) خاصیت انتقال نوع ۲ : $f(x-a) \xrightarrow{F} e^{-ja\omega} F(\omega)$

۴) : $f^{(n)}(x) \xrightarrow{F} (j\omega)^n F(\omega)$

۵) : $x^n f(x) \rightarrow (j)^n F^{(n)}(\omega)$

۶) خاصیت دوگان : $f(x) \rightarrow F(\omega)$

$$F(x) \rightarrow 2\pi f(-\omega)$$

۷) رابطه پارسوال : $$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

۸)
- الف) $f(x)$ زوج حقیقی $\rightarrow$ $F(\omega)$ زوج حقیقی
- ب) $f(x)$ فرد حقیقی $\rightarrow$ $F(\omega)$ فرد و موهومی
- ج) $Re(F(\omega))$ نسبت به ω تابعی زوج است
- د) $Im(F(\omega))$ نسبت به ω تابعی فرد است

ه) $F(\omega)$ به ازای هر ω محدود است (کراندار است)

و) حد $_{\omega \to \infty} F(\omega) = 0$

* خاصیت کانولوشن هم تو کتاب هست ولی تا حالا تو کنکور نیومده!

توجه: عنوان بحث ← "محاسبه ی تبدیل فوریه با استفاده از خواص"

← پس باید خواص را حفظ باشیم!

فقط بازی با فرمول است، اما باید فرمول ها را حفظ باشید!

اگر یه سری روابط حفظ باشه داخل یه تست که قراره یکیش یا ترکیبشو ← امکان نداره تبدیل فوریه رو جواب بده!

* ریاضی مهندسی - ۹۲/۵/۲۸ - جلسه‌ی ششم - دوشنبه

بحث امروز: محاسبه‌ی تبدیل فوریه با استفاده از خواص ⟸ خواص بایستی در ذهن ما باشد!

فقط حفظ کنی ⟸ حله!

خیلی شبیه روند محاسبه تبدیل لاپلاس است

هر تابع: ۲ حالت
- ضابطه ساده است ⟸ تعریف
- ضابطه ساده نیست ⟸ خواص ⟸ ① انتخاب هسته تابع

انتخاب هسته تابع: عبارت‌هایی که با استفاده از خواص ایجاد شوند: حذف ⟸ باقیمانده هسته

$$ex:\quad \cancel{x}\,\cancel{e^{-2jx}}\,tg^{-1}x \xrightarrow{\text{هسته}} tg^{-1}x$$

خاصیت ۵   خاصیت ۲

عموماً دانشجویان در تشخیص هسته مشکل ندارن

$$\begin{cases} \sin ax = \dfrac{e^{jax}-e^{-jax}}{2j} \\ \cos ax = \dfrac{e^{jax}+e^{-jax}}{2} \end{cases}$$

Sin ax و Cos ax هم خود خواص است!

* مثال تشریحی: روند کار!

* مثال) با استفاده از تبدیل فوریه‌ی $f(x)=e^{-a|x|}$، تبدیل فوریه‌ی $\frac{1}{x^2+a^2}$ را بدست آورید و سپس با استفاده از آن، تبدیل فوریه‌ی تابع $h(x)=xe^{-jx}\cos x\,\cot^{-1}x$ را بدست آورید.

نیاز داریم تبدیل فوریه تابع را بدست آوریم ⇐ ضابطه ساده ⇐ تعریف

$$\text{زوج } f(x) \Rightarrow F(\omega)=2\int_0^\infty e^{-ax}\cos\omega x\,dx \overset{\text{تبدیل لاپلاس}}{=} 2a\frac{1}{a^2+\omega^2}$$

$$\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=a}=\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

چه ارتباطی نشونه ⇐ به جای ω، x نوشته!

تبدیل فوریه از تبدیل فوریه ⇐ دوگان!

خاصیت ⇐ نیازی به تبدیل فوریه ⇐ در 2π ضرب، به جای x هم $(-\omega)$!

تذکر: حوزه زمان (اینجا متغیر x) $\longrightarrow$ حوزه فرکانس (اینجا متغیر ω)

حالا چون می‌خوای از تبدیل فوریه، تبدیل فوریه‌ی یکی دیگه رو بگیری، نیاز به دوگان!

* خواص بلد باشی تشخیص هسته ⇐ تا اینجا حله!

هسته‌ی تابع ساده باشد = ۳ $e^{-a|x|}$ ⇐ حس می‌شد $G(w)$ حل ✓

ولی من بدترین حالت رو گذاشتم ⇐ کلی‌ترین حالت!

اما هیچوقت تو کنکور این بدترین رو نمی‌بینی!

$\cot g x$ با استفاده از تعریف هم ساده نیست!

فرق تبدیل فوریه با لاپلاس ⇐ چون هسته لاپلاس هسته‌ها را در جدول حفظ داریم!

اما اینجا کار اضافه هم داریم که باید یا از تعریف یا از خواص بدست آورد.

خود هسته هم اگر پیچیده بود ⇐ خواص!

چه خاصیت‌هایی می‌تونند برای تبدیل فوریه هسته کمک کنند ⇐ ① مشتق‌گیری ✓

② کانولوشن ✗

③ دوگان ✓

① همگنه مشتق تبدیل فوریش یا ریشه خورش اما

② دوگان ⇐ بیشتر وقتا که استفاده می‌شه از جدول شرعی کمک می‌کنه!

اگر هسته با تعریف ساده نبود ⇐ اولین کار مشتق ⇐ در ۹۹ درصد موارد مشکل را حل میکنه

۱ درصد دیگه هم سراغ بقیه!

$$\frac{2a}{a^2+x^2} \xrightarrow{\text{خاصیت ۷ (دوگانی)}} 2\pi e^{-a|-\omega|} \xrightarrow{\text{(تقسیم بر ۲a)}} \boxed{\frac{1}{x^2+a^2} \to \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}}$$

قسمت بعدی مسأله: اصل کتاب.

یه تابع دارن به تبدیل فوریه پیدا کن. ضابطه ساده نیست. می‌ریم سراغ خواص ⇐

اولین قدم: تشخیص هسته: $g(x)$

$$h(x) = x e^{-jx} \cos x \underbrace{\cot g^{-1} x}_{g(x)}$$

$$g(x) \to G(\omega)$$

$$\cos x(\dots) \to \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} g(x) \xrightarrow{\text{خاصیت ۲}} \frac{1}{2}\left(G(\omega-1)+G(\omega+1)\right)$$

تقسیم اینو بدون عدد ثابت ضرب $(\times\frac{1}{2})$ ⇐ اول ورهم $\frac{1}{2}$ ضرب

$e^{j\omega x}$ ← (ω) را تبدیل به $(\omega-a)$ می‌کرد!

عادت کنم قبل رو راستی!

$$e^{-jx}(\dots) \xrightarrow{\text{خاصیت ۲}} \frac{1}{2}\left(G(\omega)+G(\omega+2)\right)$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ۵}} \frac{j}{2}\left(G(\omega)+G(\omega+2)\right)'$$

$$g(x) = \cot^{-1} x \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

خاصیت ۴   داده مسئله

$$\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \begin{cases} j\omega\, G(\omega) = -\pi e^{-|\omega|} \\ \Rightarrow G(\omega) = \dfrac{-\pi e^{-|\omega|}}{j\omega} \end{cases}$$

$$H(\omega) = \frac{j}{2}\left(\frac{-\pi}{j\omega} e^{-|\omega|} + \frac{-\pi}{j(\omega+2)} e^{-|\omega+2|}\right)' = \cdots$$

ص ۱۰۰

کامپیوتر ۸۲ تبدیل فوریه‌ی تابع $f(x)$

۱) ✓   ۲) X

۳) X   ۴) X

ضابطه ساده ⇐ تعریف!
از تعریف که استفاده می‌کنیم بعد زوج و فرد بودن را هم در نظر می‌گیریم!

$f(x)$ زوج $\Rightarrow F(\omega) = 2\int_0^2 1 \cos \omega x\, dx = \dfrac{2\sin 2\omega}{\omega}$

از خواص هم حل میشه: خاصیت ۸: $F(x)$ زوج ← $f(\omega)$ زوج ← ۲و۴ غلط ⇐ ۳ غ

$f(x)$ زوج $\Rightarrow F(\omega)$ زوج → ۲و۴ غ

درجه صورت < درجه مخرج ← صورت ≠ ت

$\lim_{\omega \to \infty} F(\omega) = 0 \Rightarrow$ تست ۱۴ غ

ص ۱۰۴

* کامپیوتر ۷۸)

۱) ✓ ۲) ۳) ۴)

از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم.

خاصیت ۲

خاصیت ۴

$$j\omega Y(\omega) - 4Y(\omega) = \frac{1}{j\omega+4}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{(j\omega-4)(j\omega+4)} \Rightarrow \boxed{Y(\omega) = \frac{1}{-\omega^2-16}}$$

$$F(\omega) = \int_0^\infty e^{-4t} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{4+j\omega} e^{-(4+j\omega)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{4+j\omega}$$

۶۱ صنایع (۸۲ صفحه ۱۲۱

تبدیل فوریه‌ی $F(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} f(x)\,dx$ اگر $f(x)$ باشد،

۱) ✓

۲)

۳)

۴)

یادآوری: $f(x) \to F(\omega)$ (نوشتن جزء کلاس اضافی است!)

* هسته‌ی تابع $f(x)$ است!

$$\left(e^{jax}+e^{-jax}\right)f(x) \xrightarrow[\text{خاصیت ۲}]{F} F(\omega-a)+F(\omega+a)$$

ص ۱۱۲

برق ۸۲

$$f(t)=\underbrace{e^{-\alpha|t|}}_{g(t)}\sin bt$$

۱) ✓

۲)

۳)

۴)

هسته $e^{-\alpha|t|}$ است!

($e^{\alpha t}$ را با $e^{\alpha jt}$ اشتباه نگیرید! دقت نداشت ⇐ جزء خواص نیست!)

$$g(t) \to G(\omega)$$

$$\frac{e^{jbt}-e^{-jbt}}{2j}\,g(t) \to \frac{1}{2j}\left(G(\omega-b)-G(\omega+b)\right)$$

جزوه باما

حفته ساده ⇐ تبدیل فوریه با استفاده از تعریف!

زوج و فرد بودن! ⇐ زوج ✓

$g(t)$ زوج $\Longrightarrow G(\omega)=2\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\cos\omega t\,dt=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

$$F(\omega)=\frac{1}{2j}\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2+(\omega-b)^2}-\frac{2\alpha}{\alpha^2+(\omega+b)^2}\right)$$

$\alpha^2+\omega^2+b^2-2\omega b \qquad \alpha^2+\omega^2+b^2+2\omega b$

$$=\frac{\alpha}{j}\left(\frac{4\omega b}{(\alpha^2+\omega^2+b^2)^2-4\omega^2b^2}\right)$$

ص ۱۰۷

برق ۷۴) اگر تبدیل فوریه ی تابع $f(t)=\frac{t}{t^2+a^2}$ $(a>0)$

کنکور ۸۷

e^{-an} تبدیل فوریه ندارد

برگردان ← تبدیل فوریه ندارد $\leftarrow e^{-an}$

$\lim\limits_{\omega\to\infty} \infty$

۲) ✗✗✗ $\lim\limits_{\omega\to\infty} \infty$

۱) ✗✗✗

e^{-an} تبدیل فوریه ندارد

۳) ✗✗✗

$\begin{cases} -\pi i e^{-\omega a}, & \omega>0 \\ \pi i e^{\omega a}, & \omega<0 \end{cases}$

۴) ✓✓✓ $\lim\limits_{\omega\to\infty} \infty$

روش اول: دادن مقدار به جای ω ها و ∞، با ابزار ← تبدیل فوریه

فرد ← ۴ هم فرد ✓

۸۶، مکانیک ۹۲، مواد)

چه موقع دوگان به دردمون می‌خوره ⇐ می‌خوام در این تست اینو یاد بگیرم!

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad f(x)=\frac{\sin}{x}$$

۱) ✓

۲)

۳)

۴)

دوگان گونه نبود:
آنه گزینه‌ها رو نگاه کردی و:
تبدیل فوریه گزینه‌ها از صورت سؤال ساده‌تر ⇐ از گزینه‌ها تبدیل فوریه بگیر!

* تذکر: در تست های محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی یک تابع، اگر تبدیل فوریه‌ی گزینه‌های از صورت سؤال ساده‌تر باشند، بهتر است تبدیل فوریه‌ی گزینه‌ها را بدست آورده و از خاصیت دوگان استفاده کنیم.

اولین کار: به جای ω گزینه‌ها ⇐ x!
انجام شده برای کل گزینه‌ها ⇐ به شانسی انتخاب نکنی!

$$f(x)=\begin{cases} 9, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$$

حالا از این تابع، تبدیل فوریه می‌گیریم.

$$f(x)=\begin{cases} a & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases} \xrightarrow{\text{زوج}} F(\omega)=2\int_0^1 a\cos\omega x\,dx = 2a\frac{\sin\omega}{\omega}$$

نکته: چون ۴ تا بود ⇐ اینجا جای $\omega \leftarrow x$ ⇐ جابجا شده و نمی‌شه طلا نزنیم!

اما اینجا دو تا ضابطه داشتیم ⇐ برای ۲ تا از نیم یکی

برای ۲ تا نیم اینجا ⇐ یکی

⇐ عبارتی رسیدیم که اینجا جای ω قرار دادیم ⇐ مجبوریم از ۲ استفاده کنیم ⇐ ۲ تا نیم

چون ۲ نیم ع، نیازی نیست دوگان بزنیم ⇐ مستقیم سراغ نیم بعدی

اینجا دوگان می‌زنیم: هیچ راه حل دیگری نداریم ⇐ فقط جای $\omega \leftarrow x$

$$2a\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[\substack{\text{خاصیت دوگان}\\ \text{خاصیت ۲}}]{F} 2\pi f(-\omega)$$

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{F} \frac{\pi}{a}\begin{cases} a & |\omega|<1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases}$$

*چون تابع زوج ⇐ می‌شه جای منفی رو نذاشت!

همونه!

خاصیت دوگان

خاصیت ۲

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{F} F(\omega) \\ F(x) \rightarrow 2\pi f(-\omega) \end{cases}$$

$\cancel{e^{-j3\omega\pi}}$ ۱۲ فرد X X X

$\cancel{e^{-j3\omega\pi}}$ ۱۴ زوج ✓ ✓ ✓

$\cancel{e^{-j\omega\pi}}$

$\cancel{e^{-j\omega\pi}}$ ۱۳ زوج X

هر موقع تبدیل فوریه ی یک تابع از روی تبدیل فوریه تابع دیگه بدید!
باید ببینیم چه عملیاتی صورت گرفته که این تابع به اون تابع تبدیل شده

Sin شده Cos ← مشتق

t شده ← $\frac{t}{2}$ ← تغییر مقیاس

$-\pi$ ← 0 ← انتقال

۱_ مشتق

۲_ تغییر مقیاس

۳_ انتقال

$$f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$$

خاصیت انتقال: $f(x-a) \xrightarrow{F} e^{-ja\omega} F(\omega)$

هر وقت تو تبدیل فوریه از $e^{-ja\omega}$ صحبت کرد ⇐ تبدیل فوریه قبل انتقال!

پس تو خیلی که از $e^{-j\omega\pi}$ صحبت کرد ⇐ باید بدانیم که: تبدیل فوریه تابع قبل از انتقال

X

قبل از انتقال

g زوج ← G(ω) هم زوج

f(t) فرد ← F(ω) فرد ← قسمت ۱ زوج نسبت ← غ ⇐ X

ز ← ۲

برق ۸۷، ص ۱۰۹

$$f(x)=e^{-x^2}$$

۱)	۲)

۳) ✓	۴)

* هیچ‌کس خورده . با تعریف سادس یا خواص؟ ⇐ خواص ⇐ اولین طرز: مشتق

$$f'(x) = -2x e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2x f(x)$$

حاصیت ۴	حاصیت ۵

$$j\omega F(\omega) = -2j \frac{dF_\omega}{d\omega}$$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} + \frac{\omega}{2} F(\omega) = 0$$

$$\frac{dF(\omega)}{F(\omega)} = -\frac{\omega}{2} d\omega \Rightarrow \ln(F(\omega)) = \frac{-\omega^2}{4} + \ln c$$

$$\boxed{F(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4}}}$$

برق ۷۶ (جلد دوم: ص ۱۱۰ ← سؤال ۲)

اختلاف گزینه ۳ و ۴ ⇐

گزینه ۴ ← خاصیت تغییر مقیاس

$$f(ax) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

پس باید $F(2\omega)$ داشته باشیم ⇐ $\boxed{\text{۳ غ}}$

$g(t)$

اما

چون $\begin{cases} F(\omega) \text{ حقیقی و موهومی ؟} \\ P(t) \text{ فرد} \end{cases}$

$P(t)$ فرد $\xrightarrow{\text{خاصیت}}$ $F(\omega)$ موهومی ⟶ فقط ۲ زوج ← زوج

پس ۱ غ ، ۲ غ ✗

بین ۳ و ۴ ⇐ تنها اختلاف 2ω ⇐ تغییر مقیاس ← ۳ غ ← ۴ درسته

$g(t)$ مثل از انتقال ⇐ زوج !

فقط مثل تغییر مقیاس

حالا می‌خوام انتقال که رو در نظر بگیریم !

به اندازه π انتقال ⇐ باید $e^{-j\pi\omega}$ ضرب ⟸ تغییر مقیاس هم دارم ⇐ $e^{-j2\omega\pi}$

$$F(x) \rightarrow F(\omega)$$

$$F\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow 2F(2\omega)$$

سین باید به صورت $e^{-2j\omega}$ ضرب بشه $\Leftarrow$ ۱ و ۳ حذف! X

سینِ ۲ و ۴ $\Leftarrow$ اختلاف $\Leftarrow$ ۴ در سازج ضرب شدن، ۲ در سازج ضرب نشده $\Leftarrow$

چون متوازم: متوثیقِ سازج $\Leftarrow$ ۲ غ $\Leftarrow$ ۴ درسته.

خواص خطی $\Leftarrow$ هر فرمی تحلیل کنی به جواب می رسی!

حل

کامپیوتر ۸۹)

۱) X

۲) ✓

۳)

۴) X

ضابطه ساده به تعریف

اول زوج و فرد بودن ← * f فرد ← ✓

$f(x)$ فرد $\longrightarrow F(\omega) = \dfrac{-2j}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^1 x \sin \omega x \, dx$

(خودش نوشته تمام می‌دانم)

$$= \frac{-\sqrt{2}j}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{-\cos \omega}{\omega} + \frac{\sin \omega}{\omega^2} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, j \left(\frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\omega^2} \right)$$

(از راه خواص هم می‌شه ولی منطقی نیست)

$F(\omega)$ فرد ← $f(x)$ فرد

$\frac{2\cos \omega}{-i\omega}$ $\quad \frac{1}{\omega^2}(e^{-i\omega}+e^{i\omega})$

گزینه ۱ رد ⇐ ۲ $\qquad$ × غ ← زوج + فرد = نه زوج نه فرد

گزینه ۴ رد ⇐ $\omega = 0 \leftarrow \infty$ (غ) ×

گزینه ۳ رد ⇐ ×

با ارگوشی گزینه ۲ : $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-2j \dfrac{\cos \omega}{\omega} - \dfrac{2j}{\omega^2} \sin \omega \right) \xrightarrow{\omega = 0} \infty$

گزینه ۱ ← دو ← نامحدود ⇐ از اسم هم راحتی شد!

حل دوم : صفحه ۱۱۴، سؤال ۲۳

* حل و فصل ۹۱)

۱)　　　۲)　　　۳)　　　۴)

خاصیت ۵

راه اول ← x ضرب شده ← در ۲ ضرب = ۲ بار مشتق ⇐ تنها گزینه ۴

راه دوم ← $F(x)$ فرد ← زوج تنها زوج ⇐ گزینه ۴

راه سوم ← از e^{-x^2} باید xe^{-x^2} بسازیم: مشتق خاصیت ۴: مشتق تابع در ضرب ⇐ تنها گزینه‌ای که در x ضرب شده ⇐ گزینه ۴

$$(e^{-x^2})' = -2x\,e^{-x^2}$$

* تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی

تبدیل فوریه کسینوسی $F_c(\omega) \overset{\frac{2}{\pi}\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ 0}{=} \int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx$

تبدیل فوریه سینوسی $F_s(\omega) \overset{\frac{2}{\pi}\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ 0}{=} \int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$

اختلاف نظر مراجع ← بعضی که هیچی نمی‌ذارند ✓
← بعضی که $\frac{2}{\pi}$
← بعضی که $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

هیچ فرقی بین انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی و تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی نیست!

انتخاب جا بدون صفر است.
ص ۱۱۷
برق ۸۷

$f(t) = \frac{e^{-at}}{t}$, $t \geq 0$ حرف t بهتر بود!

۱)

۲) $tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) - \frac{\pi}{2}$ ✓

۳)

۴)

$$F_S(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at}}{t} \sin\omega t \, dt$$

$$= L\left\{ \frac{\sin\omega t}{t} \right\}\Big|_{S=a} = \ldots$$

روش دوم:

یا : $$\frac{dF_S(\omega)}{d\omega} = \int_0^{\infty} e^{-at} \cos\omega t \, dt \overset{\text{لاپلاس}}{=} \frac{a}{a^2+\omega^2}$$

$$\xrightarrow{\int \text{انتگرال}} F_S(\omega) = tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) + C$$

$$0 = \frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{\pi}{2}$$

اشتباه طراح سؤال این بوده
که تصور کرده C هر چی
می‌تونه باشه!

حل سری قبل ← تست ۹۰

یادتونه؟

$$\frac{1}{\pi} tg^{-1}\left(\frac{2}{\omega^2}\right) + C = -\frac{1}{\pi} tg^{-1}\left(\frac{\omega^2}{c}\right) + C_1$$

طراح فکر کرده بود جای C ← C1 و غلط!
C هر چی می‌تونه باشه!

* تست‌هایی که اشتباه علمی دارند ← حذف نمی‌شوند ← علامت نزن!

جلد دوم صفحه ۱۱۱ سؤال ۷

مکانیک ۸۲)

۱) ×

۲) ✓

۳) ×

۴) ×

$\lim_{\omega \to 1} f(\omega) = \infty$

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty e^{-x} \cos \omega x \, dx = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ هم ضرب نشده ⇐ برای ما ضریب مجاز است!

* خواص: $f(x)$ زوج ← $F_c(\omega)$ زوج ← اولی غلط ← حذف ×

ــ گزینه ۳ ← $\lim_{\omega \to 1} f(\omega) = \infty$ ⇐ حذف ×

(همیشه سؤالات رو به سمت شبیه مخرج می‌بریم)

* تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته :

* گفتیم هر تابعی که انتگرال‌پذیر نباشد ⇐ تبدیل فوریه ندارد

* توابعی که انتگرال‌پذیر نیستند

→ سرعت رشد تند (نسبت به سرعت x^n می‌سنجیم) — سرعت از x^n بیشتر ← مثل e^x ⇐ تبدیل فوریه ندارند

→ سرعت رشد کند — سرعت رشد کندتر از x^n ← $\sin x$ ، $1=x^0$ ⇐ تبدیل فوریه ندارد. اما تبدیل فوریه تعمیم یافته دارند

* به طور ساده اگر بخواهیم تعمیم یافته رو پوشش بدهیم ملاک ما
معیار ما دلتای دیراک است!

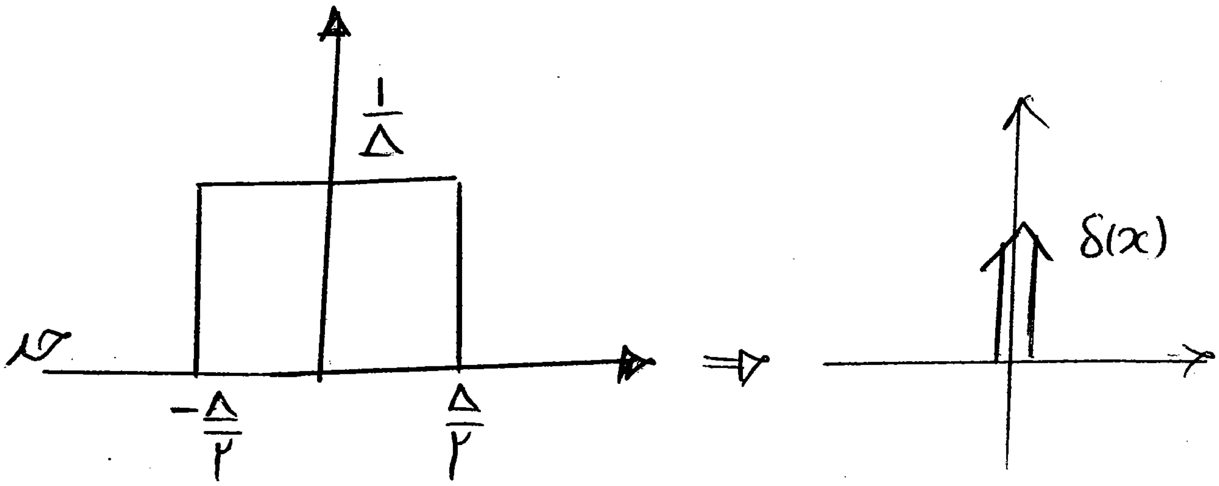
هر تابعی که در ضابطه‌ی خودش یا تبدیل فوریه ⇐ دلتای دیراک داشته باشد ⇐ تعمیم یافته
نداشت ⇐ معمولی

* اگر تابعی در ضابطه‌ی خودش یا در ضابطه‌ی تبدیل فوریه‌اش دلتای دیراک (تابع ضربه) داشته باشد، تبدیل فوریه‌ی آن تعمیم یافته است.

* حالا باید دلتای دیراک و معرفی کنیم!

دلتای دیراک

هرجا خواستیم اثر را در یک نقطه زمانی بررسی کنیم ← دلتای دیراک



$\Delta \to 0$

خواص:

$$① \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} \delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$$

***مهم
(خاصیت غربالگری)
(خاصیت سمپلینگ)

$$② \delta(x-a)f(x) = \delta(x-a)f(a)$$

(خاصیت شیفتینگ)

$$③ \delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$$

$$④ \frac{du_a(x)}{dx} = \delta(x-a), \quad \frac{dr_a(x)}{dx} = u_a(x)$$

ضربه $\xrightarrow{\text{انتگرال}}$ پله   پله $\xrightarrow{\text{انتگرال}}$ شیب

$$u_a(x) = u(x-a) = \begin{cases} 1 & , x \geqslant a \\ 0 & , x < a \end{cases}$$

ضربه $\xrightarrow{\text{انتگرال}}$ پله

پله $\xrightarrow{\text{انتگرال}}$ شیب

⑤ $\delta(x) \xrightarrow{F} 1$

اثبات: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(x) e^{-j\omega x}}_{\delta(x)} dx = 1$

⑥ $\delta(-x) = \delta(x)$

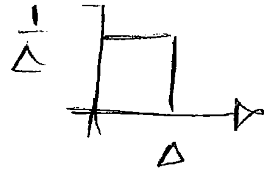
* مثال) سری فوریه تابع $f(x) = \delta(x)$, $-h < x < h$ را بدست آورید.

$$a_0 = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} \delta(x)\, dx = \frac{1}{h}$$

$$a_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} \underbrace{\delta(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x}_{\delta(x)} dx = \frac{1}{h}$$

طبق خاصیت ②

$$b_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} \underbrace{\delta(x) \sin \frac{n\pi}{\ell}}_{} x\, dx = 0$$



روی زوج بودن $\delta(x)$ اختلاف نظر است.

خواص زوج بودن را دارد. ⇐ با تقارن زوج!

اما اشکال اینه ⇐ آنه $\frac{2}{L}$ می‌شد

باید 0^+ و 0 توجه کرد ⇐ بهتره از زوج بودن استفاده نکنی ⇐ در سری بیشتر! ⇐ بنجیا

$$\overset{\delta(x)}{\uparrow}\; f(x) = \frac{1}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L} \cos \frac{n\pi}{L} x$$

جمله a_n وقتی n به سمت بی‌نهایت، صفر نشد!

اینجا اشکال نداره که بشه ⇐ چون اونور اینکه شد، اینور هم $\boxed{\delta(x)}$ هست و شده است!

دلیل =

در مورد تعمیم یافته‌ها ⇐ بجز خواص همگرایی، بقیه خواص قابل اجراست

تنها موضوعی که اجازه نداریم در تعمیم یافته‌ها استفاده کنید خواص همگرایی است!

؟ ← به هم می‌زنیم!

همگرایی ⇐ فقط برای شکل‌های پیوسته یا اونهایی که انتگرال نوع اول دارند.

تعمیم یافته‌ها خواص همگرایی ندارند

* مثال) تبدیل فوریه‌ی $f(x)=1$ را بدست آورید.

قبلاً گفتیم 1 تبدیل فوریه ندارد ⇐ چون انتگرال‌پذیر نیست.
حالا می‌گیم تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته را دارد!

$$\delta(x) \xrightarrow{F} 1$$

دوگان: $$1 \xrightarrow{F} 2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

* مثال) تبدیل فوریه $f(x)=\cos ax$ را بدست آورید

قبلاً گفتیم $\cos ax$ تبدیل فوریه ندارد ⇐ حالا می‌گیم تعمیم یافته دارد
قبلاً نمی‌تونستیم هسته را انتخاب کنیم ⇐ حالا می‌تونیم

اگه $\sin$ بود:

* هسته را 1 انتخاب کنیم:

$$1 \xrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$$

$$\frac{e^{jax}+e^{-jax}}{2} \xrightarrow{F} \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-a)\mp\delta(\omega+a)\right)$$

* "با استفاده از خواص!

* مثال ۱ تبدیل فوریه ی $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ را بدست آورید.

تعمیم یافته نباشی ⇐ توی معمولی کم هم کارت راحته!
می تونی بری توی فضای تعمیم یافته و بعد برگردی!
$xF(x)$ خاصیت هست که من بلدم ⇐ طرفین رو مشتق می کنم!
فعلاً نمی ترسم چون هر تابعی اینو تبدیل فوریه نداره ⇐ ولی حالا توی تعمیم یافته را اینجا کنم

خاصیت ۵

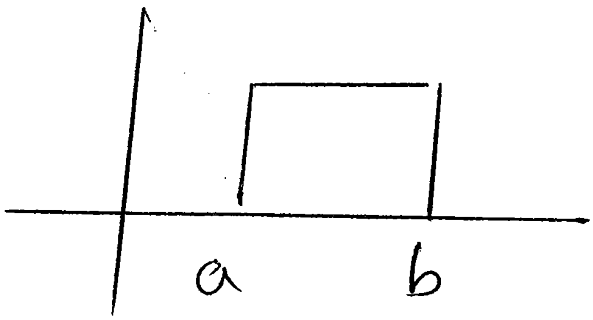
$$xf(x)=\sin x \xrightarrow{\text{تبدیل}} j\frac{dF(\omega)}{d\omega}=\frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)\right)$$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega}=\pi\left(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\right)$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} F(\omega)=\pi\left(u(\omega+1)-u(\omega-1)\right)=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1\\ 0, & |\omega|>1\end{cases}$$

یادآوری: $u_a(x)-u_b(x)$

شکل مقابل است!



* با استفاده از تعمیم یافته خارج شدیم: در مثال ۱۸!

اعداد مختلط

$\arg(-1+j)$ $\frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$

$(8)^{\frac{1}{3}} = (32)^{\frac{1}{5}}$ درست ، نادرست

$\ln(-1)$ 0 ، غلط ، درست $i\pi$

$\sin z = 2$ ندارد ، دارد

$ch^2 z + sh^2 z = 0$ دارد   ندارد

* مطالعه‌ی بخش ۱ از فصل دوم لازم است.

$$z = \underbrace{x + iy}_{\text{فرم دکارتی}} = \underbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{فرم قطبی (مثلثاتی)}} = \underbrace{re^{i\theta}}_{\text{فرم نمایی (اویلری)}} = \underbrace{(x, y) = (r, \theta)}_{\text{فرم زوج مرتب}}$$

$x = Re(z)$: قسمت حقیقی z

$y = Im(z)$: قسمت موهومی z

r: اندازه یا مدول یا هنگ z

$r = |z|$

θ: آرگومان یا فاز یا آوند z

$\theta = Arg\, z$

نکته‌ی موهومی :
$$\begin{cases} i = j = \sqrt{-1} \\ cis\theta = \cos\theta + i\sin\theta \end{cases}$$

* اولین چیزی که همراه یادبگیریم ⇐ تبدیل این‌ها به همدیگر.

* تبدیل فرم دکارتی به قطبی :

$$Z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} tg^{-1}\frac{y}{x} & \Leftarrow \text{اگر نقطه در ربع اول یا چهارم باشد} \\ \pi + tg^{-1}\frac{y}{x} & \Leftarrow \text{اگر نقطه در ربع دوم یا سوم باشد} \end{cases} \end{cases}$$

$$Z = -1 + j \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \pi + tg^{-1}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

* قضیه‌ی دموآور : برای به توان رساندن یا ریشه‌ی n ام گرفتن از یک عدد یا عبارت مختلط از این قضیه استفاده می‌کنیم.

$$Z = x + iy \xrightarrow{\text{تبدیل به فرم قطبی}} Z = r\,cis\theta$$

$$Z = r\,\text{cis}\,\theta \;\begin{cases} \rightarrow Z^n = r^n \text{cis}(n\theta) = r^n e^{in\theta} \\ \rightarrow (Z)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \text{cis}\,\dfrac{2k\pi+\theta}{n} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}} \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

اگه اصلاً کاری نکنیم ⇐ هر موقع خواستی روی عدد مختلط عملیات انجام بدی ⇐ فرم کلیشو بنویس

کلی‌ترین فرم: $Z = r\,\text{cis}(2k\pi + \theta)$

$$\begin{cases} r^n \text{cis}(\underbrace{2k\pi n}_{\text{خودش} \Leftarrow \text{مضرب صحیح } 2\pi} + \theta n) = r^n \text{cis}(n\theta) \\ r^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left(\dfrac{2k\pi}{n} + \dfrac{\theta}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}} \text{cis}\left(\dfrac{2k\pi+\theta}{n}\right) \end{cases}$$

⇐ دیگه نمی‌شه حذفش کرد!

نمی‌دونم مضرب صحیح 2π هست یا نه

* پس هر عدد مختلط ⇐ n ریشه دارد.

هر عدد مختلط، دقیقاً n ریشه دارد که اندازه‌ی تمامی آن‌ها یکسان و تفاوت آن‌ها در فاز آن‌هاست.

اندازه‌ی حاصل ⇐ $r^{\frac{1}{n}}$

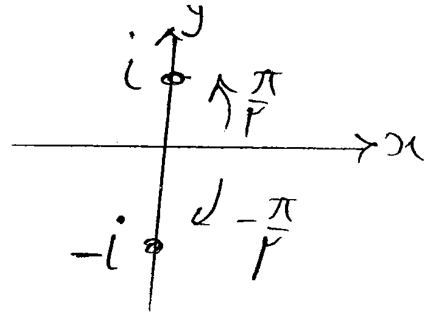
عوض k ⇐ فقط فاز عوض می‌شه!

به عبارت دیگر، تمامی ریشه‌های n ام یک عدد مختلط بر روی دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع $(r)^{\frac{1}{n}}$ قرار دارند.

* مثال / ریشه‌های معادله‌ی $z^3+i=0$ را بدست آورید.

$$z^3=-i \Rightarrow z=(-i)^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{\text{فرم قطبی}}$$

$$-i \to \begin{cases} r=1 \\ \theta=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



موهومی محض / حقیقی محض ⇐ بهتره از روی شکل θ را پیدا کنی

$$=\left(cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}=cis\left(\frac{2k\pi-\frac{\pi}{2}}{3}\right),\quad k=0,1,2$$

$$k=0 \Rightarrow z=cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

$$k=1 \Rightarrow z=cis\left(\frac{3\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$$

ربع سوم

$$k=2 \Rightarrow z=cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

* نقطه صفر شروع حل مسائل در ریاضی مهندسی ← اعداد مختلط رو بلد باشی!

* می‌تونه ریشه سوم را از حفظ نوشت جمع ریشه‌ها صفره!

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2} \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},\ i$$

* امکان نداره ، سؤال ریاضی مهندسی بخورد و یک تست از اعداد مختلط نباشه!

* لگاریتم اعداد مختلط

مثل همه توابع روی اعداد مختلط عملیات‌های ما بهتره طبق قطبیش بنویسیم!

$$z=re^{i(2k\pi+\theta)}$$

$$\text{جواب کلی :}\quad \boxed{\ln(z)=\ln(r)+i(2k\pi+\theta)}$$

$$\text{جواب اصلی :}\quad \boxed{\mathrm{Ln}(z)=\ln r+i\theta \quad -\pi<\theta<\pi}$$

* مثال) جواب اصلی عبارت‌های داده شده را بدست آورید

$$w=\ln(\underset{\text{حقیقی}}{-1})=\cancel{\ln(1)}+i(\pi)=i\pi$$

پس در اعداد مختلط لگاریتم اعداد منفی هم تعریف شده!

$$w=\ln(\underset{\text{موهومی خالص}}{i})=\cancel{\ln 1}+i\frac{\pi}{2}=\frac{i\pi}{2}$$

$$w=\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}$$

$$w=i^{i}$$

$$\ln w = i\underbrace{\ln i}_{\frac{i\pi}{2}} = i^{2}\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{w=e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

دو عدد مختلط به توان هم رسیدند ← حاصل حقیقی

استاد: من گفتم i^2 می‌شه 1 ، اینم اثبات ⇐

اثبات: $i^{2}=i\times i=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{1}=1 \Rightarrow$

اشتباه اثبات ⇐ در اعداد مختلط: $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\neq\sqrt{z_1 z_2}$

$$\begin{cases} i^{2}=-1 \\ i^{3}=-i \\ i^{4}=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ نتیجه: هر توانی از i خواستی حساب کنی مضارب ۴ آن را حذف کن!

*مثال)

تو ریاضی مهندسی اگه یه سوال این شکلی دیدند ⇐ اگه ریشه‌ها رو بخواهد که مخرج را صفر می‌کنند، حل کن! کاربرد

مثلاً $\ln(-1)$ رو چگونه حل کن

$$\int\frac{dz}{e^{z}+1}=\cdots \Rightarrow e^{z}+1=0 \Rightarrow e^{z}=-1 \Rightarrow z=\ln(-1)$$

مثال

$$z=i(2k\pi+\pi)$$

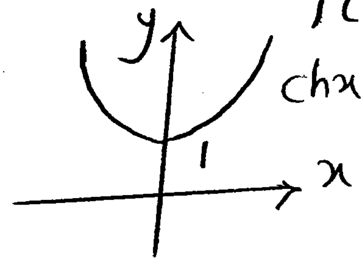
هر وقت بحث از جواب اصلی نبود ⇐ جواب کلی ✓

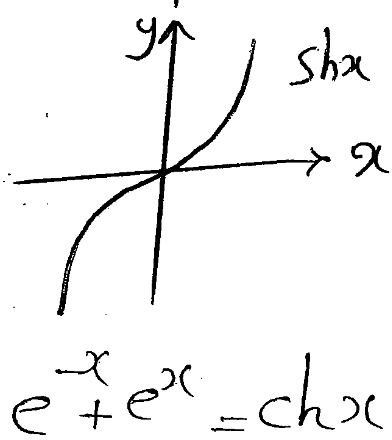
مهم‌ترین بحث امروز :

* مقایسه‌ی روابط مثلثاتی و هایپربولیکی :

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases} \xRightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cosh x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\ \sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} \end{cases}$$





$$\cos(ix) = \frac{e^{i^2x}+e^{-i^2x}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

درواقع $(\theta = ix)$

هنوزم از هر سه ترم هیجان‌زده‌ام ☺

خیلی مهم و پرکاربرد → (***)

$$\begin{cases} \cos(ix) = \operatorname{ch}x \quad , \quad \operatorname{ch}(ix) = \cos x \\ \sin(ix) = i\,\operatorname{sh}x \quad , \quad \operatorname{sh}(ix) = i\sin x \\ \operatorname{tg}(ix) = i\,\operatorname{tgh}x \quad , \quad \operatorname{tgh}(ix) = i\,\operatorname{tg}x \end{cases}$$

طرز حفظ کردنشو یادتون میدم!

۳ کاربرد دارند ← جلسه‌ی بعد می‌گم!

* i نقش مهمی داره ⇐ هویت رو هم عوض می‌کنه

مثلثاتی ← هایپربولیکی

هایپربولیکی ← مثلثاتی

می‌خوام $\sin x$ رو برحسب هایپربولیک.

$$\sin x = -i\,\operatorname{sh}(ix)$$

$$\operatorname{tgh}x = -i\,\operatorname{tg}(ix)$$

$ix \leftarrow x$

تکلیف علامت چی میشه؟ اگه طرف سادی نوشتیم ← مطابقت ⇐ $i\sin x = \operatorname{sh}(ix)$

اگر یک طرف نوشتیم ← عدم مطابقت ⇐ $\sin x = -i\,\operatorname{sh}(ix)$

پس اینجا می‌نویسیم $-i$

$\operatorname{tgh}x$ هم همینطور!

$$\cos x = ch(ix)$$

Cos تو نداره، کسی اشکال نمی‌کنه!

$$tg\,h(ix) = i\ tg(x)$$

یا

$$-i\ tg\,h(ix) = tg(x)$$

* جلسه‌ی بعد: نیم ساعت: اتمام اعداد مختلط ← ۳ تا کاربرد!

وارد توابع مختلط می‌شیم ← کتُ نگاشت کنی!

* بخش ۱، از فصل دوم را حتماً مطالعه کن!!!!

* تست کلی تبدیل فوریه حل!

از هفته‌ی بعد: هر بخش ← ۵ تا حلیا! ← هر جلسه تست و مسئله حل می‌کنیم!

$$\begin{cases} \cos(ix)=ch(x) \quad , \quad ch(ix)=\cos x \\ \sin(ix)=i\,sh x \quad , \quad sh(ix)=i\sin x \\ tg(ix)=i\,tgh x \quad , \quad tgh(ix)=i\,tg x \end{cases}$$

① بازسازی اتحادهای هایپربولیکی با استفاده از اتحادهای مثلثاتی و برعکس

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 ix+\sin^2 ix \Rightarrow ch^2 x-sh^2 x=1$$

کار وسطی اضافه ← حذفش می‌کنیم!

$$\begin{cases} \cos x \xrightarrow{\cos(ix)} ch x \\ \sin \xrightarrow{\sin(ix)} i\,sh x \\ tg x \xrightarrow{tg(ix)} i\,tgh x \end{cases}$$

* $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x \Rightarrow ch^2 x+sh^2 x=ch 2x$

* $1+tg^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1-tgh^2 x=\dfrac{1}{ch^2 x}$

* $\sin 2x=2\sin x\cos x \Rightarrow \cancel{i}\,sh 2x=2\cancel{i}\,sh x\,ch x$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \Rightarrow -sh^2 x = \frac{1-ch2x}{2}$$

$$sh^2 x = \frac{ch2x-1}{2}$$

$$ch^2 x + sh^2 x = \cosh 2x$$

برعکس هم میشه:

$$\xrightarrow{\text{تبدیل مثلثاتی}} \cos^2 + i^2 \sin^2 = \cos^2 - \sin^2 = \cos 2x \xrightarrow{\text{جایگزینی}} \cosh 2x$$

پس روابط مثلثاتی حفظ ⇐ روابط هایپربولیکی هم بدست میاد.

در ریاضیات: مطلب جدید مثل عبور از دره است (بالخصوص که می‌رین تو مجهول اره می‌موش 😊)
وقتی هر دفعه ازش رد میشی یه پل هست که استفاده کنی!
گاها ۱۰ بار از ۷ تاشو رفتی تو دره، ۳ تاشو پل ⇐ تجدید نظر کنید!
وقتی جایی مطلب جدید یاد گرفتی: حواست رو بیشتر جمع کن!

۲) بسط توابع

$$\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$$

$$= \sin x\, chy + i \cos x\, shy$$

وسطی‌ها صفرن ⇐ حذف.

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\, chy - i \sin x\, shy$$

$$\text{ch}\,z=\text{ch}(x+iy)=\text{ch}x\overset{\text{ch}\,iy}{\cos y}+i\,\text{sh}x\overset{\text{sh}\,iy}{\sin y}$$

یا $\cos(iz)=\cos(ix-y)=\text{ch}x\cos y+i\,\text{sh}x\sin y$

$$\text{sh}\,z=\text{sh}(x+iy)=\text{sh}x\overset{\cosh iy}{\cos y}+i\,\text{ch}x\overset{\sinh iy}{\sin y}$$

۳) حل معادلات هایپربولیکی

$$\text{sh}\,z+i=0\Rightarrow -i\sin(iz)+i=0$$

$$\sin(iz)=1\Rightarrow iz=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$z=-i\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{ch}^2z+\text{sh}^2z=0$$

$$\cos^2 iz-\sin^2 iz=0\Rightarrow\cos(2iz)=0$$

$$2iz=(2k-1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow z=-j(2k-1)\frac{\pi}{4}=j(2k-1)\frac{\pi}{4}$$

با هم منفی چون $2k-1$ هم مثبت هم منفی!

$$\begin{cases} z=k\pi\ , & k=0,\mp1,\mp2,\dots \\ z=-k\pi\ , & k=0,\mp1,\mp2,\dots \end{cases}$$

چون k هم مثبت هم منفی، با هم فرق ندارند

* اول یه سوال مطرح کنیم که آیا $\sin z = 2$ جواب داره؟

$$\sin(z) = \sin x \, \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

$-1 \le \sin x \le 1$

$1 < \infty$

$-\infty \quad \infty$

* پس $\sin z$ می‌تونه بزرگتر از ۱ باشه!

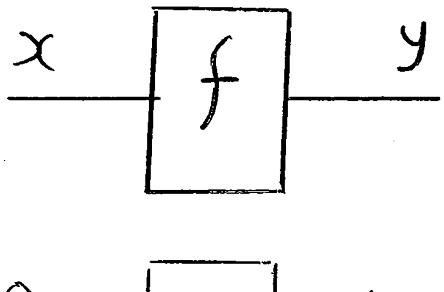
پس $\Leftarrow \sin z = 2$ جواب داره!

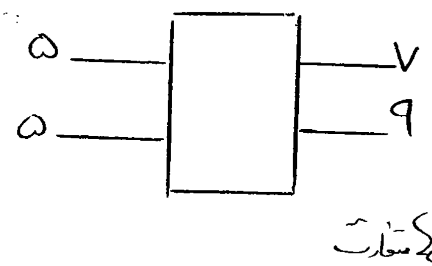
* توابع مختلط

روش کار شبیه سری فوریه. اول روش کلی. این روش کلی تضمین کننده است. سپس روش کلی کوتاه هم یاد می‌گیریم که کوتاه‌تر و ساده‌تر حل کنیم. در این بخش تفاوت با بخش‌های قبل این است ⇐ هر بخش که شروع می‌شه، به time احتیاج داریم
درک و فلسفه‌ی این مسئله! در این فصل علاوه بر اینکه نیاز دارید روش بدانید ← باید فلسفه را هم بدانید. باید
یک پل بین ذهن‌تون بین توابع حقیقی و توابع مختلط ایجاد بشود! که راحت‌تر از فضای حقیقی به فضای مختلط آمد.
سراغ تابع حقیقی شروع می‌کنیم. در ریاضیات قدیم دو شاخه کلی دارد: ریاضیات پایه و ریاضیات تخصصی.
ریاضیات پایه براساس نیاز عمومی بشر ایجاد شده، ریاضیات تخصصی براساس نیاز شخص ریاضی دادن ایجاد شده است.
مثلاً شارش: نیاز عمومی، تابع هم نیاز عمومی، اما ریاضیات تخصصی اسطوره‌هست ⇐ مثلاً فوریه داشت روی معادله موج کار
می‌کرد، ادامه راه حل فوریه را برای اینکه مشکل خودشو حل کنه ارائه داد، یا لاپلاس هم همینطور، اما اینها که تقسیم یافتند
الگوی تخصصی که اسطوره‌اند. دانشمند برای اینکه مشکل شخص مسئله خودشو حل کنه ⇐ ایده ⇐ بعد ایده سطح پیدا کرد.
انتظار می‌ره حداقل درک درستی از ریاضیات پایه داشته باشید. تابع یکی از همین مفاهیم است. مثلاً فضای
برای تهران ⇐ فضای سبز، تعداد ماشین ← یه سری ورودی و خروجی: بررسی می‌کنید افزایش سرب اثر دارد.
مثال مهندسی = بیشترین مصرف سوخت هواپیما در زمان اوج گیری!
مسیری که در زمان اوج گرفتن، کم‌ترین مصرف سوخت ⇐ می‌شینیم یه سری معادلات ریاضی بنویسیم:
فضایی که سری‌ها را تو ورودی ← یه سری‌ها را تو ورودی ⇐ یعنی خروجی ورودی که تغییر با خروجی بررسی ⇐ همان ایده تابع!

"تابع سیستمی است که به ازای ورودی مشخص، خروجی مشخص تولید کند"

تابع حقیقی، تابعی است که ورودی و خروجی آن عدد حقیقی باشد





ورودی یکسان باید خروجی یکسان بشه ⇐ !

تناقض: ورودی یکسان ⇐ خروجی متفاوت

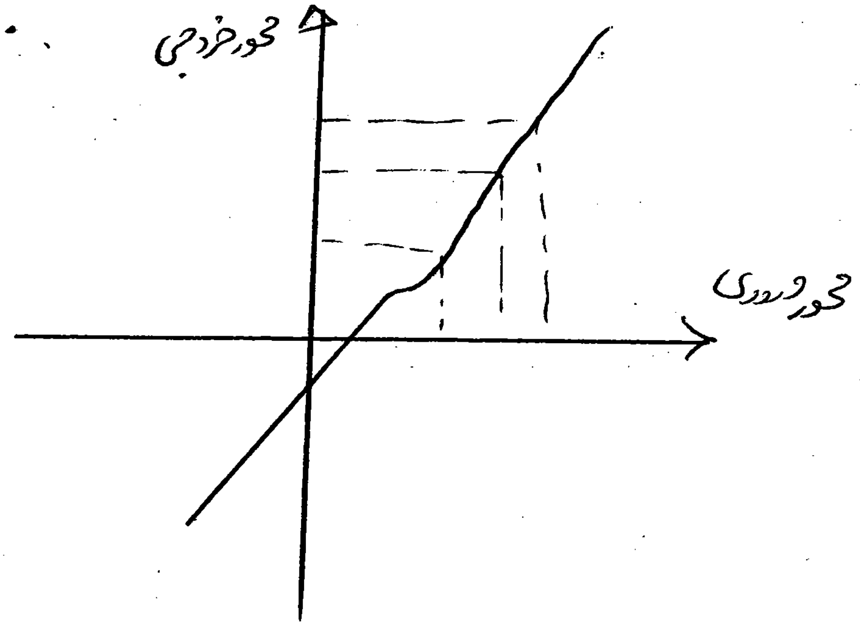
خروجی ورودی

$$(\underset{\text{ورودی}}{x}\ ,\ \underset{\text{خروجی}}{y})$$

چون ورودی عدد حقیقی ⇐ برای نمایش عدد حقیقی ـ یک بعد نیاز داریم ⇐ پس متناظر با هر ورودی یک عدد روی محور x داریم
" " " خروجی " " " " y خروجی

به ازای هر ورودی و خروجی ⇐ یک نقطه در صفحه مختصات

حالا این نقاط ورودی و خروجی زیاد ⇐ نمودار تابع : مجموعه زوج‌های ورودی و خروجی



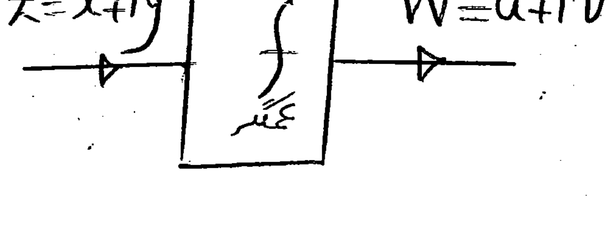
چرا نمودار اهمیت دارد؟

در ریاضی وقتی نمودار تابع را داریم ⇐ راحت‌تر، پیوستگی، حد، مشتق‌پذیری، خط مجانب، ... را با یک نگاه داریم

در مهندسی : وقتی نمودار داریم ⇐ رفتار سیستم را داریم : به ازای تغییرات ورودی ⇐ تغییرات خروجی
عملکرد سیستم را نشان می‌دهیم.

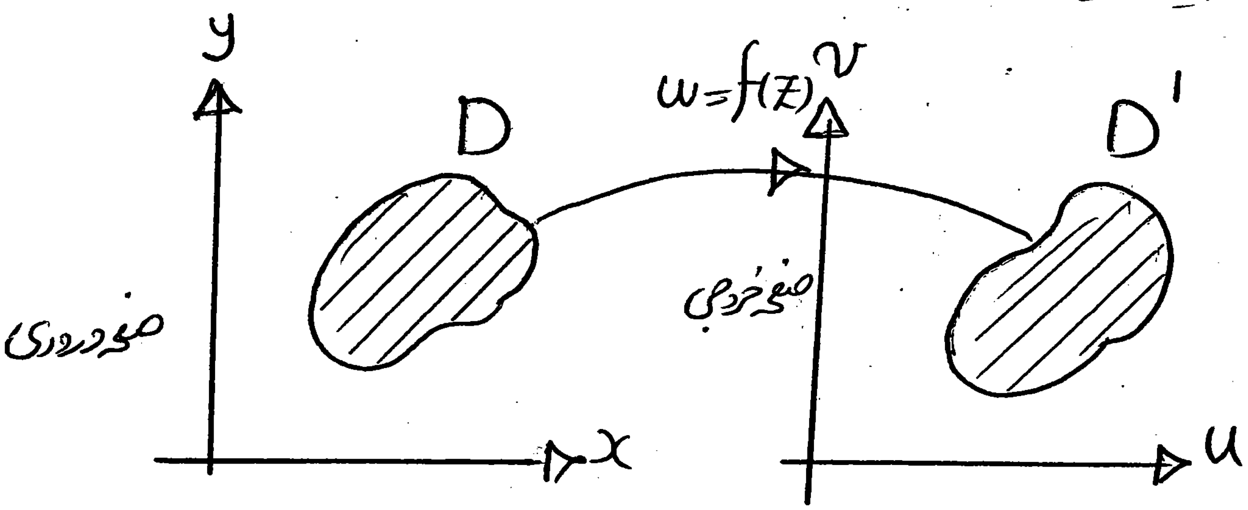
پس نمودار بسیار اهمیت دارد!

تابع مختلط : تابعی است که ورودی و خروجی آن عدد مختلط باشد



* چون تابع مختلط ۴ بعدی است ⟸ امکان رسم تابع مختلط وجود ندارد
(ورودی ۲ بعد، خروجی = ۲ بعد)

* آیا راهی هست که هدفی را که در رسم تابع داشتیم، تا حدی پوشش دهد؟ خوشبختانه پاسخ مثبت است.
تنها راهش این است که فضای ورودی را جداگانه و فضای خروجی را جداگانه!



اگر ورودی در فضای D تغییر کند، خروجی در فضای D' تغییر می‌کند

اگر دامنه‌ی f، ناحیه‌ی D باشد، برد f، ناحیه‌ی D' است

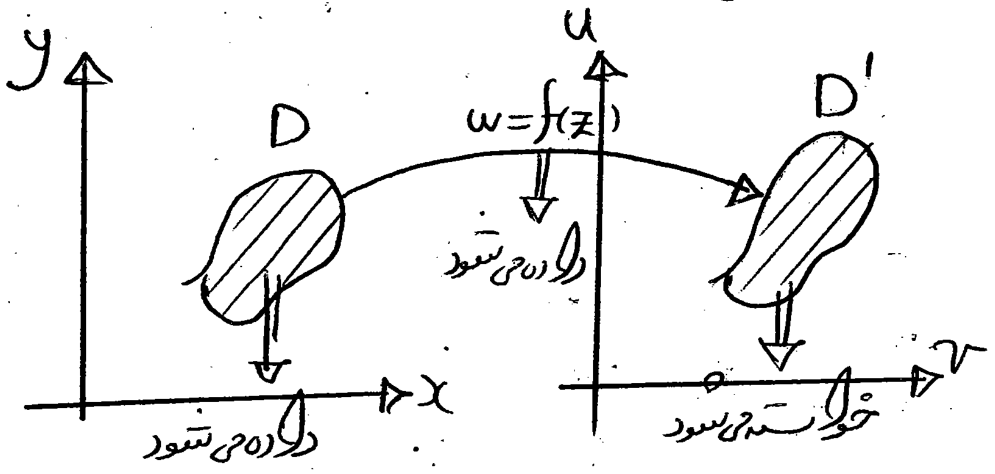
$\boxed{\text{نگاشت ناحیه‌ی } D \text{ توسط } w=f(z) \text{ ناحیه‌ی } D' \text{ است}}$

اینجا چون رسم نمودار را از دست دادیم، نگاشت این خلأ را پر می‌کند، همین دلیل بسیار اهمیت دارد!
هیچ تصوری از اعداد مختلط در ذهن نمی‌شه داشت ⟸ فقط تحلیلی می‌شه کار کرد!
نگاشت: فضای ورودی داده شده و $w=f(z)$ داده شده ← فضای خروجی را خواسته!

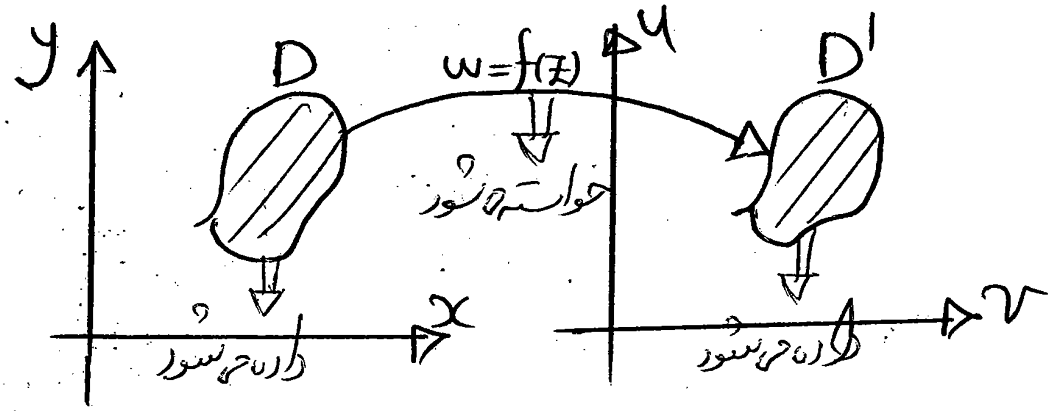
اگر به روش‌های گفته شده دقت کنید ⟸ ۹۵ درصد تست‌ها را می‌توانید ذهنی بزنید
نکته جالب‌تر: روش‌ها کوتاه‌تر از سری فوریه است
تست‌های نگاشت ۲۰ ثا حل می‌شن
لازمه‌ی آن است که روندی که گفته می‌شود را یاد بگیری!

(۵۰ درصد ریاضی مهندسی: توابع مختلط و نگاشت بخش مهم توابع مختلط است)

... نگاشت دو مدل سؤال طرح می شود:



① * نگاشت ناحیه‌ی D توسط w=f(z) را بدست آورید



② * کدام تابع ناحیه D را به D' تبدیل می کند (در واقع تصویری کند) نگاشت می‌دهد

[اگه خروجی بدن w=f(z) ← دوری بخوان ← همون ① است، چون داردن f(z) ← بدست بیاریم ولی اگه از ورودی خروجی ← دوری!

* روش کلی محاسبه‌ی نگاشت یک ناحیه توسط $W=f(z)$:

① معادله‌ی مرزها را می نویسیم

(عموماً مرزها یا خط اند یا دایره! آخر از این بود خود مسأله معادله را می دهد)

② از رابطه‌ی $W=f(z)$ سعی می کنیم u و v را برحسب x و y و یا x و y را برحسب u و v بدست آوریم.

۸۰

$$\begin{cases} w = u + iv \\ z = x + iy \end{cases}$$

* سؤال: در شرایط کلی یان که مطرح میشود: هم u و v بر حسب x و y، هم x و y بر حسب u و v، کدام را انتخاب می کنید؟

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{u-v} \\ y = \dfrac{v^2}{u+v} \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ y > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{u-v} > 0 \\ \dfrac{v^2}{u+v} > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{x-y} \\ v = \dfrac{y^2}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 1 \end{cases}$$

* سادگی بدست آوردن عبارات تغییرات u و v ایجادگی می شه بدست آورد! پیچیده است!

* پس اگر x و y بر حسب u و v باشد بهتر است!

* در شرایط کلی یان همواره بهتر است x و y را بر حسب u و v بدست آوریم

* سؤال: اگر معادله منحنی ورودی بر حسب z باشه! آیا نیازی هست، x و y را نیاز هست بر حسب u و v بدست آوریم؟ نیازی نیست!
یا برعکس

هدف این است که با توجه به تغییرات z ناحیه w را بدست بیاریم ⇐ حوزه تغییرات کدام تغییرات هم دارد

جزوه باما

* معادلات فضای ورودی

در مختصات دکارتی : $x^2+y^2=a^2$

در مختصات قطبی : $r=a$

بر حسب z : $|z|=a$

* معادلات فضای خروجی

در مختصات دکارتی : $u^2+v^2=a^2$

در مختصات قطبی : $r=a$

بر حسب w : $|w|=a$

اگر معادله ورودی بر حسب z داده شود، نیازی به محاسبه‌ی u و v بر حسب x و y و یا برعکس نمی‌باشد بلکه کافی است از رابطه‌ی $W=f(z)$، z را بر حسب w بدست آورده و در معادله داده شده، جایگذاری کنیم.

حل

*مثال) نگاشت ناحیه $|z-1|<1$ توسط $w=\frac{z}{z-2}$ را بدست آورید.

$$wz-2z=z \to z(w-1)=2w \to z=\frac{2w}{w-1}$$

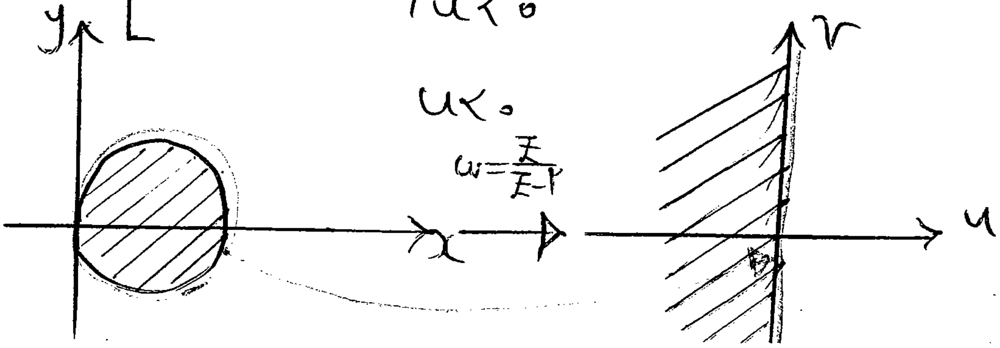
$$|z-1|<1 \to \left|\frac{2w}{w-1}-1\right|<1 \to \left|\frac{w+1}{w-1}\right|<1 \xrightarrow{\text{ذهنی}} u<0$$

خاصیت $\Rightarrow$

$$\begin{cases} |w+1|<|w-1| \\ |u+iv+1|^2<|u-iv-1|^2 \end{cases}$$

$$* \quad |f(z)|=\sqrt{Re^2(f(z))+Im^2(f(z))}$$

$$\begin{cases} (u+1)^2+v^2<(u-1)^2+v^2 \\ u^2+2u+1+v^2<u^2-2u+1+v^2 \\ 2u<-2u \\ 4u<0 \\ u<0 \end{cases}$$



* پس نیازی نشد، ابتدا z برحسب w را پیدا کنیم!

③ نگاشت مرزها را بدست آورده و رسم می‌کنیم

④ نگاشت مرزها را به کل ناحیه تعمیم می‌دهیم

** نگاشت مرز (های) ورودی، همواره مرزهای خروجی را تشکیل می‌دهد

جمع طلایی

* ایده:

نگاشت‌های مقدماتی

- $w = e^z$
- $w = \sin z$ یا $\cos z$ یا $\operatorname{sh} z$ یا $\operatorname{ch} z$
- $w = \frac{1}{z}$
- $w = \frac{az+b}{cz+d}$
- $w = \ln z$
- $w = z + \frac{1}{z}$

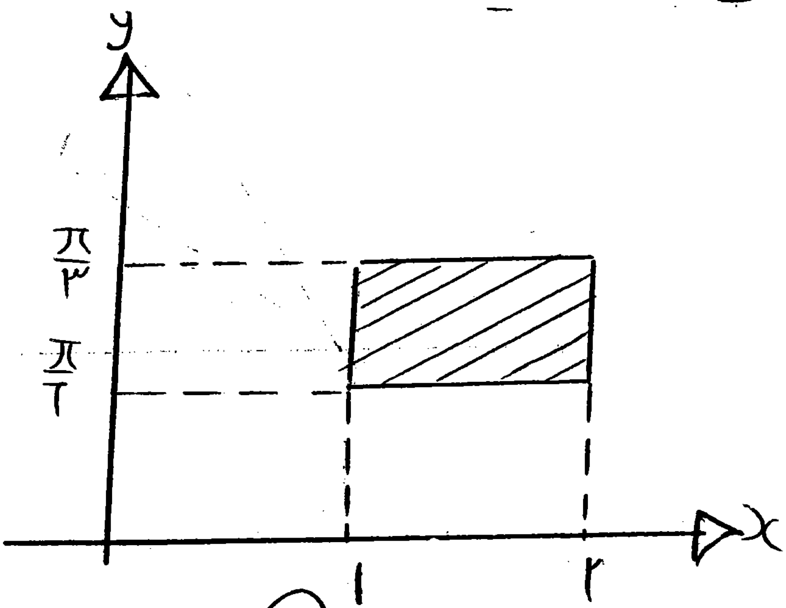
نگاشت‌های ترکیبی

اصل درس نگاشت‌های مقدماتی است، بیشتر به آن‌ها می‌پردازیم! اما باید بریم یاد بگیریم ها، ترکیبی کردنشون هم بلد باشیم!

اکثر تست‌ها نگاشت‌های ترکیبی

پس اول درس از تست حل نمی‌کنیم تا آخر درست!

* مثال) نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $W=e^z$ را بدست آورید.



③ $\begin{cases} u = e\cos y \\ v = e\sin y \end{cases} \longrightarrow u^2+v^2 = e^2$

① $\begin{cases} x=1 \Longrightarrow \\ x=2 \Longrightarrow \quad \longrightarrow u^2+v^2 = e^4 \\ y=\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \begin{cases} u = e^x\cos(\frac{\pi}{2}) \\ v = e^x\sin(\frac{\pi}{2}) \end{cases} \longrightarrow v = u\,tg(\frac{\pi}{2}) \\ y=\frac{\pi}{3} \Longrightarrow \quad \longrightarrow v = u\,tg(\frac{\pi}{3}) \end{cases}$

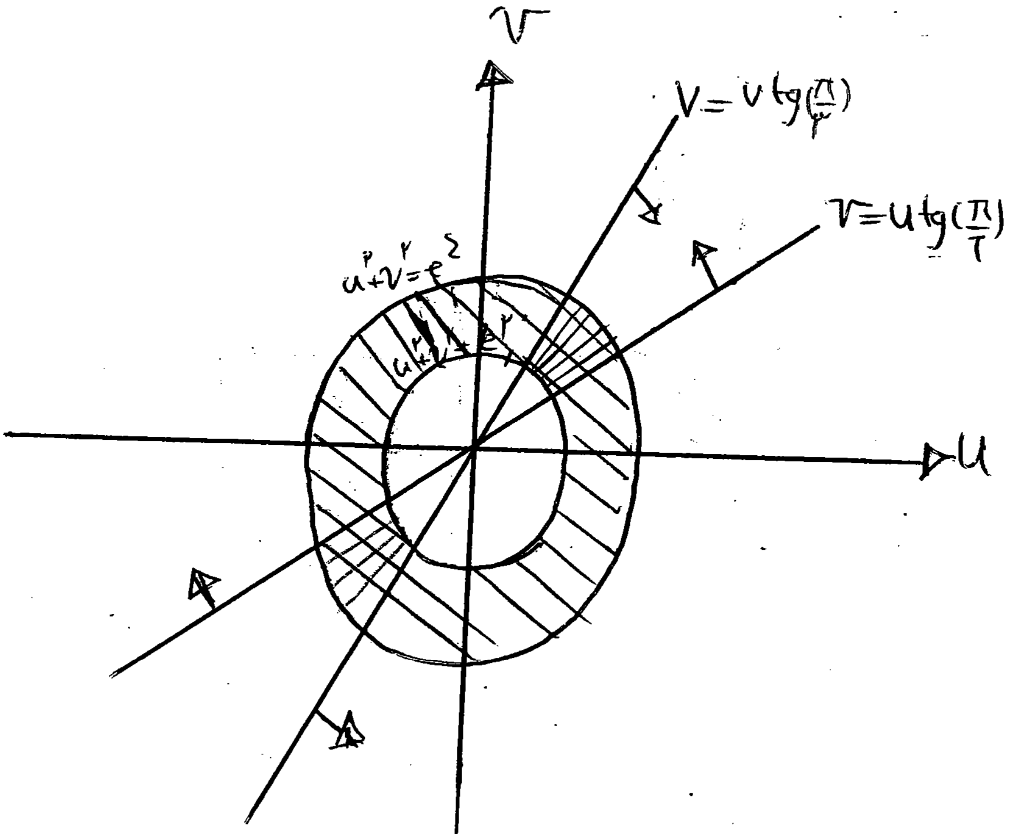
② $u+iv = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$\Longrightarrow \begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$

$\begin{cases} x = t+2 \\ y = \frac{t^2}{1-t} \end{cases}$

* سؤال: باید پارامتر t را از بین ببرد

* بالا هدف همه ← پس باید پارامتر x حذف شود



از e^2 بیشتر   از e^4 کمتر   از این بیشتر، از این کمتر

بین $x=1$ و $x=2$ ⇐ بین دوایر e^2 و e^4 *

بین $y=\frac{\pi}{6}$ و $y=\frac{\pi}{3}$ ⇐ بین خطوط $u\,tg\frac{\pi}{6}$ و $u\,tg\frac{\pi}{3}$ *

از این بیشتر   از این کمتر   از این بیشتر   از این کمتر

اینجا جواب نیست!

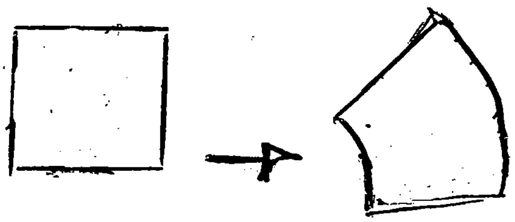
چونکه تکه محدوده دو تکه نمی‌شه!

چون u و v مثبتند!

بین خطوط بالایی درسته!

از دو اشتراک هم می‌شه گفت

⇐ اصلاً خط راستش نیست!



مرز، محدوده مرز!

$$W = e^{f(z)} \Rightarrow \begin{cases} |w| = e^{Re(f(z))} \\ \arg(w) = Im(f(z)) \end{cases}$$

اثبات : $e^{Re(f(z)) + i\,Im(f(z))} = \underbrace{e^{Re(f(z))}}_{\equiv\, r}\, e^{i\,\overbrace{Im(f(z))}^{\equiv\, \theta}} \quad e^{i\theta}$

① $W = e^{z} \Rightarrow \begin{cases} |w| = e^{x} \\ \arg(w) = y \end{cases}$

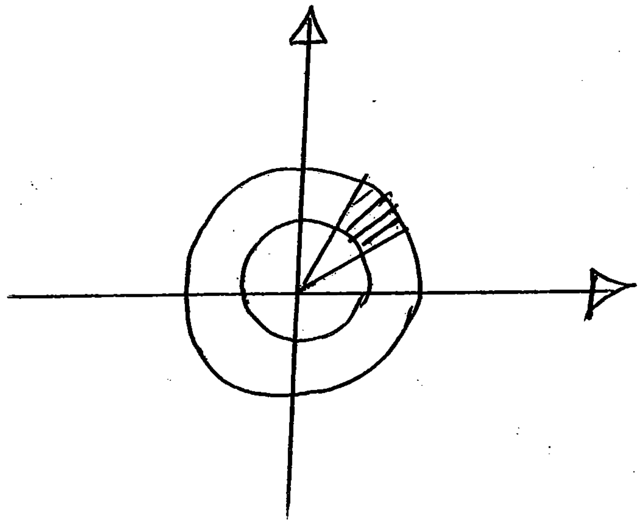
② $w = e^{z^2} \Rightarrow \begin{cases} |w| = e^{x^2 - y^2} \\ \arg(w) = 2xy \end{cases}$

③ $W = e^{\sin z} \Rightarrow \begin{cases} |w| = e^{\sin x \operatorname{ch} y} \\ \arg(w) = \cos x \operatorname{sh} y \end{cases}$

* هر تابعی که بتوانند قسمت حقیقی و موهومی جدا ⇐ اندازه و آرگومان !

راه حل کوتاه مثال:

$$\begin{cases} |w| = e^{x} \quad , \quad 1 < x < 2 \Rightarrow e < |w| < e^{2} \\ \arg(w) = y \quad , \quad \frac{\pi}{6} < y < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \arg(w) < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

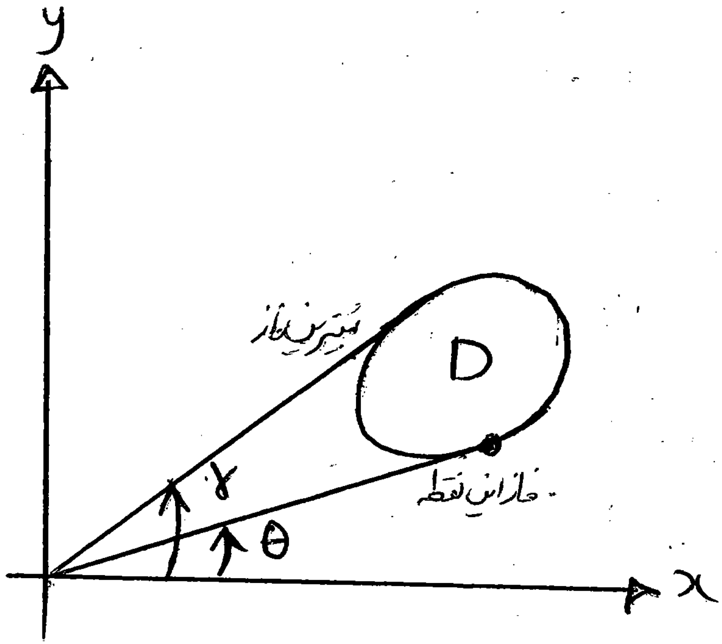


تو تست‌ها از آرگومان شروع کن ← به گزینه‌ها نگاه ← هر گزینه‌ای که بین $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ نبود حذف!

حالا اگه دوتا گزینه بود که آرگومانش بین $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ ← حالا بریم سراغ اندازه‌ها!

امکان نداره سوال نگاشت e^z بیش از ۱ ثانیه زمان ببره! ☺

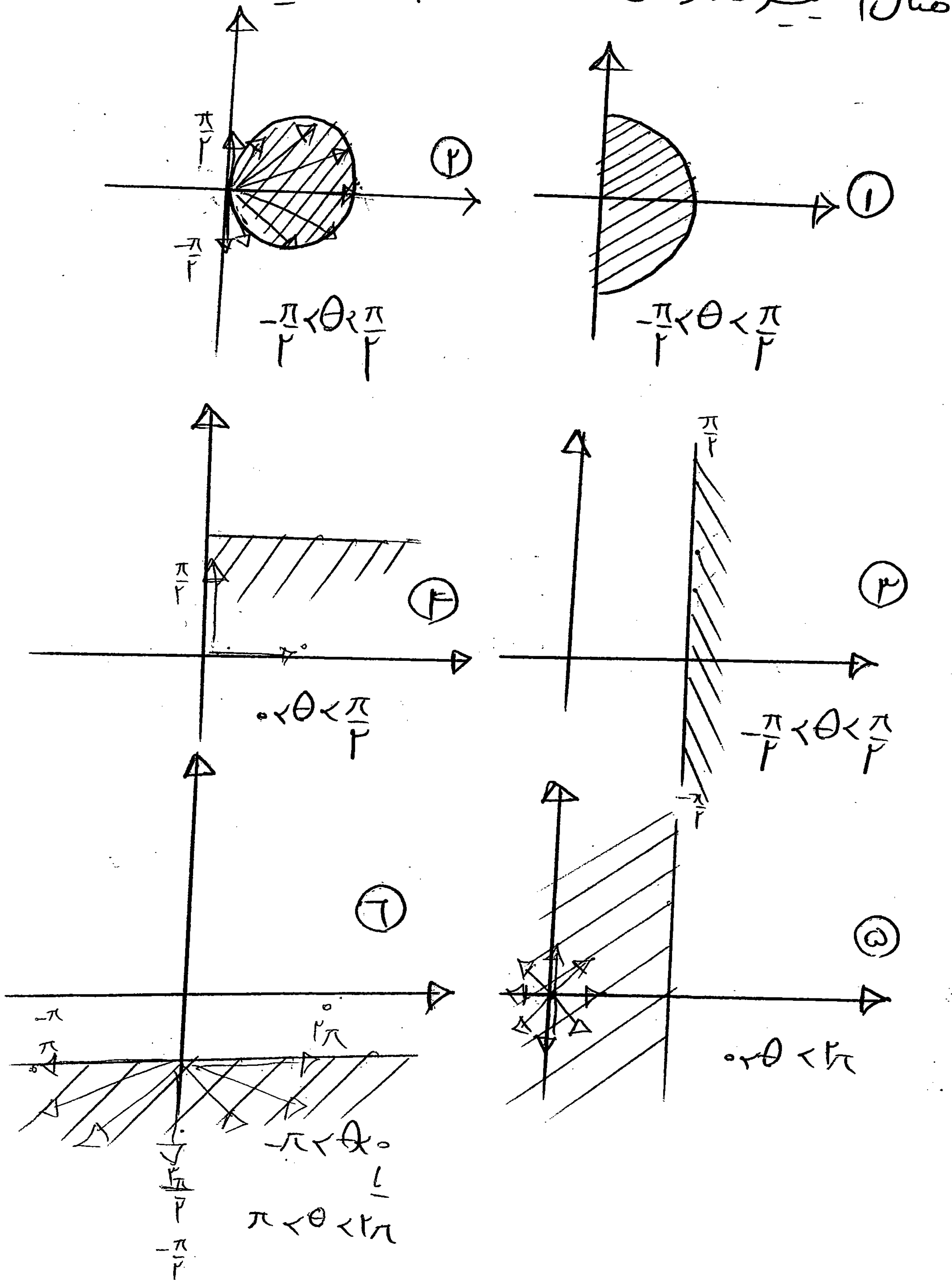
پس برای نگاشت e^z هیچ وقت رسم شکل نیاز نیست!

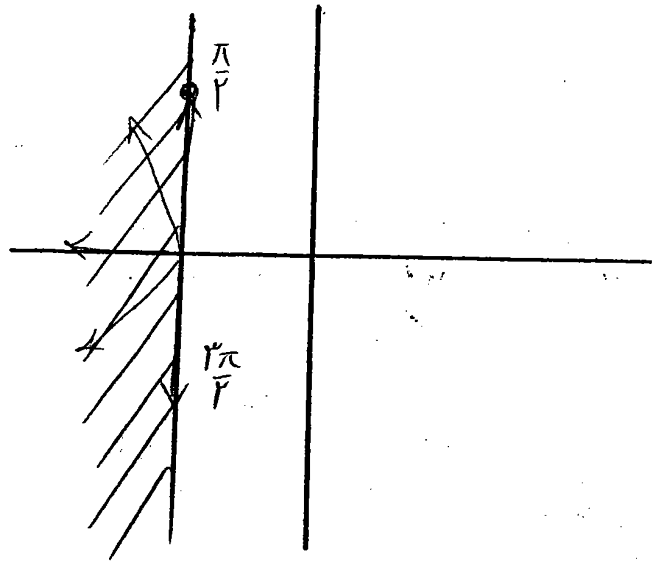


$\theta <$ تغییرات $< \gamma$

$\theta < \operatorname{Arg} D < \gamma$

* مثال) تغییر فاز نواحی داده شده را بدست آورید.





$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

حلبدرم : ص ۱۷۱، تست ۵۶ ص ۱۸۶ : حلبادل

تست کامپیوتر ۸۲

$\operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{2} y \Leftarrow 0 < y < 2 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2} y < \pi$

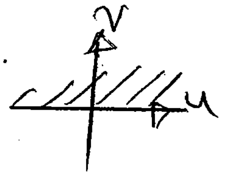
$0 < |\,| < \infty \Rightarrow |w| = e^{\frac{\pi}{2} x} \Leftarrow$ گزینه ۵ غ

گزینه ① $\Leftarrow -\pi < \; < 0 \Rightarrow$ X

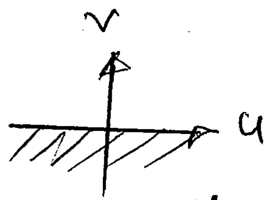
گزینه ② $\Leftarrow 0 < \; < \pi \Rightarrow$ ✓

گزینه ③ $\Leftarrow -\frac{\pi}{2} < \; < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ X

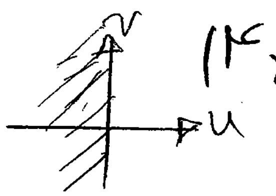
گزینه ④ $\Leftarrow \frac{\pi}{2} < \; < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ X



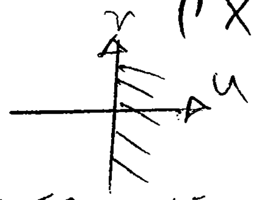
(۲ ✓



(۱ X

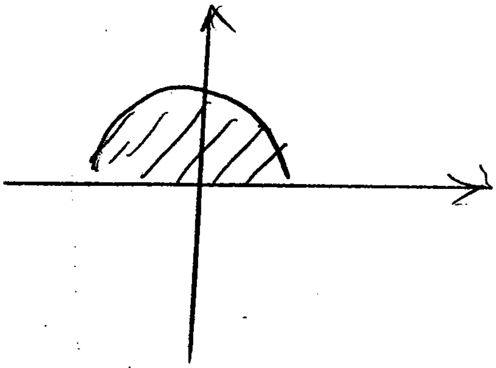


(۴ X



(۳ X

اگه تو گزینه ۲ هم آرگومان $0 < \; < \pi$ ← فقط گزینه ⑤ درسته!



۱۵) ×

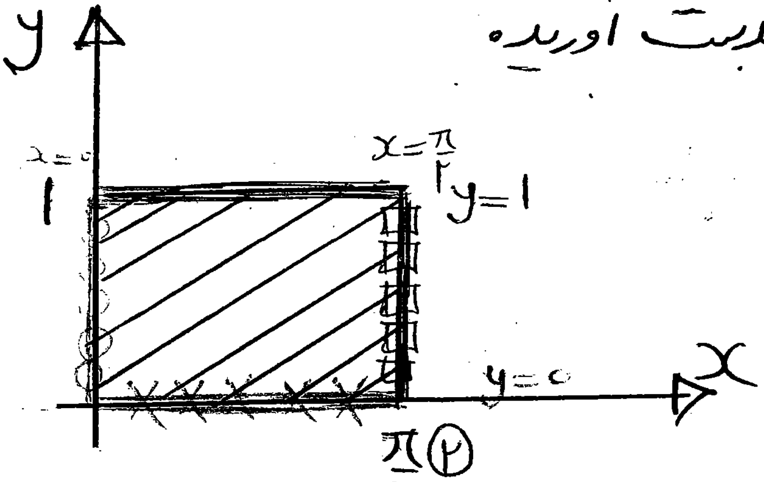
* اندازه محدود ⇐ غ

$\arg w = \frac{\pi}{2} y \Rightarrow 0 < \arg w < \pi \Rightarrow 2 \checkmark$

$0 < y < 2$

درباره روش کلی

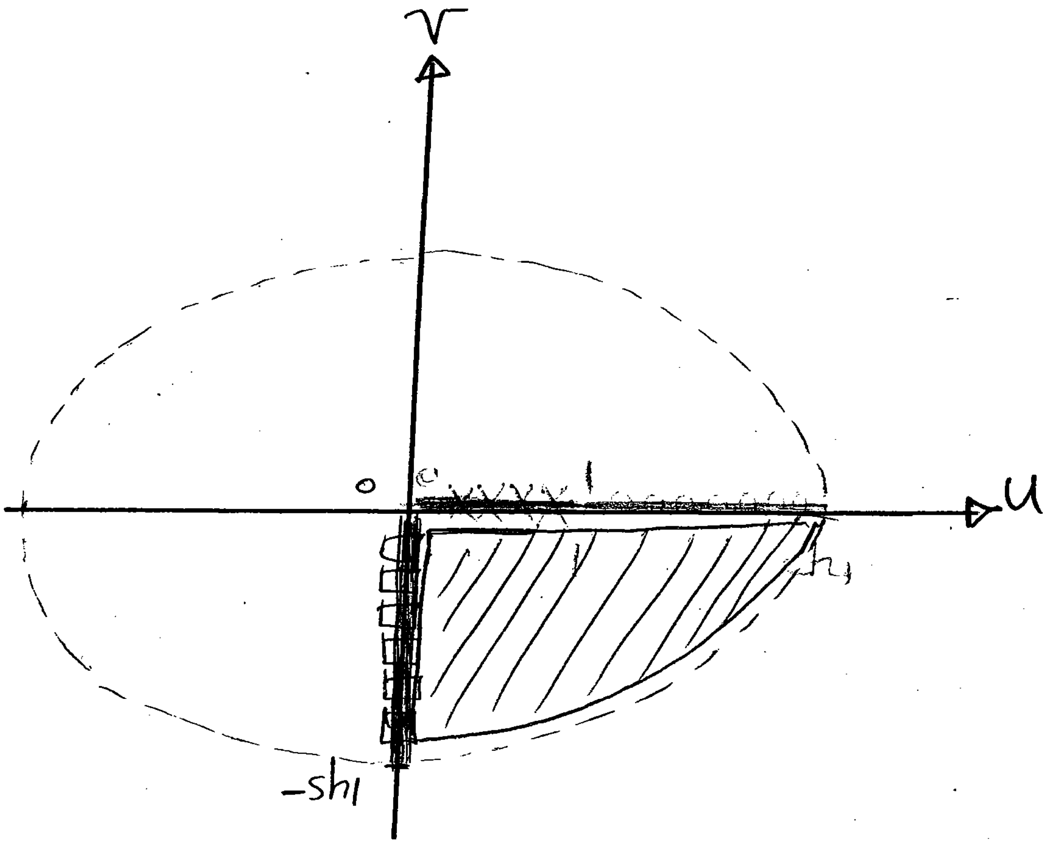
* مثال نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط $W = \cos z$ را بدست آورید



$u + iv = \cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$

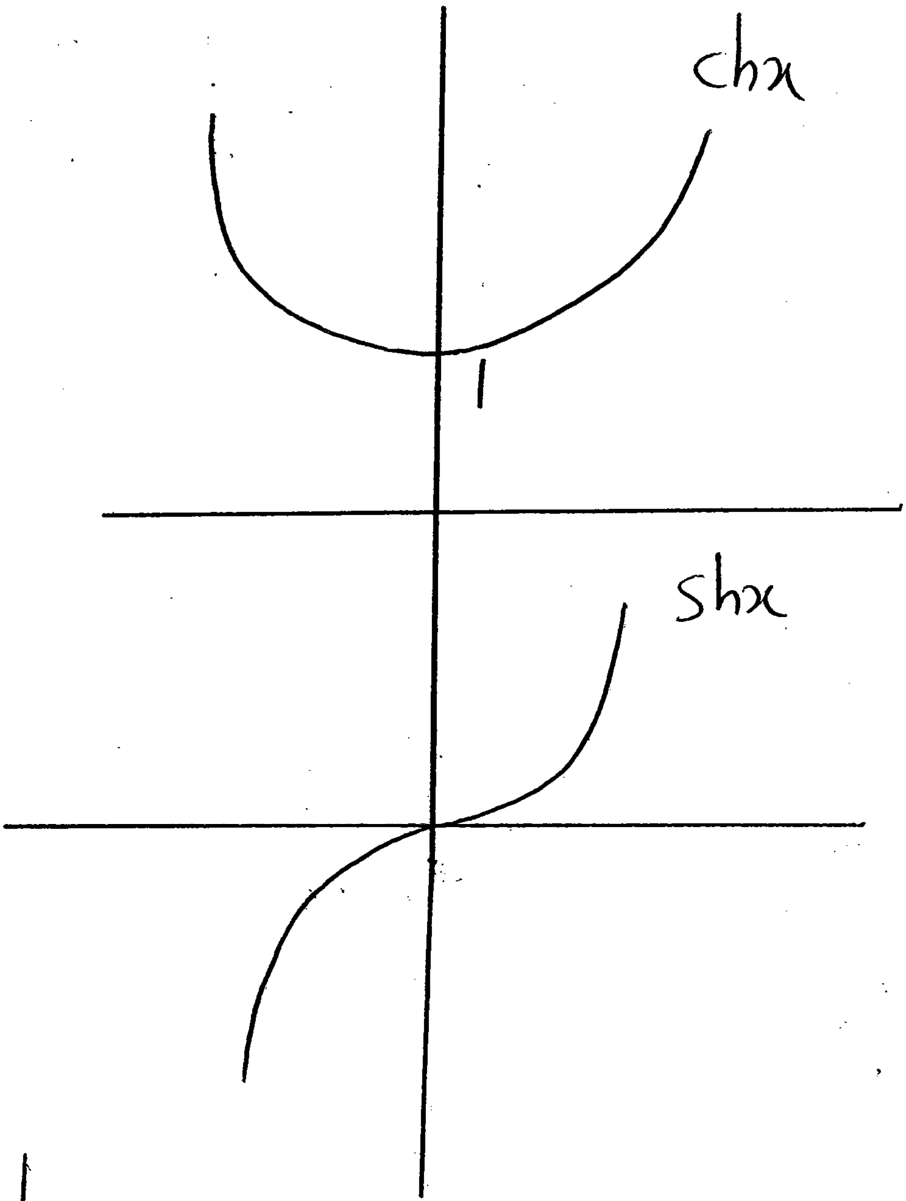
(3) $\begin{cases} u = \cos x \operatorname{ch} y \\ v = -\sin x \operatorname{sh} y \end{cases}$

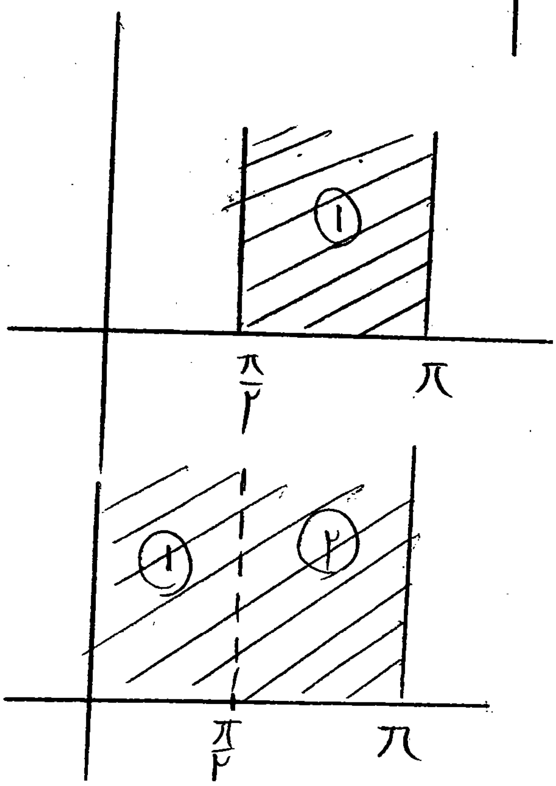
(1) $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \cosh y \\ v = 0 \end{cases} \rightarrow 0 < y < 1 \Rightarrow 1 < \cosh y < \cosh 1 \Rightarrow 1 < u < \cdots \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = -\operatorname{sh} y \end{cases} \Rightarrow 0 < y < 1 \Rightarrow -\operatorname{sh}1 < -\operatorname{sh} y < 0 \Rightarrow -\operatorname{sh}1 < v < \cdots \\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < \cos x < 1 \Rightarrow 0 < u < 1 \\ y = 1 \Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \operatorname{ch} 1 \\ v = -\sin x \operatorname{sh} 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 1} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 1} = 1 \end{cases}$



* ۲ تا انتخاب داریم D یا ← عددگذاری و حل!

* نگاشت نیم نوارهای موازی محور قائم به عرض یک ربع
دایره مثلثاتی توسط Sinz و Cosz همواره
یک ربع مختصات دکارتی در خروجی است که برای
تعیین ربع کافی است، علامت u و v را تشخیص دهیم

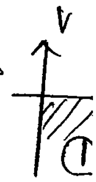




$\cosh y$ ← همیشه مثبت

$$w=\sin z=\begin{cases} u=\sin x \cosh y \\ v=\cos x \sinh y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u>0 \\ v<0 \end{cases}$$

$y>0 \Rightarrow \sinh y>0$



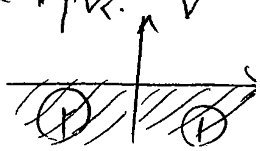
$$w=\cos z=\begin{cases} u=\cos x \cosh y \\ v=-\sin x \sinh y \end{cases} \longrightarrow$$

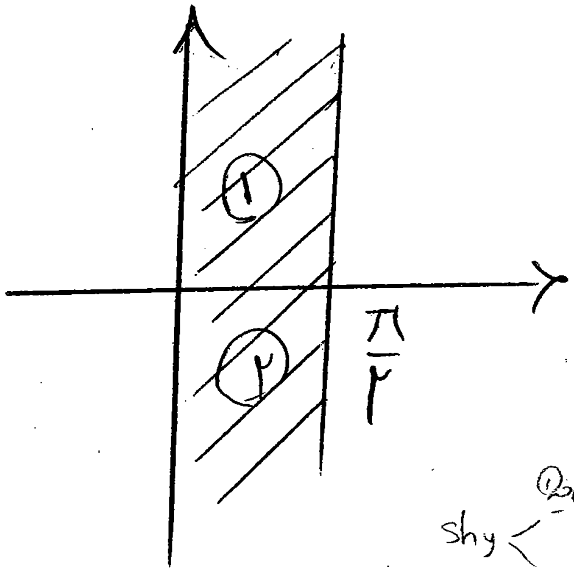
$(y>0)$

$\sinh y>0$

$① \to \begin{cases} u>0 \\ v<0 \end{cases}$

$② \to \begin{cases} u<0 \\ v<0 \end{cases}$

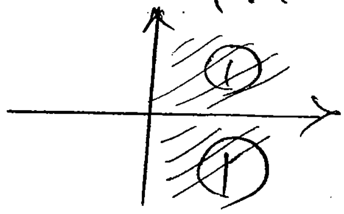




$$w = \sin z = \begin{cases} u = \sin x \operatorname{ch} \cancel{y} \\ v = \cos x \operatorname{sh} y \end{cases}$$

① $\begin{cases} u>0 \\ v>0 \end{cases}$

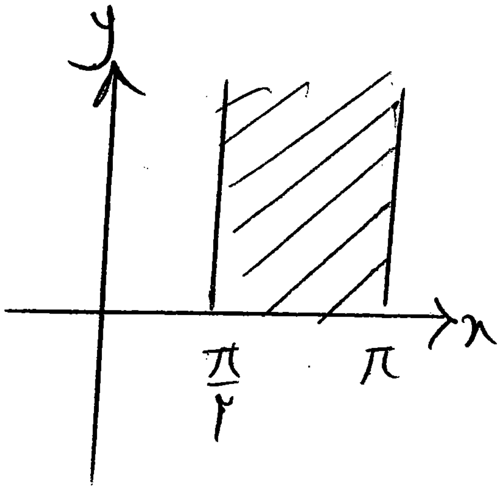
② $\begin{cases} u>0 \\ v<0 \end{cases}$



$\operatorname{sh} y$ < ① در $y>0 \Rightarrow \operatorname{sh} y>0$; ② در $y<0 \Rightarrow \operatorname{sh} y<0$

جلد دوم، ص ۱۶۱، سؤال ۱۱

* برق ۷۷)



$u = -\cos x \operatorname{ch} \cancel{y} \quad u>0$

$v = \sin x \operatorname{sh} \cancel{y} \quad v>0$

۱۷) ربع اول

۲) ربع دوم

۳) نیم نوار $\{y \geq 0 \,,\, 0 \leq x \leq 1\}$

۴) نیم نوار $\{y \geq 0 \,,\, -1 < x < 0\}$

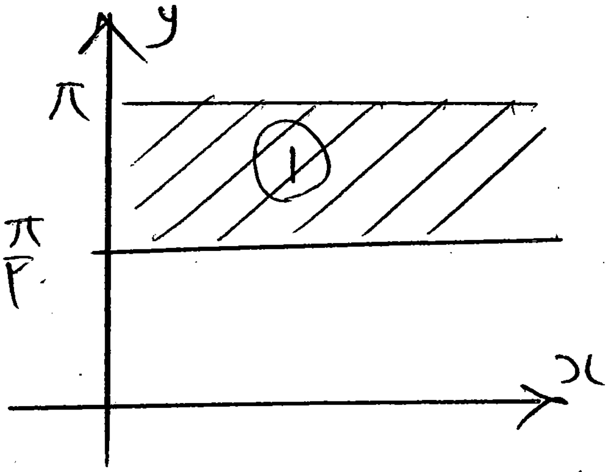
* نگاشت نیم نوارهای موازی محور افقی به عرض یک ربع دایره

مثلثاتی توسط shZ و chZ همواره یک ربع

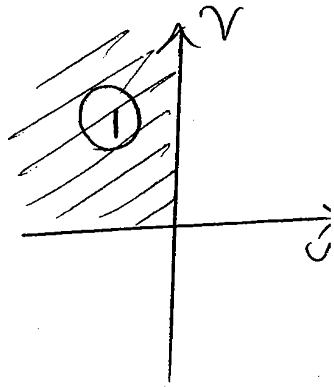
مختصات دکارتی در خروجی است که برای تعیین ربع خاص

است علامت u و v را مشخص دهیم

* مثال / نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط $w=\operatorname{ch}Z$ را بدست آورید



$$\begin{cases} u=\operatorname{ch}x\cos y \\ v=\operatorname{sh}x\sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u<0 \\ v>0 \end{cases}$$



* نگاشت توسط $W=\frac{1}{Z}$

(اولین نگاشت که x و y برحسب u و v)

$$Z=\frac{1}{w} \Longrightarrow x+iy=\frac{1}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

$$f(z)\,\overline{f(z)}=|f(z)|^2$$

voice } در ضرب دو مزدوج در هم ⇐ مخرج به ریشه اندازه!

نگاشت توسط $W=f(z)$

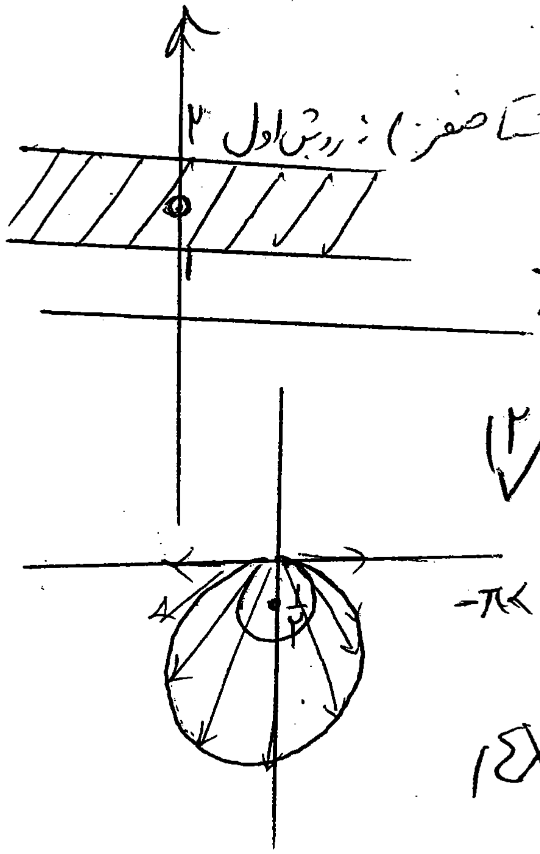
- محاسبه x و y برحسب u و v امکان‌پذیر است
  - ⇐ هیچ محدودیتی در معادله مرز فضای ورودی وجود ندارد
- محاسبه x و y برحسب u و v امکان‌پذیر نیست (پیچیده است)
  - ⇐ ۱) اگر فضای ورودی مختصات دکارتی باشد معادله مرز فضا $\begin{cases} x=\text{مقدار ثابت} \\ y=\text{مقدار ثابت} \end{cases}$ از نوع اینها باشد
  - ⇐ ۲) اگر فضای ورودی مختصات قطبی باشد معادله مرز فضا $\begin{cases} r=\text{مقدار ثابت} \\ \theta=\text{مقدار ثابت} \end{cases}$ از نوع اینها باشد

۸۸

صفحه ۱۶۷، س ۳۷

*مطابق ۸۳)

همه نکات که باید با فاز و اندازه کار کنید ← e^{z} $\frac{1}{z}$ ⇐ اولویت با اندازه و فاز ⇐ توضیح اندازه و فاز ⇐ اولویت‌ها
(قطعات نوشته)
(فاز ورودی ⇐ ۰ تا π ⇐ خروجی $-\pi$ تا صفر) : روش اول ۲



$Z=\frac{3}{2}i \to \omega=-\frac{2}{3}i$

۱) ✗ ۲) ✓ ۳) ✗ ۴) ✗

$-\pi < \theta < 0$

۱ روش تغییر فاز

۲ تست نقطه

۳ روش کلی

گزینه اول را در ۱ نقطه شروع کرد

$w=\frac{1}{z}$ ← اندازه صفر محدود ← {صفر و ورودی شد ⇐ خروجی نامحدود / صفر جزو ورودی نباشد ⇐ خروجی محدود}

صفر جزو ورودی نیست ⇐ خروجی محدود ⇐ ۱ و ۳ حذف چون اندازه‌ها نامحدود دارند

حالا $Z=\frac{3}{2}i$ ← $\omega=-\frac{2}{3}i$ ⇐ گ۴

* مثال) نگاشت منحنی $x^2y^3+x^4+y^3+y=1$ توسط $w=\frac{1}{z}$ را بدست آورید.

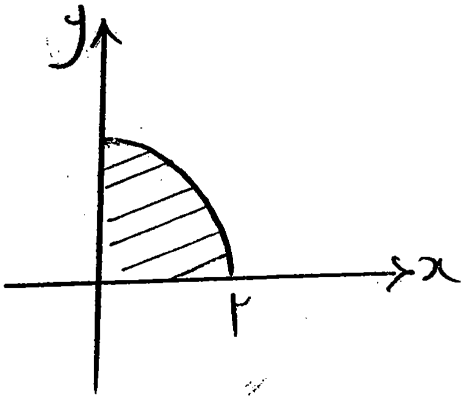
$$\frac{-u^2v^3}{(u^2+v^2)^5}+\frac{u^4}{(u^2+v^2)^4}-\frac{v^3}{(u^2+v^2)^3}-\frac{v}{u^2+v^2}=1$$

* $\sin z$ و $\cos z$ غیرکراندار هم است.

* نگاشت $w=\frac{1}{z}$، اندازه‌ی z را وارون و آرگ را قرینه می‌کند

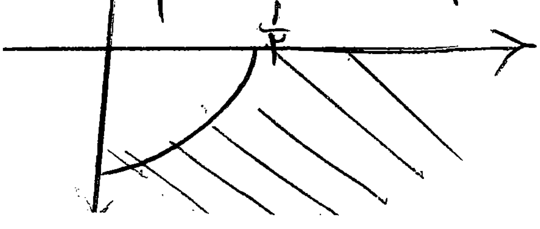
$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{r\,cis\theta}=\frac{1}{r}cis(-\theta)$$

* مثال) نگاشت ناحیه‌ی هاشورخورده توسط $w=\frac{1}{z}$ را بدست آورید



$r<2 \longrightarrow \frac{1}{r}>\frac{1}{2}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{2}<-\theta<0$



* نقاط مهم
  - به ازای آن که خروجی صفر یا ∞ شود
  - به ازای آن که محاسبه‌ی خروجی ساده است

۳ـ روش کلی

کماکان به هرز نرید!

$$y=1 \Rightarrow \frac{-v}{u^2+v^2}=1 \Rightarrow u^2+v^2+v=1$$

دایره‌ای به مرکز آن روی محور v ها است! ← گزینه ۲

$$(u)^2+(v-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4}$$

یادآوری معادله دایره :

① $|z-z_0|=r \equiv$ معادله دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع r

$z_0=x_0+iy_0$

② $z=z_0+re^{i\theta} \equiv$ //

③ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \equiv$ //

④ $\begin{cases} x=x_0+r\cos\theta \\ y=y_0+r\sin\theta \end{cases} \equiv$ //

⑤ $x^2+y^2+ax+by+c=0 \rightarrow O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}\\-\frac{b}{2}\end{matrix}\right.$ و $R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$

اثبات ۵ : $(x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}+(y+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}+c=0$

حل بدهیم : ص ۱۶۸ ، سؤال ۴

* مطالب ۸۵

۱)　　　　　　۲)

۳)　　　　　　۴) ✓

$$\frac{-v}{\cancel{u^2+v^2}}=\frac{u^2}{(u^2+v^2)^{\cancel{2}}}$$

* در نگاشت $w=f(z)$

ناحیه ورودی داده می‌شود ← ناحیه خروجی خواسته می‌شود

↳ به روش های تحلیلی مسأله را حل می‌کنیم
(تعریف، نقاط مهم و ...)

معادله ورودی داده می‌شود ← معادله خروجی خواسته می‌شود

↳ محاسبه می‌کنیم

ص ۱۱۸، تست
(مکانیک ۸۵)

۱)   ۲)   ۳)   ۴)

* گروه دوم: محاسبه ✓

$$\begin{cases} u = \operatorname{ch} x \cos y \\ v = \operatorname{sh} x \sin y \end{cases} \xrightarrow{y = \frac{\pi}{4}} \begin{cases} u = \operatorname{ch} x \frac{\sqrt{2}}{2} \\ v = \operatorname{sh} x \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow 2u^2 - 2v^2 =$$

* ch و sh ⇐ ، $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$

ص ۱۷۴، تست ۷۱

(هوافضا ۸۳)

۱)   ۲)

۳) ✓   ۴)

* فازورودی $\frac{3\pi}{2} < \alpha$ ⇐ $0 > \alpha > -\frac{\pi}{2}$ خروجی

ص ۱۶۵ س ۴۳

* مکانیک ۸۷

سطح الرعدی سطحی ولیخودی : محاسبه ✓

۱)   ۲) $u=\frac{1}{2}$ ✓   ۳)   ۴)

$$w=\frac{i}{z} \Rightarrow z=\frac{i}{w} \Rightarrow \left|\frac{i}{w}-i\right|=1$$

$$|i|\left|\frac{1}{w}-1\right|=1$$

$$\left|\frac{1-w}{w}\right|=1 \Rightarrow |1-w|^2=|w|^2 \Rightarrow Re^2(1-w)+\cancel{Im^2 w}$$

$$=Re^2(w)+\cancel{Im^2 w}$$

$$(1-u)^2=u^2 \Rightarrow 1+\cancel{u^2}-2u=\cancel{u^2} \Rightarrow 1-2u=0$$

$$u=\frac{1}{2}$$

یادآوری : $|f(z)|^2=Re^2(f(z))+Im^2(f(z))$

صفحه ۱۷۲، س ...
* مکانیک ۸۸

صفحه ۱۷۲، س ۵۹
* کامپیوتر ۸۸

۱)   ۲)   ۳)   ۴) $v = -\frac{1}{2}u$ ✓

$$\frac{-v}{\cancel{u^2+v^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{u}{\cancel{u^2+v^2}}$$

صفحه ۱۷۲، س ۶۰
* کامپیوتر ۸۹

۱)   ۲)

۳)   ۴) ✓

مرکز $(0, \frac{1}{2})$ ⟸ حل: فقط ۴

$$y \leq 1 \Rightarrow \frac{-v}{u^2+u^2} \leq 1 \Rightarrow u^2+v^2+v \geq 0$$

[illegible] ⟸ ۲ مورد از [illegible]

[illegible]!

معادله بر حاسبه

صفحه ۵۲۵ تست ۵

(برق ۹۲

۴) ۳) ۲) ✓ ۱)

$$|z-z_0|=|z_0| \Rightarrow \left|\frac{1}{w}-z_0\right|=|z_0|$$

$$|1-wz_0|^2=|wz_0|^2 \Rightarrow ۲)✓$$

$$Re^2(1-wz_0)+\cancel{Im^2(wz_0)}=Re^2(wz_0)+\cancel{Im^2(wz_0)}$$

$$Re(1-wz_0)=Re(wz_0)$$

$$1-2Re(wz_0)=0$$

$$f(z)\overline{f(z)}=|f(z)|^2$$

$$\Rightarrow (1-wz_0)(1-\overline{wz_0})=wz_0\overline{wz_0} \Leftarrow$$

$$1-\overline{wz_0}-wz_0+\cancel{wz_0\overline{wz_0}}=\cancel{wz_0\overline{wz_0}}$$

$$1-2Re(wz_0)=0$$

یادآوری : $f(z)+\overline{f(z)} = 2\operatorname{Re} f(z)$

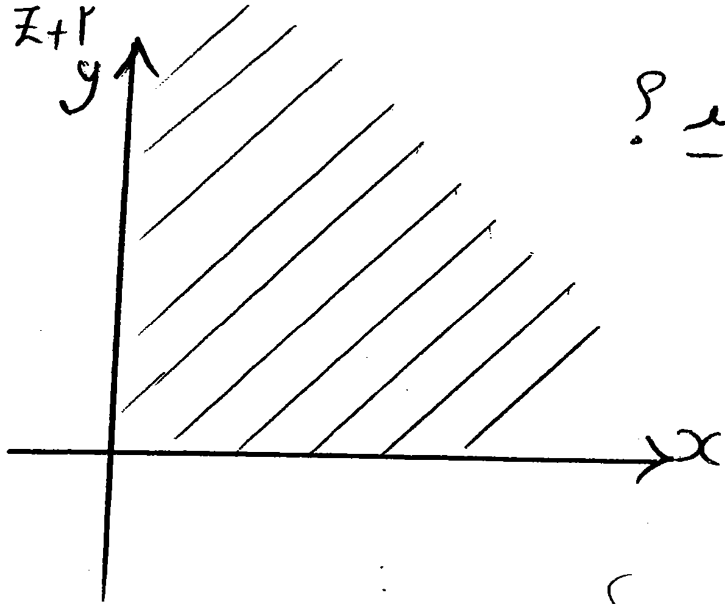
* عین سؤال مکانیک ۸۷، ص ۲۶۸، س ۴۳ بود!

* ریاضی مهندسی - ۹۲/۶/۱۱ - جلسه‌ی هشتم - دوشنبه

* نگاشت دوخطی (موبیوس)

$$W=\frac{az+b}{cz+d}$$

* مثال) نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط $W=\frac{z-i}{z+1}$ را بدست آورید؟



طبق روند ۱ معادلات مرزی

(1) $\begin{cases} x=0 \rightarrow x\geq 0 \\ y=0 \rightarrow y\geq 0 \end{cases}$

تذکر: اگر در نگاشت $W=f(z)$ امکان محاسبه x و y بر حسب u و v وجود داشت، برای محاسبه‌ی نگاشت یک

ناحیه به روش طی توسط این تابع به جای معادلات مرزی بهتر است شرط مرزها را بنویسیم.

* مساوی تبدیل به نامساوی.

دلیل: اگر اینلا را انجام بدیم ← تصمیم خود نامساوی را برمی‌داریم ← حاسات کاهش

② $W=\dfrac{aZ+b}{cZ+d} \rightarrow cwZ+dw=aZ+b$

$$Z(cw-a)=-dw+b$$

$$\boxed{Z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}}$$

* در سوال: $Z=\dfrac{-2w+i}{w-1}$

$$x+iy=\dfrac{-2u-2iv+i}{u-1+iv}\times\dfrac{u-1-iv}{u-1-iv}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\quad}{(u-1)^2+v^2} \\ y=\dfrac{2uv+(-2v+1)(u-1)}{(u-1)^2+v^2} \end{cases}$$

لم صورت : x حقیقی ⟸ حاصلضرب دو تا حقیقی یا دو تا موهومی

ضرب در حقیقی $\xrightarrow{\text{فقط}}$ قسمت حقیقی

« موهومی $\xrightarrow{\text{فقط}}$ قسمت موهومی (یه مقدار هم داره)

$$x = \frac{-2u^2 - 2v^2 + 2u + v}{〃}$$

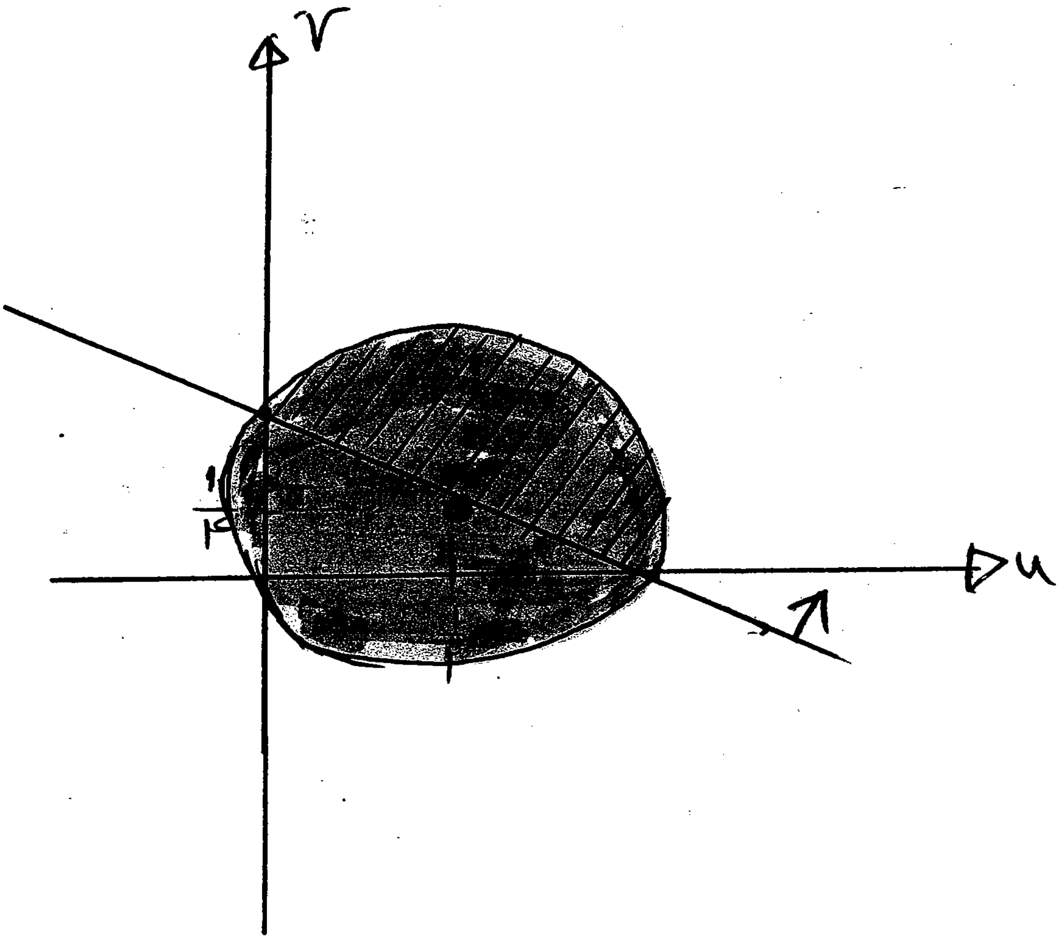
$$y = \frac{2v + u - 1}{〃}$$

③ نکات مهم

$$x \geq 0 \xrightarrow{\text{مخرج که مثبت پس باید صورت مثبت}} -2u^2 - 2v^2 + 2u + v \geq 0$$

مرکز $O \left| \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{matrix} \right.$ دایره $\boxed{u^2 + v^2 - u - \frac{1}{2}v \leq 0}$

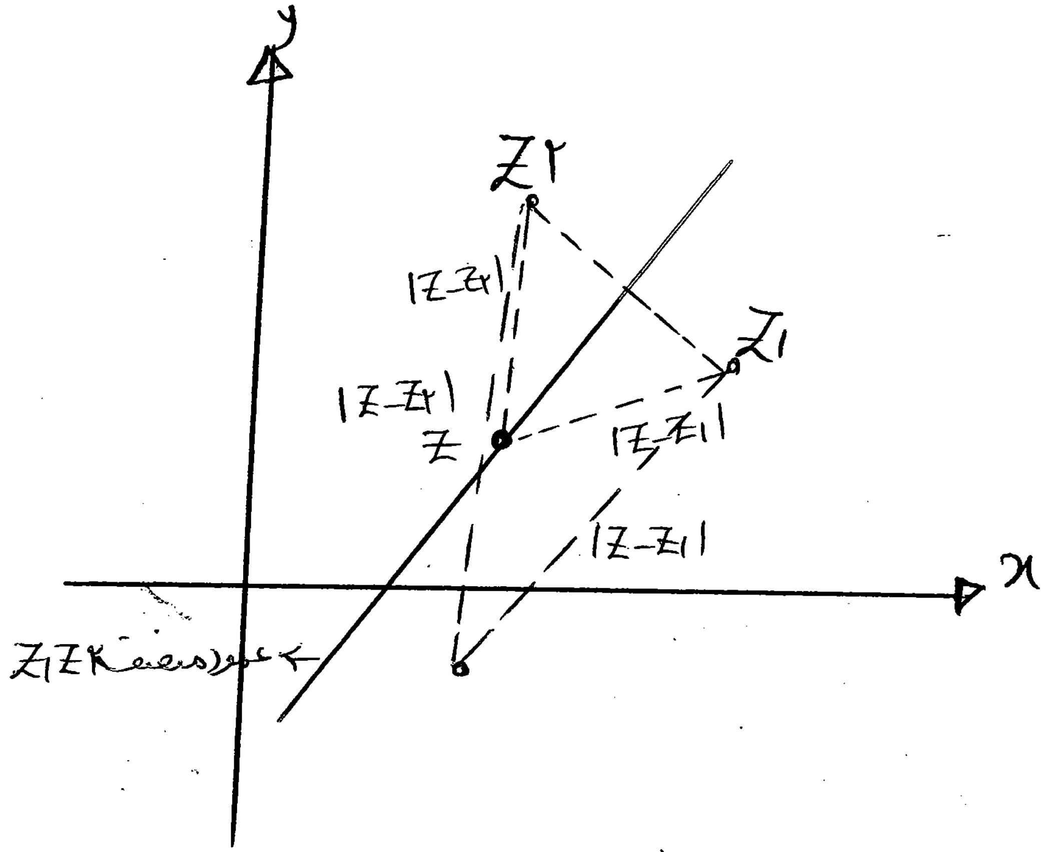
$$y \geq 0 \longrightarrow \boxed{2v + u - 1 \geq 0}$$



*خواص نگاشت موبیوس از خودش مهم تره!

* در تابع $W=re^{i\theta}\frac{z-z_1}{z-z_2}$ ، همواره نگاشت عمود منصف پاره خط z_1z_2 دایره ای به شعاع r است وقسمتی از عمود منصف که شامل z_1 است به داخل دایره به شعاع r و سمت دیگر به خارج دایره به شعاع r تبدیل می شود.

اثبات ۹۵



z_1 و z_2 دلخواه ← پاره‌خط z_1z_2 رسم ⇐ عمود منصف z_1z_2 رسم

$$|w| = r\,\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}$$

$|re^{i\theta}|=r$

اگر z را روی پاره‌خط انتخاب کنیم ⇐ $\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}$

عمود منصف: همان نقاطی که فاصله‌شان از دو سر یکسان ⇐ پس باید $|z-z_2|=|z-z_1|$

z روی عمود منصف ⇐ $|z-z_1|=|z-z_2|$

$$\Longrightarrow \boxed{|w|=r}$$

دایره‌ای به شعاع r ⇐ اولی اثبات

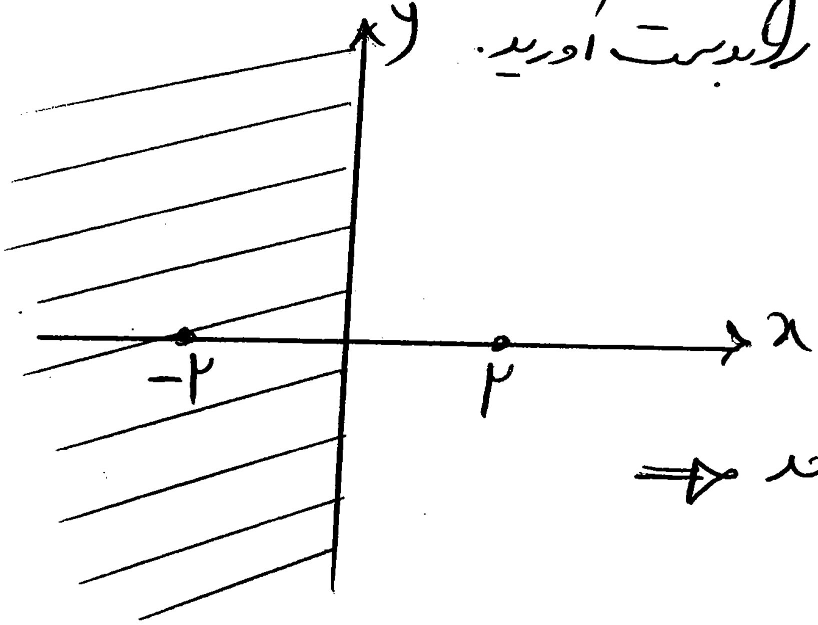
* مثلاً z را سمت z_1 می‌گیریم :

z سمت z_1 باشد : $|z-z_1|<|z-z_2| \Rightarrow \boxed{|w|<r}$

داخل دایره به شعاع r ⇐ بدون اثبات

* به همین ترتیب اگر z سمت z_2 باشد، می‌شه خارج دایره‌ای به شعاع r ! ⇐ بدون اثبات !

* مثال) نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط $W=\frac{z-2}{z+2}$ را بدست آورید.



⇐ خارج دایره واحد

همواره مرز ناحیه عمود منصف z_1, z_2 است ⇐ پس از قضیه فوق استفاده !

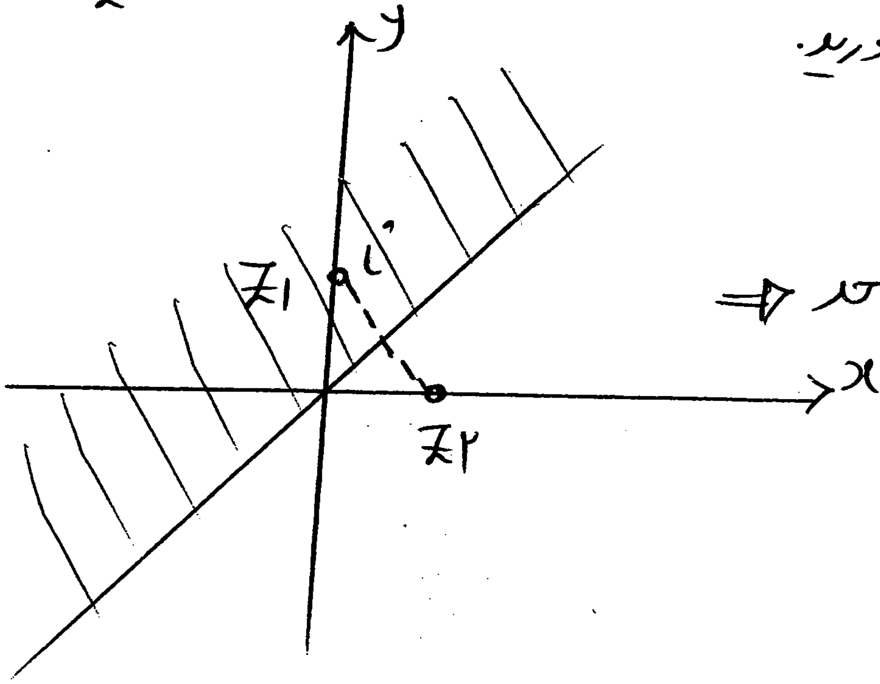
z_2 داخل ناحیه ⇐ داخل دایره

z_1 خارج ناحیه ⇐ خارج دایره

2 خارج ناحیه ⇐ خارج دایره واحد چون

ضریب ۱ ⇐ (ضریب شعاع دایره)

* مثال) نگاشت ناحیه‌ی $y \geq x$ توسط $W=\frac{Z-i}{Z-1}$ را بدست آورید.



$\Rightarrow$ داخل دایره واحد

* مرز عمود منصف $Z_1=i$ داخل ناحیه است پس:
داخل دایره واحد است.

* ضامن تاثیر ندارد چون فقط در ان مرز در نقاط ... دایره قرار ... عمودی ...!
* قرارداد: مرکز همیشه مبدا! مگر اینکه خلافش گفته شه
دایره واحد $\Leftarrow$ دایره‌ای که مرکزش مبدا و شعاعش ۱ است!

ص ۱۶۸ س ۴۵
(هکانیک ۸۹)

۱)

۲) ✓

۳)

۴)

حالت دوم با عوض و قرینه :

$$z=\frac{2w-1}{w-1}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2w-1}{w-1}+1\right|=3$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3w-2}{w-1}\right|=3$$

$$\Rightarrow \left|\frac{w-\frac{2}{3}}{w-1}\right|=1 \xRightarrow{\text{ذهنی}} u=\frac{5}{6}$$

$Re(w)=\frac{5}{6}$

ذهنی :

فرض شده دایره واحد

پس در دو عمود منصف اینها آ ← عمود منصف $\frac{2}{3}$ و ۱ است ⇐ $\frac{\frac{2}{3}+1}{2}=\frac{5}{6}$

چون حقیقی بود ⇐ Real

اگر موهومی بود ⇐ Im

اگر ترکیبی ← رسم شکل

($z_1 z_2$ حقیقی)

تحلیلی : $|w-\frac{2}{3}|=|w-1|$

مکان هندسی عمود منصف

$$\boxed{u=\frac{5}{6}}$$

* برق ۹۲) دایره‌ای به مرکز z_0 و به شعاع ρ_0 به قسمی که $\rho_0=|z_0|$ در صفحه z مفروض است. در اثر تبدیل $w=\frac{1}{z}$ معادله این دایره به کدام رابطه در صفحه w تبدیل می‌شود؟

۱) $1+2\mathrm{Re}(\bar{z}_0\bar{w})=0$

۲) $1-2\mathrm{Re}(z_0 w)=0$

۳) $1+2\mathrm{Re}(z_0 w)=0$

۴) $1-2\mathrm{Re}(\bar{z}_0 w)=0$

$$|z-z_0|=|z_0|$$

$$\left|\frac{1}{w}-z_0\right|=|z_0|$$

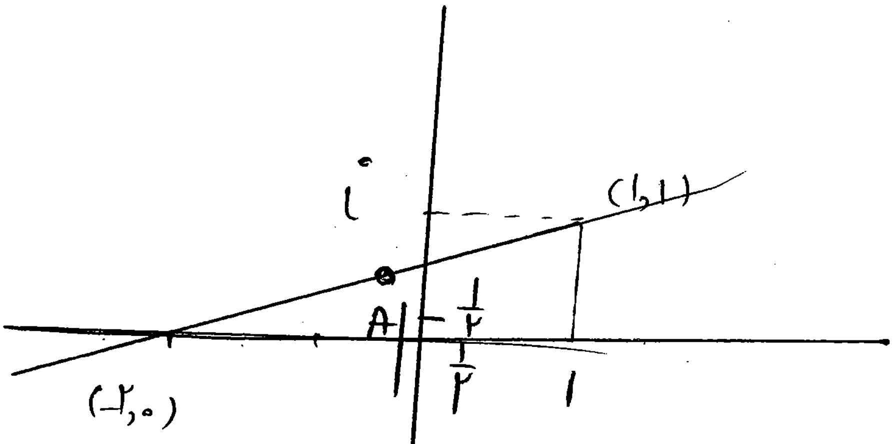
$$|1-wz_0|=|wz_0|$$

$$\mathrm{Re}(wz_0)=\frac{1}{2}$$

آن هم حقیقی هم موهومی :

مثلاً :

$$|w-1-i|=|w+2|$$



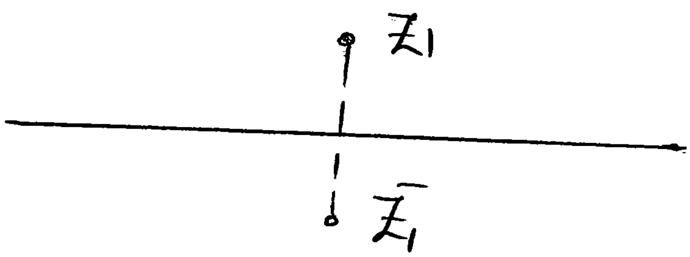
$$\text{شیب} = \frac{1-0}{3} =$$

* می‌توانستیم عمود منصف هم بنویسیم !

** * این روش خیلی روش قدرتمندی است و خیلی مهم است * **

* چیزی که در کتاب های مرجع می‌بینیم :

دیگر $z_2=\bar{z}_1$ باشد یعنی $w=re^{i\theta}\dfrac{z-z_1}{z-\bar{z}_1}$ و از ۲ نقطه گذشت



$z_2=\bar{z}_1 \Rightarrow$ عمود منصف محور حقیقی است

عمود منصف $z\bar{z}_1$ یعنی محور حقیقی، همواره دایره به شعاع ۱ نگاشت

نیم صفحه بالا یا پایین همواره داخل یا خارج به شعاع ۱ است

z_1 داخل نیم صفحه باشد ← داخل دایره

$\bar{z}_1$ خارج نیم صفحه باشد ← خارج دایره

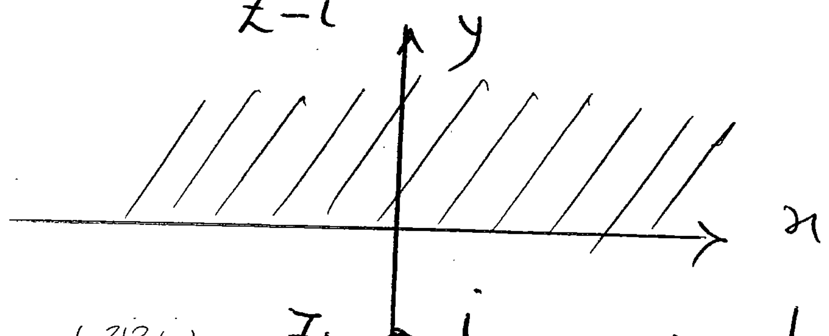
* این حالت خاص مهم‌تر از خودش است.

چون که در سؤالات کنکور بارها تکرار شده است، همین است.

* مثال) نگاشت ناحیه‌ی $y \geq 0$ توسط $W=\frac{z+i}{iz+1}$ را بدست آورید.

توجه: همیشه ضریب z ها را یک کنید ← هر عددی بود از صورت و مخرج فاکتور و ضریب z را ۱ کنید

$$W=-i\,\frac{z+i}{z-i}$$



(خارج ناحیه) z_1 $-i$ ← خارج دایره واحد

* اگر در نگاشت دوخطی $W=\frac{az+b}{cz+d}$ ، ضرایب a,b,c,d حقیقی باشند و $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$ آنگاه نگاشت نیم صفحه ی بالا همواره نیم صفحه ی بالا در خروجی است.

* در نگاشت دوخطی، نگاشت خطوط و دوایری که از ریشه ی مخرج عبور نمی کنند، همواره دایره است.

$(z=-\frac{d}{c})$

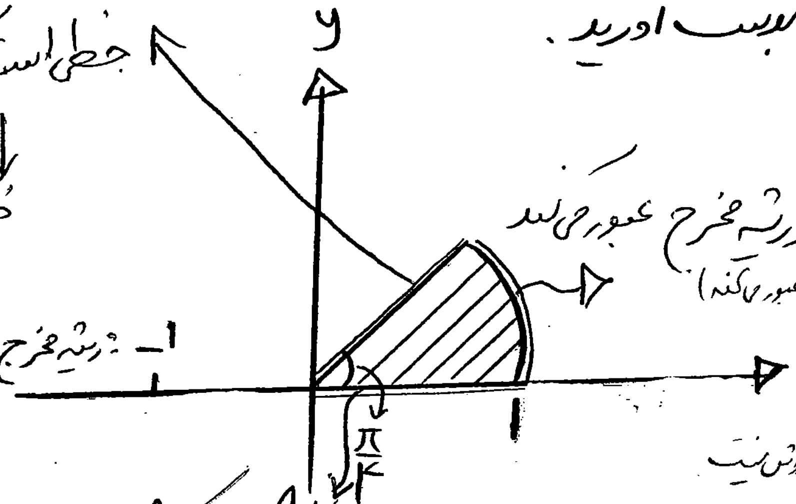
* در نگاشت دوخطی، نگاشت خطوط و دوایری که از ریشه ی مخرج عبور می کنند، همواره خط است.

دوتا مثال مهم
که الگوی کلیدی را از دستمون یاد می گیریم
الگو مهم است.

* مثال: نگاشت ناحیه‌ی هاشورخورده توسط $W=\frac{Z-1}{Z+1}$ را بدست آورید.

خطی است که از ریشه مخرج عبور نمی‌کند
↓
خروجی دایره است
↓
چون قسمتی از خط مورد نظر است خروجی قسمتی از دایره است ③

-1: ریشه مخرج



دایره‌ای است که از ریشه مخرج عبور می‌کند
(دایره آن کامل شود ریشه از -1 عبور می‌کند)
↓
خروجی یک خط است
↓
چرا که -1 روی آن نیست
چون $Z=-1$ روی قسمت مورد نظر نیست
↓
② خروجی پاره خط است

خطی است که از ریشه مخرج عبور می‌کند

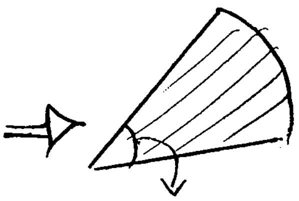
⇐ خروجی یک خط است

چون قسمتی از این خط مورد نظر که -1 روی آن نیست ← پاره خط
اگر -1 روی پاره خط ← نامحدود ← نیم خط
اگر -1 روی نباشد ← پاره خط

⇐ چون $Z=-1$ روی قسمت مورد نظر نیست،

⇐ خروجی پاره خط است! ①

①②③ ⇒



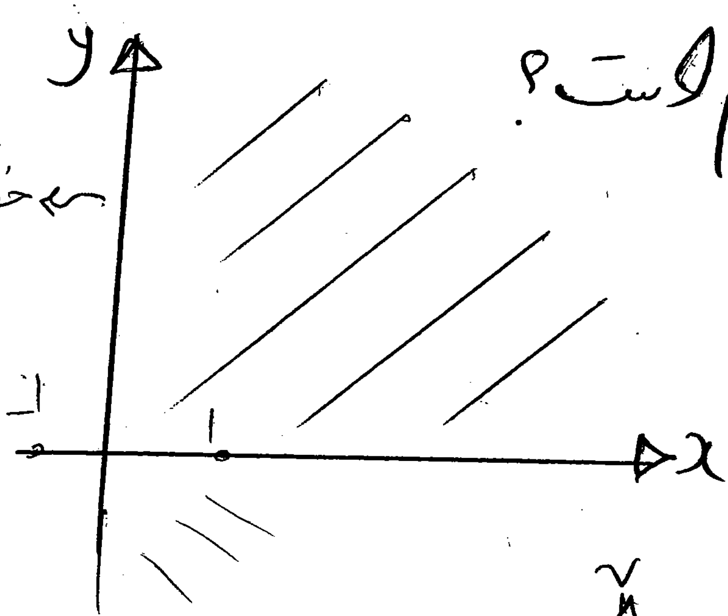
اگر ریشه مخرج خارج ناحیه ← داخل (محدود)
نگاشت دو خط فقط از ریشه مخرج نامحدود

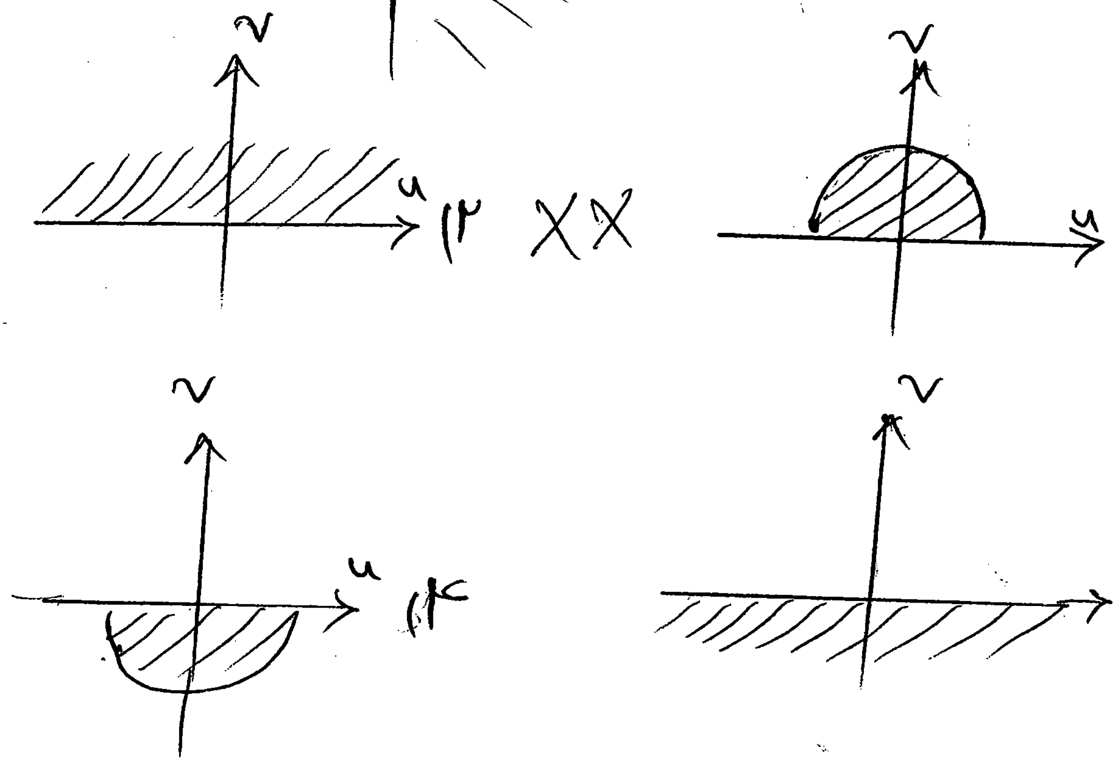
-1 داخل ناحیه ← خارج (نامحدود)
-1 خارج ← داخل (محدود)

* مثال دوم هم را یک روش کلیدی فوق العاده قدرتمند هستند

* مثال: نگاشت ناحیه‌ی هاشور خورده توسط $W=\frac{Z-1}{Z+1}$ کدام است؟

← خطی که از ریشه مخرج عبور نمی‌کند





۱) ✓✓✓

۲) XX

۳) XX

۴)

اگر نگاشت ناحیه D ← D'

گاهی نگاشت یو زیرمجموعه‌ای از ناحیه D ← زیرمجموعه‌ای از ناحیه D'

در صورت تست کار ساده‌ایم طراح سوال چی داده!

هر نامی که خواستیم بدیم، نگاشت خرجی پیدا کنیم، هر کدوم زیرمجموعش نبود حذف کنیم!

فصله

0 تا $\frac{\pi}{2}$ ⇐ ربع اول

0 تا $\frac{\pi}{4}$ ⇐ زیرمجموعه از ربع اول

خودمون کمی حرامی حذف می شه!

اگر ثبت (در میان) ضرایب حقیقی :

نیم صفحه بالا ⇐ نیم صفحه بالا

زیرمجموعه ″ ⇐ زیرمجموعه ″

پس ۲ و ۳ و ۴ غ ⇐ ۱ درست است!

پایین غ

if : (در میان منفی) ⟶ پایین → بالا

بالا → پایین

پس ادا ۲

۱ : محدود

۲ : نامحدود

۱ـ خارج ⇐ محدود)

پس ۱ درست است!

★ کلیک دیگه : ادا ـ ⇐ محور منصف نامتغیر است : (برای هر کدام) داخل ⇐ داخل را میده

پس بخشی از دایره!

پس ۲ و ۳ حذف

بین ۱ و ۴ عدد چهارم .

$$Z = 1 + j$$

$$w = \frac{1+j-2}{1+2j} = \frac{j(1-2j)}{5}$$

$$= \frac{j+2}{5}$$

موهومی مثبت

↓

گزینه ۱

* تحلیل دیگر: خطی که از ریشه مخرج عبور نمی‌کند پس نگاشتش دایره

چون بخشی از خط ← بخشی از دایره

۲ و ۳ حذف

عدد صفرم $= -2$ ← 1

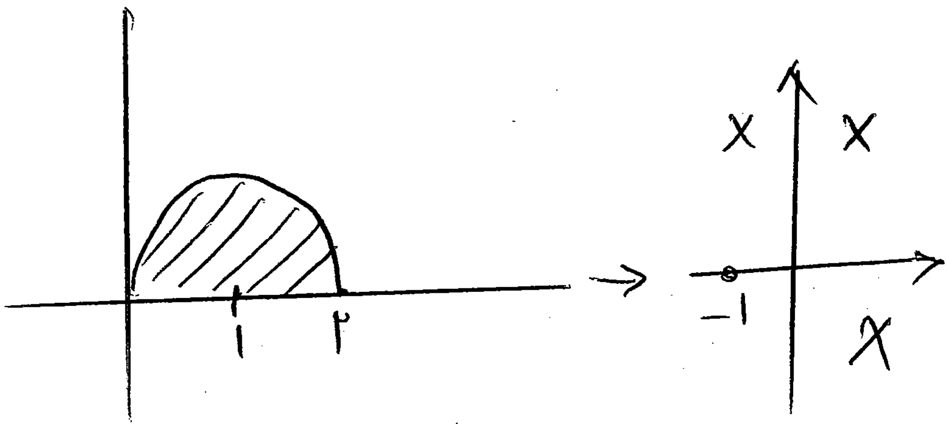
* تحلیل دیگر: ۱- خارج ناحیه به داخل

101

* برق ۱۷۱ تصویر میدان $\{Z : |Z-1|<1$ و $Im(Z)>0\}$ تحت

تبدیل $\frac{Z}{Z-2} = w$ کدام یک از نواحی زیر است؟

۱) ربع اول ✗ ۲) ربع دوم ✗ ۳) ربع سوم ✓ ۴) ربع چهارم ✗



$w = -1$

ضرایب ثابت
از نیمه ↑ → بالا → بالا
از نیمه ↓ → پایین → بالا پایین ✓

۱ و ۲ حذف.

نقطه نداریم تو ربع چهارم تبدیل $w=-1$ ⇐ پس ۴ هم حذف.

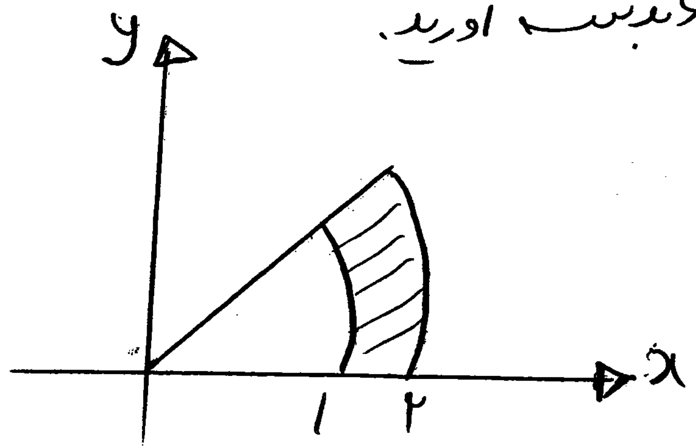
پس ۳ صحیح است.

$$W=\ln Z=\ln r+i\theta \Rightarrow \begin{cases} u=\ln r \\ v=\theta \end{cases}$$

هر موقع تغییرات u خواستی ⇐ تغییرات r
" " v خواستی ⇐ تغییرات θ

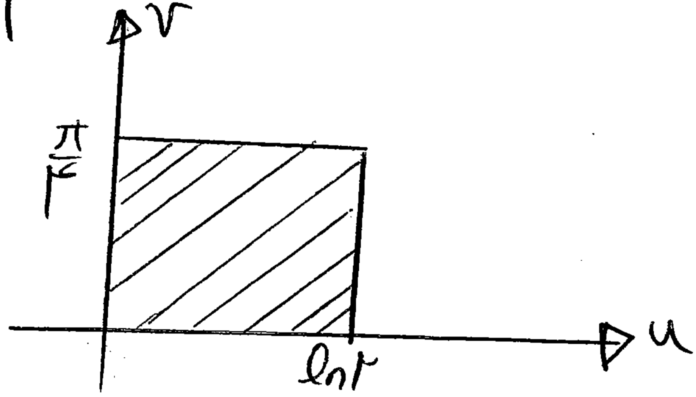
* مثال ۱) نگاشت نواحی هاشورخورده توسط $W=\ln Z$ را بدست آورید.

الف)

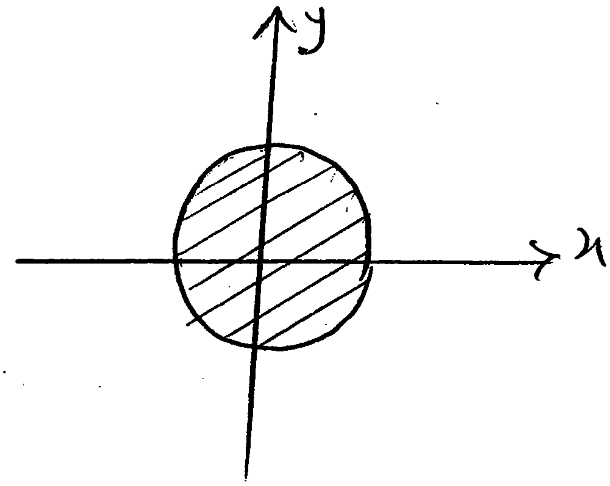


$1<r<2 \rightarrow 0<\ln r<\ln 2 \rightarrow 0<u<\ln 2$

$0<\theta<\frac{\pi}{4} \rightarrow 0<v<\frac{\pi}{4}$



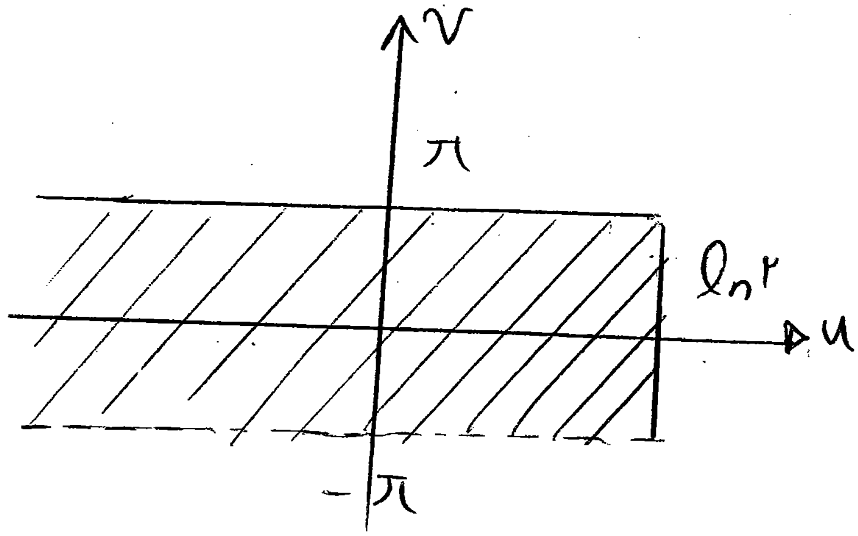
ب)



$r<2 \rightarrow \ln r<\ln 2 \rightarrow u<\ln 2$

* هرجا θ ندادند یعنی π- تا π !

$-\pi<\theta\leq\pi \rightarrow -\pi<v\leq\pi$



* نگاشت توسط : $W = z + \frac{1}{z}$

$$u + iv = r\,\text{cis}\,\theta + \frac{1}{r}\text{cis}(-\theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta$$

$$+ i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$$

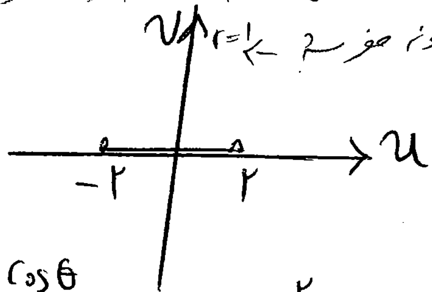
دو دسته سؤال:

① سؤالاتی که u و v برحسب r و θ بده طراح محدودیت نداره! هر معادله‌ای می‌تونه طراح بده

② فقط u و v برحسب x و y بدست بیار (شکل $\sin z$) ⇐ طراح جز این‌ها دو ثابت نمی‌تونه چیزی طرح کنه! برای sin و cos هیچ وقت در درون جز همینا، دو ثابت طرح شده

اینجا فقط r ثابت و θ ثابت!
اول r ثابت ⇐ صفر را جدا بررسی کن، خالف صفر را جدا!
۱ هیچ وقت صفر نمی‌شه ⇐ + و + صفر نباشه
۲ می‌تونه صفر بشه ⇐ $r=1$

$$r = a \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow \begin{cases} u = 2\cos\theta \\ v = 0 \end{cases} \\ a \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} u = \left(a + \frac{1}{a}\right)\cos\theta \\ v = \left(a - \frac{1}{a}\right)\sin\theta \end{cases} \end{cases}$$



$$\xRightarrow{\text{حذف}} \frac{u^2}{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} = 1$$

⇐ معادله بیضی است

حالات خاص

Sin در $k\pi$ صفر میشه!   Cos در $(2k-1)\frac{\pi}{2}$ صفر میشه!

$\theta=\alpha$

$$\alpha=k\pi \Rightarrow \begin{cases} u=(r+\frac{1}{r})\cos k\pi \\ v=0 \end{cases} \Rightarrow$$

معادل یک نیم خط در امتداد محور u

$$\alpha=(2k-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=(r-\frac{1}{r})\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \end{cases}$$

معادل یک نیم خط در امتداد محور v

هر دو را پوشش می‌داد! ← که خلاف موردهای بالایی است!

$$\alpha \neq \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} u=(r+\frac{1}{r})\cos\alpha \\ v=(r-\frac{1}{r})\sin\alpha \end{cases}$$

r را باید حذف کنیم:

$$\begin{cases} \frac{u^2}{\cos^2\alpha}=r^2+\frac{1}{r^2}+2 \\ \frac{v^2}{\sin^2\alpha}=r^2+\frac{1}{r^2}-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{\sin^2\alpha}=4$$

← هذلولی

انحطاط شده دوتکه؟ ← نه، یک شاخش ها ش
(هذلولی دوتکه)

$\cos\alpha > 0 \Rightarrow u > 0 \rightarrow$ شاخه سمت راست

$\cos\alpha < 0 \Rightarrow u < 0 \rightarrow$ " " چپ

شاخه سمت راست : $\cos\alpha > 0 \longrightarrow u > 0$

شاخه سمت چپ : $\cos\alpha < 0 \longrightarrow u < 0$

دقت کن مثلاً تست ۳ اگه فقط گفته بود هذلولی، که ۲ شاخه داره، اما اگر بود شاخه تحدب شد باید بگی راست یا چپ

اگر هذلولی قائم بود ⇐ تحدب روی v بود!

ص ۱۶۳، س ۲۱

* برق ۱۸۶

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✓

۴)

$$\begin{cases} u = \left(d^k + \dfrac{1}{d^k}\right)\cos k\theta \\ v = \left(d^k - \dfrac{1}{d^k}\right)\sin k\theta \end{cases}$$

d باید حذف شود!

$$\Longrightarrow \frac{u^2}{\left(d^k+\frac{1}{d^k}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(d^k-\frac{1}{d^k}\right)^2}=1$$ یعنی بیضی

کانون:

$$a^2=b^2+c^2$$

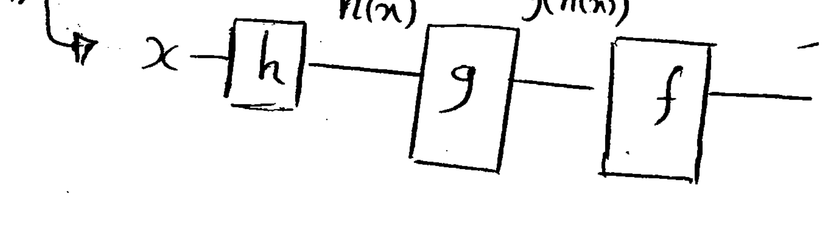
$$d^{2k}+\frac{1}{d^{2k}}+2=d^{2k}+\frac{1}{d^{2k}}-2+c^2$$

$$c^2=4 \Rightarrow c=\pm 2$$

حاله بیضی دهنده‌ی ایا ریلرا
در غیبت ۱ است!

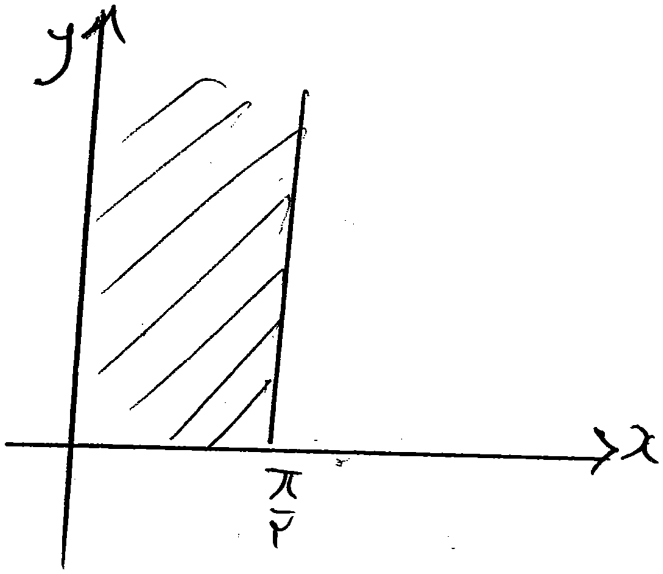
* نگاشت های ترکیبی

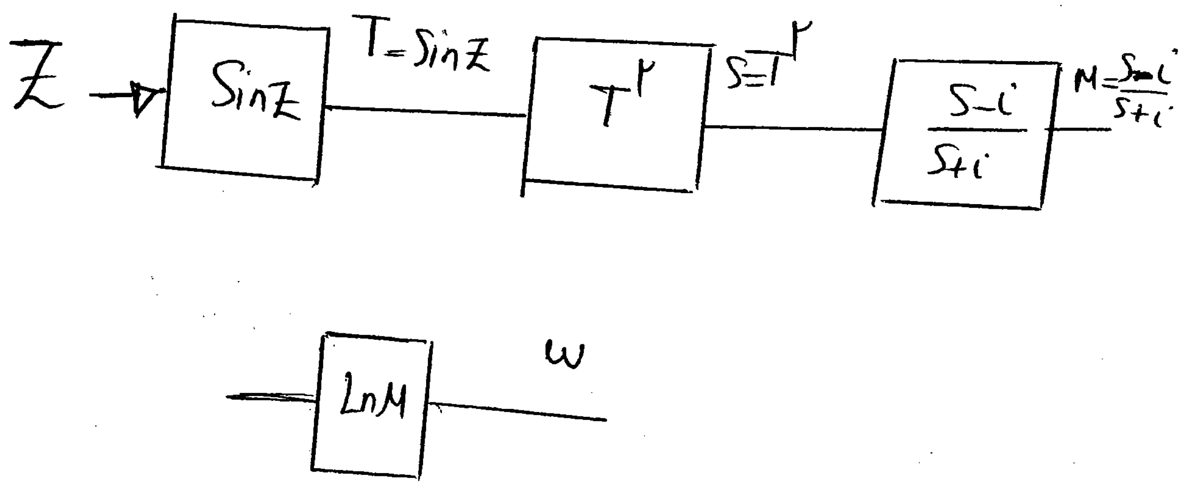
$$f(g(h(x)))$$



* مثال) نگاشت ناحیه‌ی هاشورخورده توسط

$$W=\ln\left(\frac{\sin^2 z - i}{\sin^2 z + i}\right)$$ را بدست آورید.





از Z شروع ← اولین چیزی که روی Z عمل می‌کند ⇐ $\boxed{\sin z}$

$\sin z$ ← ربع اول

$\sin z$: $\sin$ در این بازه مثبت $\left\{\begin{array}{l} u > \\ v > \end{array}\right.$ ⇐ ربع اول

نکته اصلی: از نگاشت‌های مرکب را ذهنی حل کنی، باید نقش‌ها رو هم به حافظه را بیاری گذشته را فراموش کنی!

$\boxed{\text{ربع اول توسط } z^2}$

دوباره قبل اینکه چیزی داریم برای Z^2!

و همینطور بله تا آخر!

پس هوشیار فقط یک شکل در ذهنم می‌دارم ← ۰-۱ تا هم باشه حله!

Z^2 ← $Z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$

هر گاه نامحدود ← اندازه‌ها به توان n هم برسن ← فرقی نداره

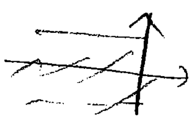
فاز $\left\langle \begin{array}{l} 0 \to 2\text{ برابر} \to 0 \\ \frac{\pi}{2} \to 2\text{ برابر} \to \pi \end{array}\right.$

* دوباره گذشته فراموش:

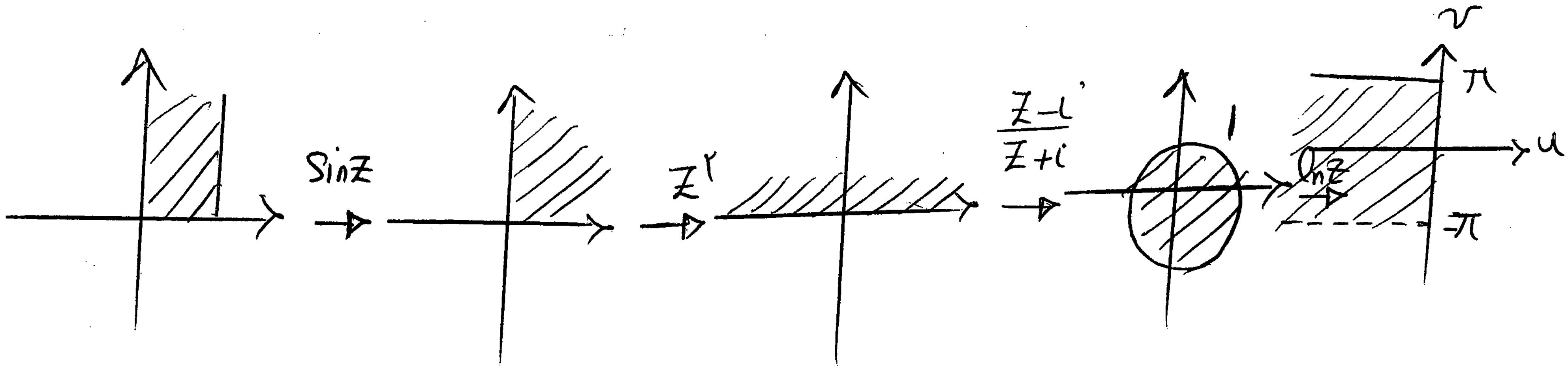
* چیزی دارم، می‌خوام توسط $\frac{Z-i}{Z+i}$ جوابش را پیدا کنم:

نیم صفحه بالا اگر Z اندازه داخل بده ← داخل دایره واحد (داخل ناحیه است)

دوباره گذشته فراموش ⇐ دایره‌ای که می‌خوام توسط $\ln z$ ببرم ... $u = \ln r$, $v = \theta$



← $-\pi < \theta$ دایره تمام کامل ... $u < 0$ ... $\ln r$ ... تغییرات u ←



* در نگاشت ترکیبی: دو عامل باعث ایجاد مشکل می‌شود که نتونی آن را رسم کنی: نتونی نگاشت را بصورت ترکیب توابع بنویسی یا نگاشت‌های مقدماتی را بلد نباشی

پس باید نگاشت‌های مقدماتی و خواص آن‌ها را خوب یاد بگیری

* روش کلی حل مسائل نگاشت کلی مقدماتی بود!

* نگاشت کلی بقیه را باید بصورت ترکیبی از نگاشت کلی مقدماتی نوشته حل شوند

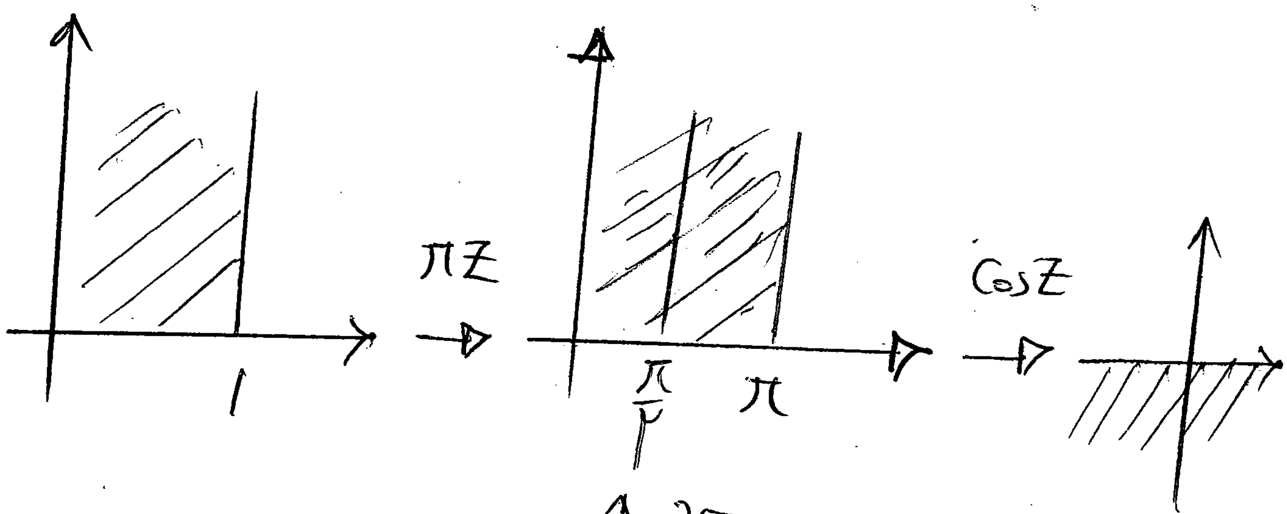
کامپیوتر ۸۱) نگاشت $W = \ln Z$ ناحیه $Re(Z) > 0$

بپوشش

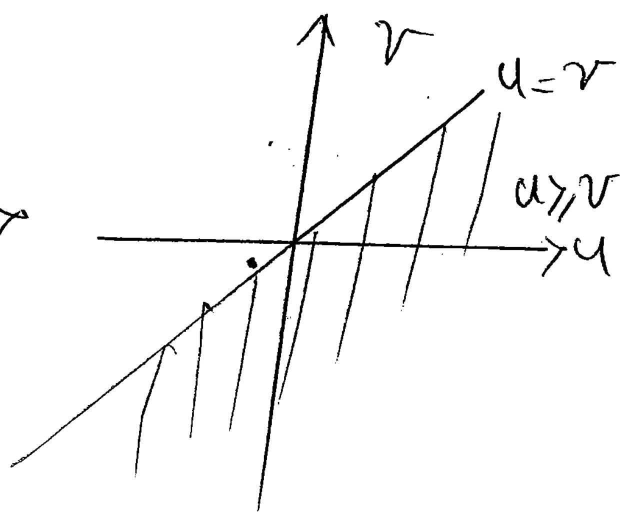
صفحه ۱۶۳ تست ۲۰

*برق ۸۴

۱) ✓ ۱۲ ۱۳ ۱۴



$\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}z}$



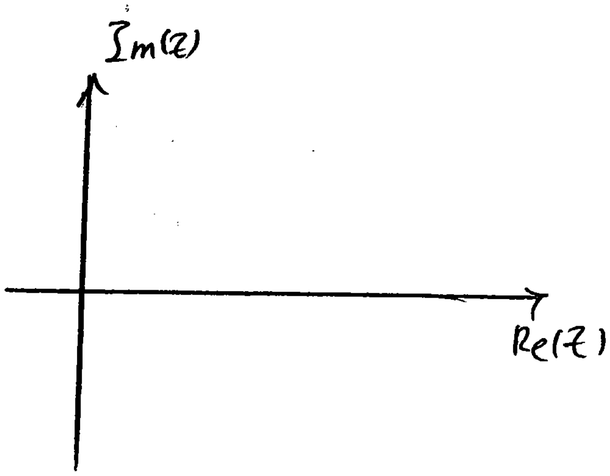
چون ورودی‌ها محدوده ۱۳۲ است قرار
خروجی به اندازه $\frac{\pi}{4}$ دوران
(در جهت مثلثاتی)

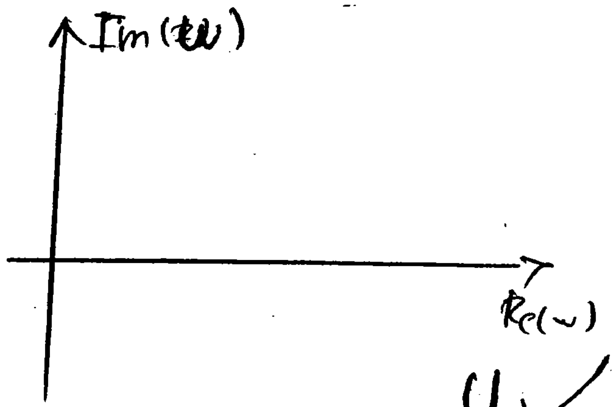
در جهت محور v ← بیشتر
در خلاف جهت عقربه ساعت توجه

در جهت u ← $u \geq v$

جزوه دوم صفحه ۱۵۹ تست ۱

برق ۸۷





۱) ✓

۲)

۳) ✗

۴) ✗

تست مرده ۲ است! ورودی ها، خروجی شده ← $H(z)$ را

در این تست که تحلیلی توانستید حل کنید ok! اما اگه نتونستید تست رو رد کنید

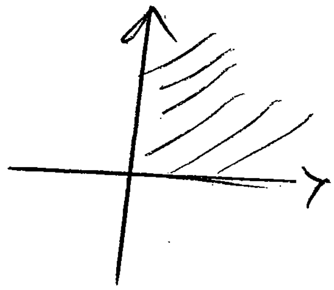
اگه تحلیلی نتونید حل کنید، تشریحی هم نمی‌تونید

تحلیل: از آنجا که شروع می‌شیم تلاش (ورودی، خروجی)

Z^2

Z^4 〉 اولین عمل روی Z

$z^3 \longrightarrow$



$z^4 \longrightarrow$

$\frac{z-j}{z+j} \longleftarrow$ مفهوم عکس تبدیل *

$\frac{z-j}{z+j} \longmapsto$ نیم صفحه بالا ⟵ داخل دایره واحد

تمام خارج دایره واحد ← تمام نیم دایره باشد ← ۳، ۴ حذف.

تفاوت ۱ و ۲ در یک مقدار است!

اگر

توسط $\frac{z-j}{z+j}$ ← نیم دایره پایین ← ۱ درست است

← نیم دایره بالا ← ۲ درست است

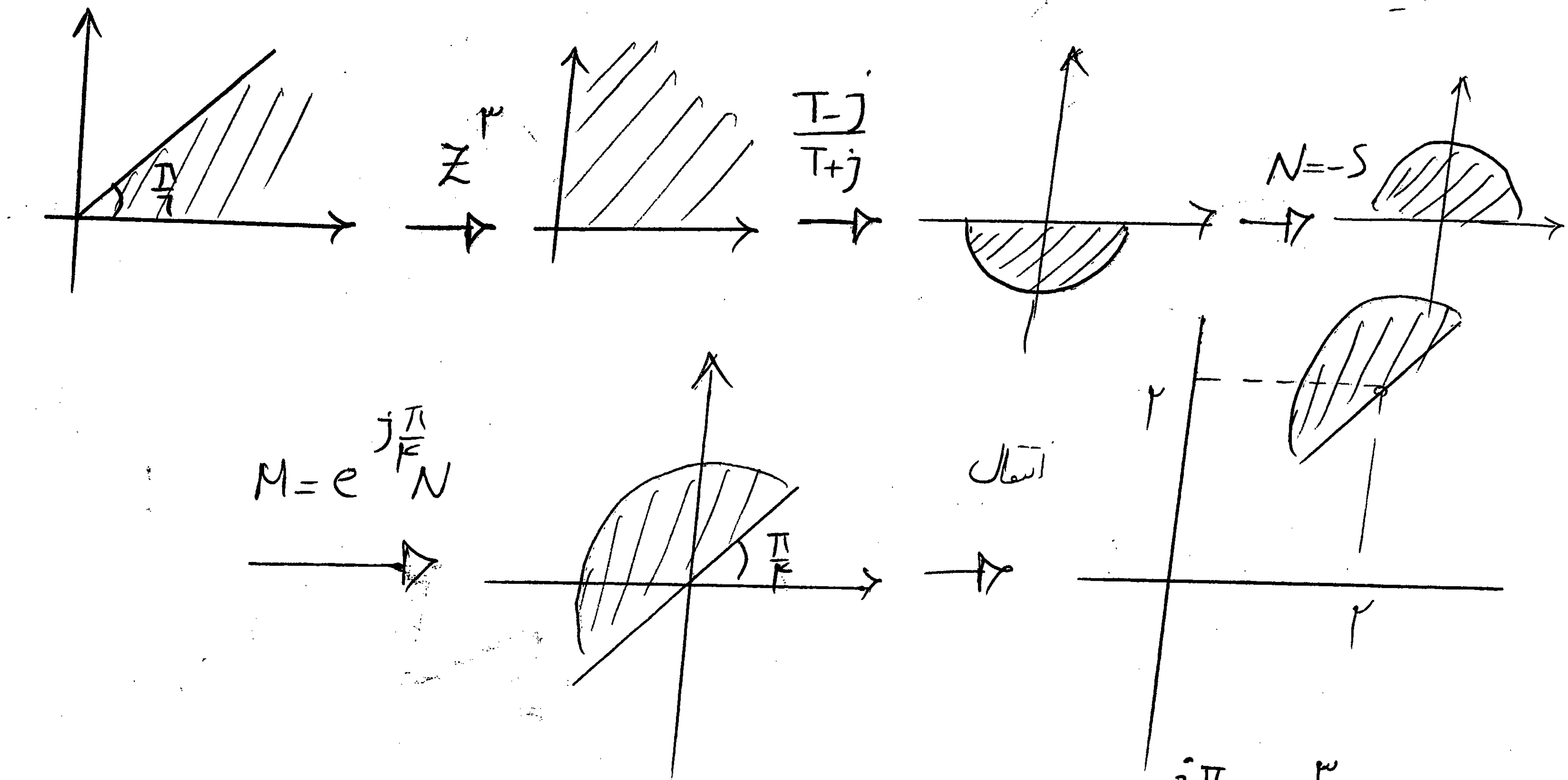
عدد نمونه‌ای:

$z = 1+j$ یک نقطه از ربع اول

$w = \frac{z-j}{z+j} = \frac{1}{1+2j} = \frac{1-2j}{5}$

تحت محدوده حقیقی ← نیم دایره پایین ⟸ پس ۱ درست است.

*تشریحی:



$$W = e^{j\frac{\pi}{4}} \frac{z^3-j}{z^3+j} + 2+2j$$

$z^3 \to$ ربع اول : پس z^3 درست است.

$z^2 \to$ نیم صفحه بالا : توسط $\frac{z-j}{z+j}$ می‌شه داخل دایره : ما داخل نیم دایره می‌خواهیم

۱۰۸

صفحه ۱۶۰، تست ۱۰

* برق ۷۵) با کدام تابع می‌توان حوزه D را به حوزه D' تبدیل کرد به طوری که نقاط A و B مطابق شکل به نقاط A' و B' تصویر شوند؟

۱) ✗ ۲) ✗

۳) ✗ ۴)

z^2 نیم صفحه بالا ← به جای z^2، z می‌ذارم

z_1 داخل ⟵ داخل دایره

z_2 خارج ⟵ خارج دایره

$\frac{z+2i}{z-2i}$

$-2i$ خارج ← خارج دایره ⇐ $\boxed{۲\text{ و }۱\text{ غ}}$

۲ و ۴ ⇐ نیم صفحه بالا را داخل دایره می‌برند!

A, B را داده ⇐ هر کدام درسته که B را به B' ببرد!

$$f(i\sqrt{2})=e^{i\alpha}\,\frac{-2-2i}{-2+2i}=e^{i\alpha}\,\frac{1+i}{1-i}=e^{i\alpha}\,\frac{(1+i)^2}{2}$$

$$=e^{i\alpha}\, i \Rightarrow \boxed{-i} \quad ۴\text{ غ}$$

-1

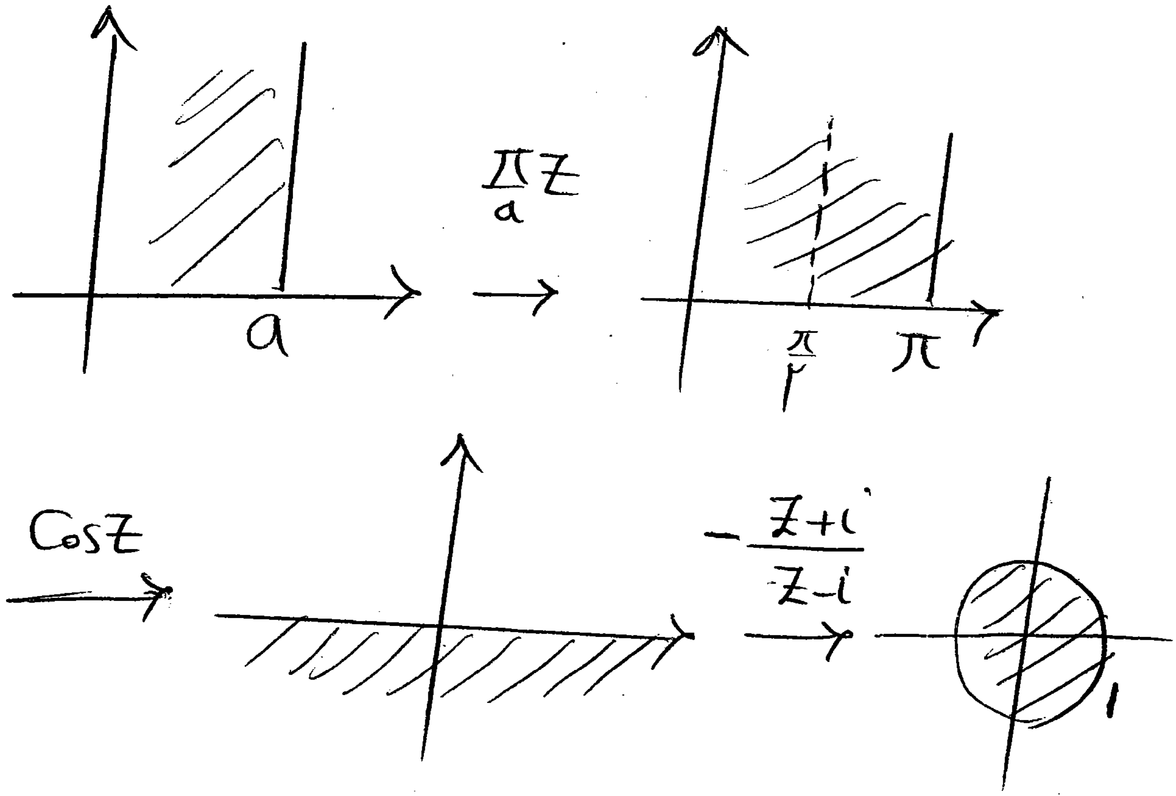
$B \rightarrow -i$

ص ۱۶۹، ش ۴۸

* کامپیوتر ۷۴

۱)　　　۲)

۳)　　　۴)



جلد دوم: صفحه ۱۷۵، تست ۵۳

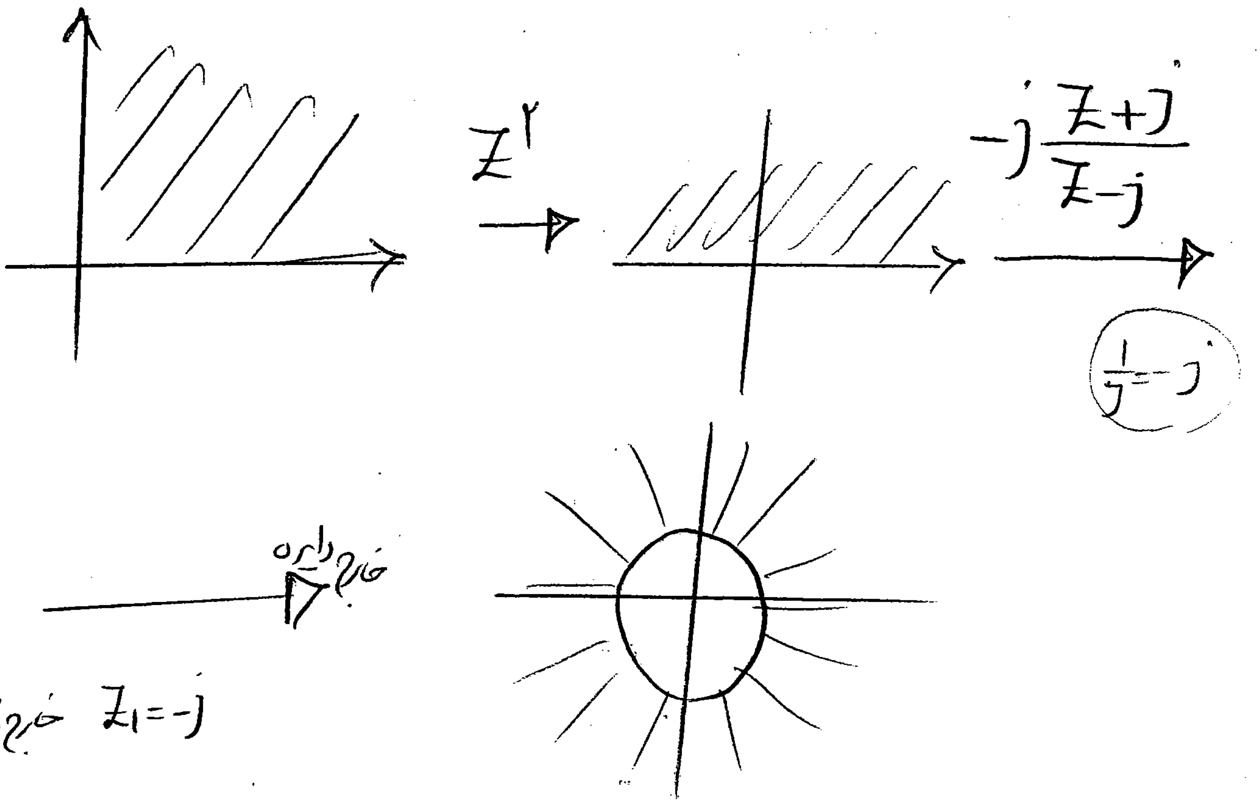
* کامپیوتر ۷۹، موارد ۹۲)

۱)

۲) خارج دایره یک ✓

۳)

۴)

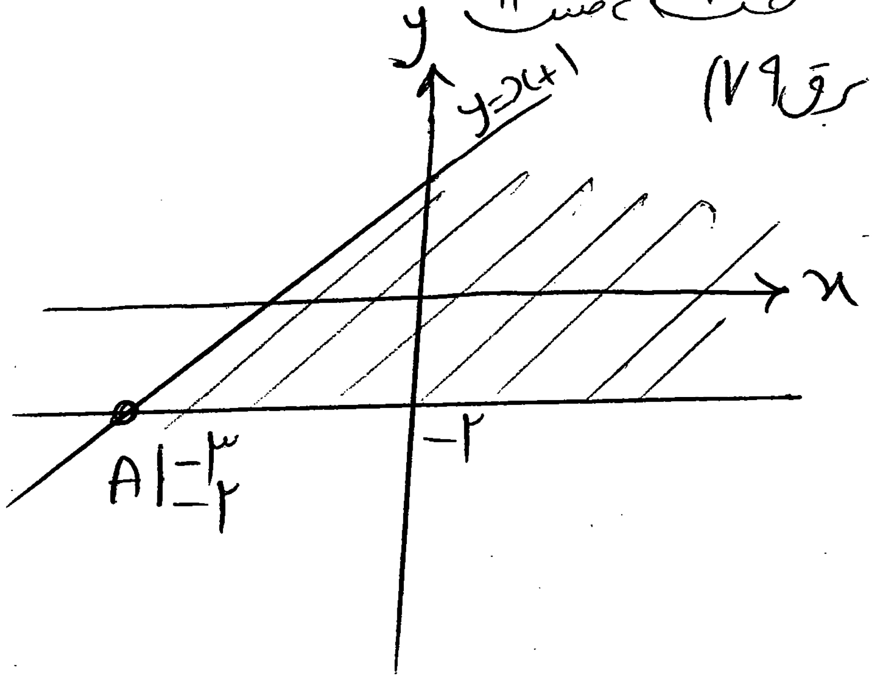


ز شکل در اندازه $\frac{\pi}{2}$ دوران = فرق ندارد

فقط نقاط این شکل جابجا میشن که اینم با اهمیت نداره.

صفحه ۱۶۲، تست ۱۴

* برگ ۱۷۹



۱) ✗

۲) ✗

۳) ✗

۴) ✓

* چیزی که طراحان انتظار دارند بدونید :
(دو نقطه اش یک جور است)

هر موقع ما خواستیم نگاشت یک ناحیه داخل دایره واحد انتقال
به ناحیه صفحه بالا یا پایین تبدیل کنیم ← داخل یا خارج دایره واحد

* تذکر : هرگاه بخواهیم نگاشت ناحیه‌ی بین دو خط را به داخل
یا خارج دایره به شعاع ۲ تبدیل کنیم مطابق زیر عمل می‌کنیم :

۱۱) محل تلاقی دو خط را به مبدأ مختصات انتقال می‌دهیم

۱۲) ناحیه‌ی ایجاد شده را به نیم صفحه بالا یا نیم صفحه پایین تبدیل می‌کنیم

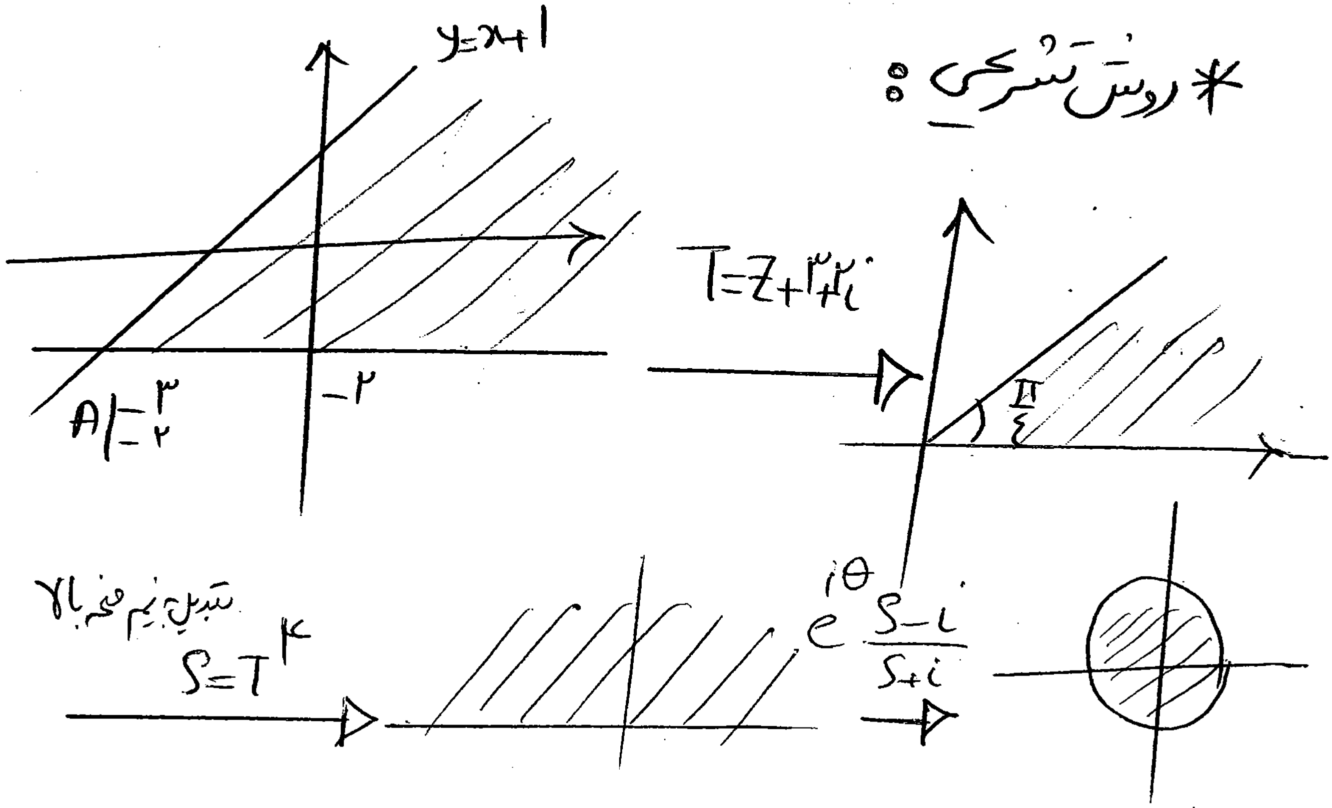
۱۳) از نگاشت $W = re^{i\theta}\frac{Z-Z_0}{Z-\bar{Z}_0}$ استفاده می‌کنیم

این الگویی است که طراحان انتظار دارند ما بلد باشیم!

راه کوتاه: نقطه را به مبدأ انتقال ← $Z+3+2i$

۱ و ۲ و ۳ ⇐ اینجا انجام نشده ⇐ پس غلطند.

* روش تشریحی:



$$W = e^{i\theta} \frac{(z+3+2i)^4 - i}{(z+3+2i)^4 + i}$$

حالا به گزینه‌ها نگاه تا شبیه سازی کنیم:

گزینه ۴ ⟸ از i فاکتور گرفته، من هم فاکتور می‌گیرم:

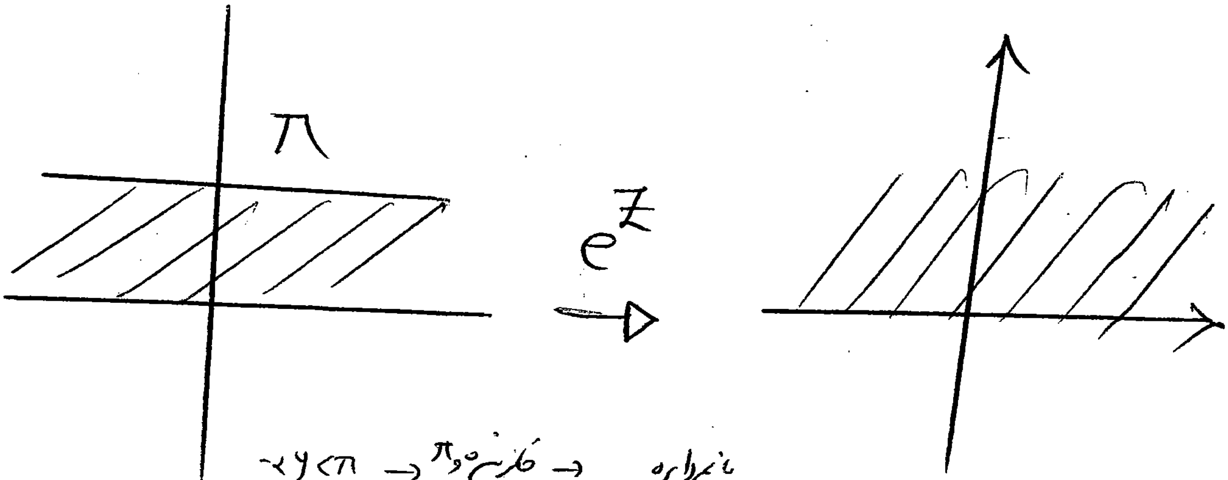
$$W = \overset{1}{\uparrow}\left(-ie^{i\theta}\right) \frac{(z+3+2i)^4 - i}{-i(z+3+2i)^4 + 1}$$

تاثیری ندارد!

پس ۴ درست است. *

* معنی ۱۸۳) نگاشت $W = \frac{e^z - i}{e^z + i}$ ناحیه $\{z = x+iy : 0 < y < \pi\}$ را به کدام ناحیه از نواحی داده شده می‌نگارد؟

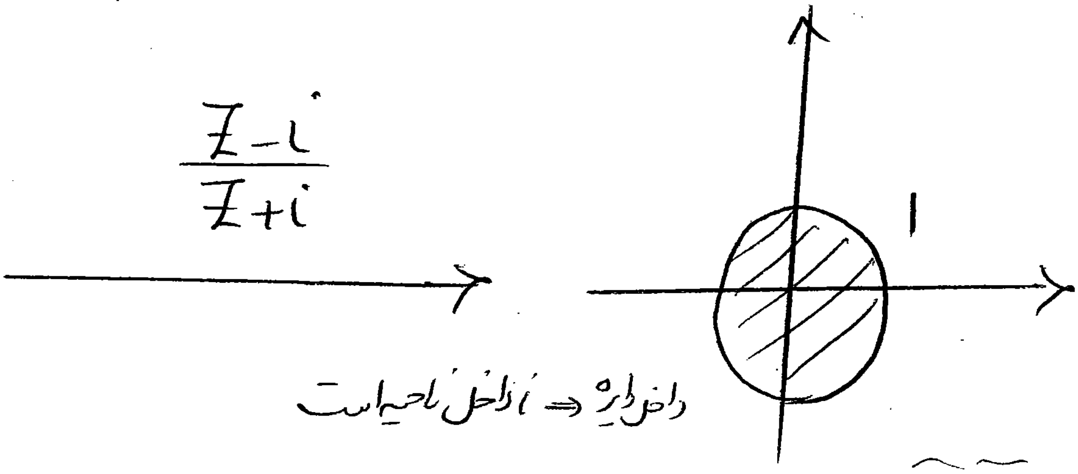
۱) $|w| < 1$ ✓ ۲) $|w| > 1$ ۳) $\operatorname{Im} w < 0$ ۴) $|w - i| < 1$



$0<y<\pi$ → کمان بین ۰ و π → نیم دایره یا کمان نیم صفحه

$r=e^x$ → $-\infty<x<\infty$ → $0<r<\infty$

→ نیم صفحه بالا



داخل دایره ⇒ داخل ناحیه است

$|w|<1$

ص ۱۲۳، س ۱۸

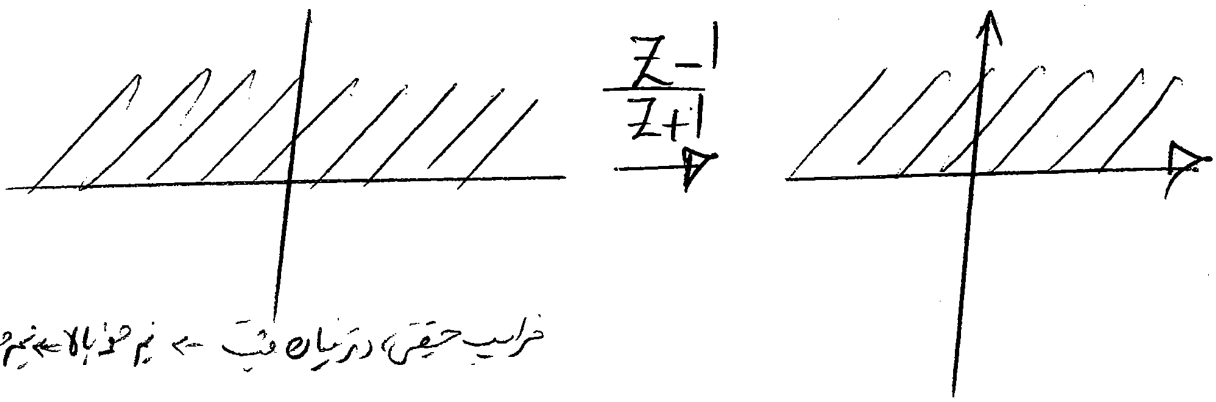
* برق ۸۳)

۱) ✓ نوار $0<v<\pi$ ۲) ✗

۳) ✗ ناحیه $u<0, v>0$ ۴) ✗

z و $\bar{z}$ حقیقی نیستند حواست باشه ← اینجا اون نیست!

ضرایب حقیقی ← اون یکی z و $\bar{z}$ کنسله!



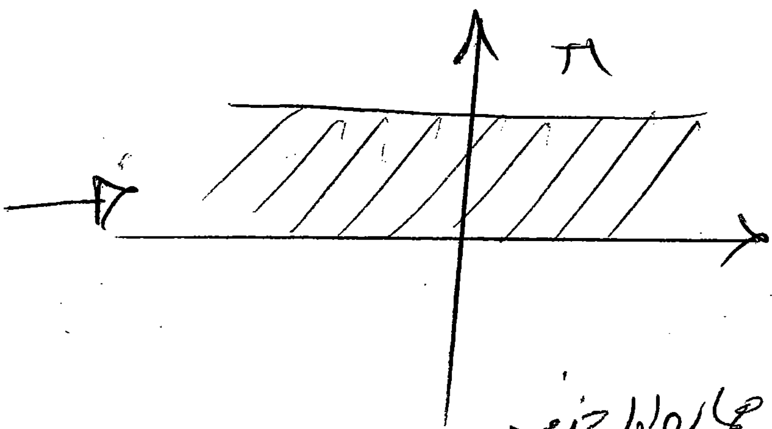
ضرایب حقیقی دترمینان مثبت ← نیم صفحه بالا ← نیم صفحه بالا

$\ln z$ { v از روی θ ← $0<\theta<\pi$ ← $0<v<\pi$ ← شرط ①

u از روی r ← r هر چیزی می‌تونه باشه

u همان $\ln r$ است ← r از ۰ تا ∞ تغییر کند ← $\ln r$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند

u از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند



* تحلیلی نیست
۳ و ۴ همان اول حذف

v همان θ است ← θ نمی‌تونه بین ۰ و 2π ← 2π محدوده ← ۲، ۳، ۴

بین ۱ و ۲ ← عدد z_0

در ۲ v غیر ممکنه

$\ln(-1)=i\pi$ ← v باید بتونه π باشه ← ۲ غ

م ز ص ۱۶۴ س ۲۲

* برق ۱۸۷

۱) ✗ ۲) ✓

۳) ✗ ۴) ✗

* نگاشت دوخطی داخل دایره $\xrightarrow{\text{ایده}}$ تبدیل به نیم صفحه بالا یا پایین!

۳ و ۴ حذف ⇐ $\ln z$ هیچ‌وقت دیسک رو نیم صفحه بالا یا پایین نمی‌شه!

بین ۱ و ۲ ⇐ ۱ حذف ؛ چون همانطور که گفتیم اینجا هم داریم شعاع ۱ باشه باید این باشه:
(باید به ۱ بیرون باشه)

نوع ۲ داشته از ۱ ها کوچکتر رفت اما نوع گزینه ۱ نمی‌شه از ۲ ها کوچکتره

⇐ پس ۲ صحیح است!

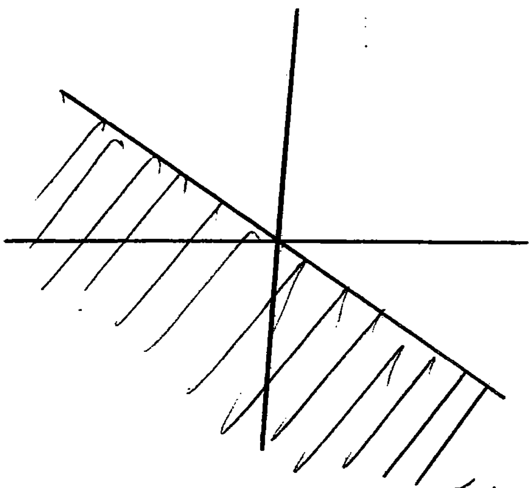
صـ ۱۲۴، س ۲۴

* برق ۸۹

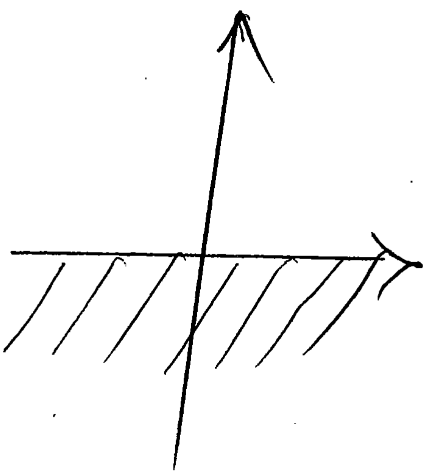
کدام تبدیل دیسک $|z|<2$ را روی ناحیه $u+v<0$ تصویر می‌کند

۱)   ۲) ✓

۳)   ۴) ✓



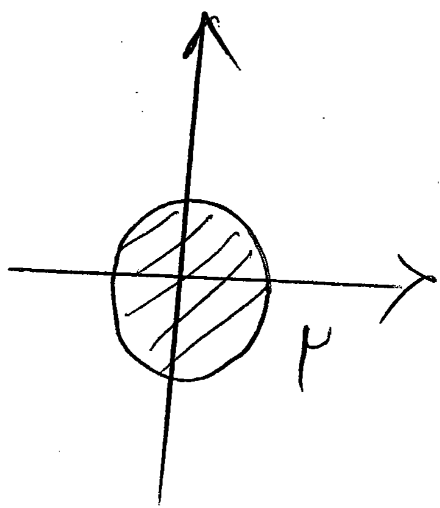
$$T = z e^{j\frac{\pi}{4}} \longrightarrow$$



اینجا احلق نقاط دو قطریم به دایره، با دو تبدیل به نیم صفحه بالا یا پایین
اینی پایین راحت تره

تمام داخل دایره باشد

$$2e^{j\theta} \qquad \frac{T+j}{T-j} \longrightarrow$$



حا

$$W = 2e^{j\theta}\,\frac{z e^{j\frac{\pi}{4}} + j}{z e^{j\frac{\pi}{4}} - j}$$

جای قطر اصلی عوض دقت شه

$$\Rightarrow \quad w = \frac{jz + 2j e^{j\theta}}{z e^{j\frac{\pi}{4}} - 2e^{j\theta} e^{j\frac{\pi}{4}}}$$

$$\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{e^{j\frac{\pi}{4}}} = e^{j\frac{\pi}{4}} \leftarrow j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$\longleftarrow$ صورت از j فاکتور

مخرج از $e^{j\frac{\pi}{4}}$ فاکتور

$$\boxed{W = e^{j\frac{\pi}{4}}\,\frac{z + 2e^{j\theta}}{z - 2e^{j\theta}}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = e^{j\frac{\pi}{4}}\,\frac{z+2j}{z-2j}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow w = e^{j\frac{\pi}{4}}\,\frac{z-2j}{z+2j}$$

هم ۲ درسته، هم ۱۴

ص ۱۶۴ ، تست ۲۵

* برق ۹۰)

۱) ✓

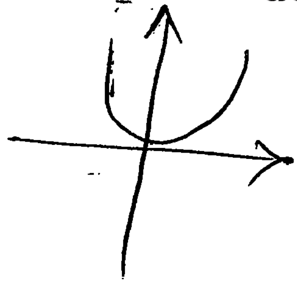
۲)

۳)

۴)

* پوشا: برد کل R را پوشش دهد

$y=x^2 \to$ برد $=R^+ \to$



کل R را پوشش نمی‌دهد

$y=x^3 \to$ برد $=R \to$ R، R را پوشش می‌دهد *

یک به یک: مثل تناظر یک به یک را مثل آزمایش ایجاد کرد

سنگ متناظر با توسعه: متناظر با هر توسعه یک سنگ!

تناظر یک به یک بین سنگ و اموالشان!

انتظار نه ما هم تناظر یک به یک را بلد باشیم!

تابع یک به یک: بین ورودی و خروجی تناظر یک به یک باشد!

بعضی ادوات تحلیل یک به یک بودن ساده است!

در حقیقت ساده است ۱ روش داریم،

در حقیقت ① یکنوا باشه ← یک به یک

(اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی)

② خط موازی محور x ها را در یک نقطه قطع کند ← یک به یک

روش دوم مفهوم نداره ← ① اگر صعودی و نزولی معلوم نباشد

② نمودار نمی‌توان رسم کرد

خط تحلیلی است

تمرین ۱ پوشا است ← خروجی ← کل صفحه مختلط

۲ و ۳ و ۴ ← پوشا نیستند

۲ ← ربع اول ← کل صفحه پوشش نمی‌دهد

۳ ← نیم صفحه بالا ← ″

۴ ← ربع دوم ← ″

① یک به یک نیست!

هر چهار گزینه غلط است!

$$W=\sin(z)=\underbrace{\sin x}_{\text{یک به یک}}\cosh y+i\cos x\underbrace{\sinh y}_{\text{یک به یک}}$$

پس باید $\cos x$ یا $ch\,y$ یک به یک بودن را بهم می‌زند

اگر $ch\,y$ یک به یک بودن را بهم بزند ⇐ دومی باید صفر شود

تا یک به یک بودن حفظ شود خروجی یکی باشد

→ $\cos x=0$ ⇒ باید $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ جزء بازه باشد

پس اگر بازه هر دو اینها رو شامل شود = یک به یک

* ریشه صفر ← $x=\frac{\pi}{2}$

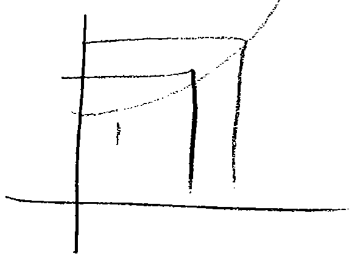
$$z=\frac{\pi}{2}+i \to \sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right)=ch1$$

$$z=\frac{\pi}{2}-i \to \sin\left(\frac{\pi}{2}-i\right)=ch1$$

به ازای ۲ ورودی ۱ خروجی ← یک به یک نیست

۲، ۳ و ۴ ← یک به یک !

اگر y مثبت ← chy ← یک به یک



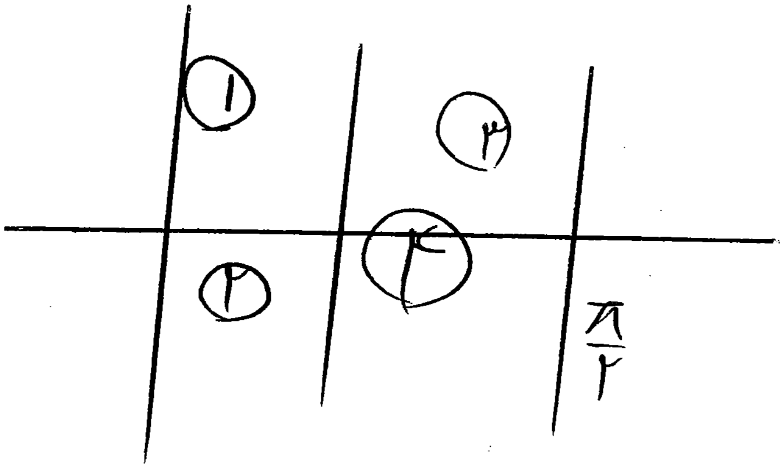
تمام نقاط صفحه رو میزنه ← $\cos x$

$\cos x$ درصورتی میتونه یک به یک بوده و همه رو بزنه

ریشه صفر ← $chy=0$

نمیشه ← نه یک به یک هستند !

(پایان ابواب ۰ درکلید سازمان بخش)



ص ۱۶۹ ، س ۳۶

* مکانیک ۹۱)

۱)

۲)

۳)

۴)

تک به یک است ← ۲ او ۴ حذف!

۲ و ۳ ← نقطه ۱ نداری

$$Z=-\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} u=-\frac{1}{2} \\ v=0 \end{cases}$$

۳ و ۴ ← ۴ ص است!

۴ یعنی عدد نداری او ۴ هم حذف می‌شد!

⊖ را برای تو مطلق نداشتم!

هر عدد منفی بود بزنه ص ۱ بدست میار!

$\frac{\pi}{6}$ چون round تر و ساده‌تر بود، من انتخاب کردم

معیار یک به یک: $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ خرابه‌ها! cos خوشه!

وقتی $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ توی ناحیه نیست ← پس یک به یک است!

* حد تابع مختلط

* از حد تابع حقیقی شروع می‌کنیم:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$\exists \qquad \forall$

* سه تغییر ایجاد می‌کنیم $\begin{cases} \forall \to \exists \\ \exists \to \forall \end{cases}$

هدف پرسش: بعضی که را نطلب، حفظ می‌کنن!

ها می‌خواهیم تلاهی دیگر داشته باشیم:

باید نقش حافظه را کمرنگ کرد!

راهش اینه درک درستی از مطالب در ذهن ایجاد شه و

این درک درست را گسترش دهیم!

۱— ◁ ماندگاری مطالب: بین ۳ ماه تا ۱ سال!

در ریاضی، تعاریف مطلوم واقع شده اند

حل مسئله خیلی خوب است ← ولی فهم هم مهم است!

انتظار می‌رود در مورد حد تصویر درستی در ذهن ما باشد!

درک درستی

از لحاظ مفهومی:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \equiv$ در همسایگی محذوف نقطه x_0 وجود دارد که به ازای آن که هر اندازه دلخواه بتوان $f(x)$ را به L نزدیک کرد

می‌خواهیم همین درکی که از حد در ذهن ماست را به زبان ریاضی بنویسیم:

$|x-a| < b$
- → فاصله x از a کمتر از b
- → همسایگی حول a به شعاع b

$$\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$|x-x_0|<\delta$ وجود دارد در همسایگی x_0

$\exists \delta$

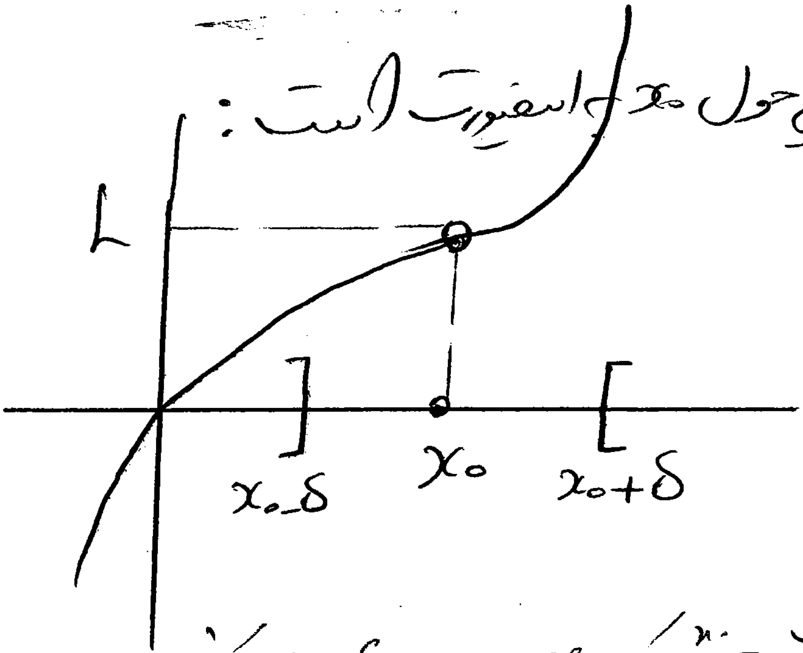
$|f(x)-L|$ $f(x)$ را L نزدیک

هر اندازه دلخواه = ε کوچک

* نتیجه دیگر از تعریف :

x حقیقی ⇐ عدد حقیقی L عددی

همسایگی حول x_0 اسفوریت است :



از راست به x_0 نزدیک میشوم ⇐ $f(x)$ به L نزدیک شد

از سمت چپ به x_0 نزدیک میشوم ⇐ $f(x)$ به L نزدیک

محدود L ⇐

حال همه‌جا copy paste نمی‌کنیم ⇐ غلط می‌شه!

پس باید کرد را درست داشته باشیم!

که اونجا به تناقض نرسیم

$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$ ⇐ حد ندارد

نه حد چپ دارد نه حد راست

چون نه همسایگی چپ دارد نه همسایگی راست

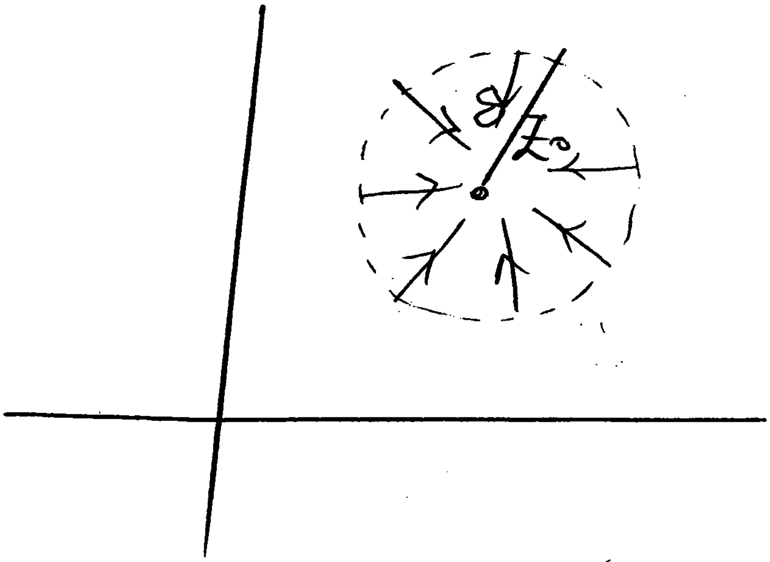
حالا بپردازیم به حد تابع مختلط:

مفهوم حد همان است!

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

همسایگی z_0 نقاطی هستند دور و بر

$\exists \delta > 0$ و (ε) $\quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$



در فضای ۲ بعدی: همسایگی دایره
در فضای ۳ بعدی: همسایگی کره
همسایگی بالاتر از ۳ بعد: گوی

از هر جهت ← همه به z_0 نزدیک بشوند!

مختلط ← ۹۰ درصد فصل حقیقی
ده درصد تفاوت

حل مسائل تحلیلی

* دوشنبه - ۹۲/۶/۱۸ - جلسه‌ی نهم - ریاضی مهندسی

* برای محاسبه‌ی $\lim_{z \to z_0} f(z)$ مطابق زیر عمل می‌کنیم:
(درصورتی که مبهم باشد)

① $z - z_0 = z$ را در نظر می‌گیریم تا حد به حول صفر تبدیل شود

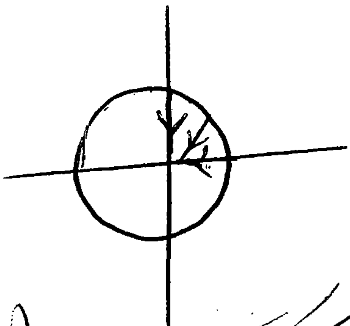
② $z = r\,\text{cis}\,\theta$ در نظر گرفته و سپس $r \to 0$ میل می‌دهیم

اگر حاصل به θ بستگی داشته باشد، می‌گوییم تابع حد ندارد، در غیر اینصورت عدد بدست آمده برابر با حد تابع است.

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^3}{\bar{z}^3} = \lim_{r \to 0} \frac{r^3 \text{cis}\,3\theta}{r^3 \text{cis}(-3\theta)} = \text{cis}\,6\theta$$

چون به θ بستگی دارد حد ندارد

$\Rightarrow$



* حداقل اگر ۲ تا θ هست که یکسان نشد ← حد ندارد!

* تذکر: اگر توابع کسری چندجمله‌ای برحسب z و $\bar{z}$ داشته باشیم، درصورتیکه

صورت و مخرج نسبت به z و $\bar{z}$ همگن باشند، در حد تابع وقتی

$z \to 0$ داریم:

① اگر مرتبه همگنی صورت و مخرج یکسان باشند ← تابع حد ندارد

② اگر مرتبه همگنی صورت از مخرج بیشتر باشد ← تابع حد دارد و برابر صفر است

③ اگر مرتبه همگنی صورت از مخرج کمتر باشد ← تابع حد ندارد و به ∞ میل می‌کند

ex:

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^3 + z^2\bar{z}}{(\bar{z})^3 + z\bar{z}^2} \rightarrow \text{وجود ندارد}$$

صورت و مخرج همگن از مرتبه ۳ ← وجود ندارد

* عموماً سؤال مستقیم از این نمیاد!

در صورت غیرمستقیم در تست‌ها برخورد می‌کنیم!

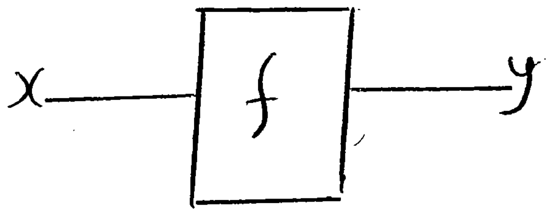
* مشتق

* تغییرات جزئی در ورودی ⟸ اثر در خروجی؟

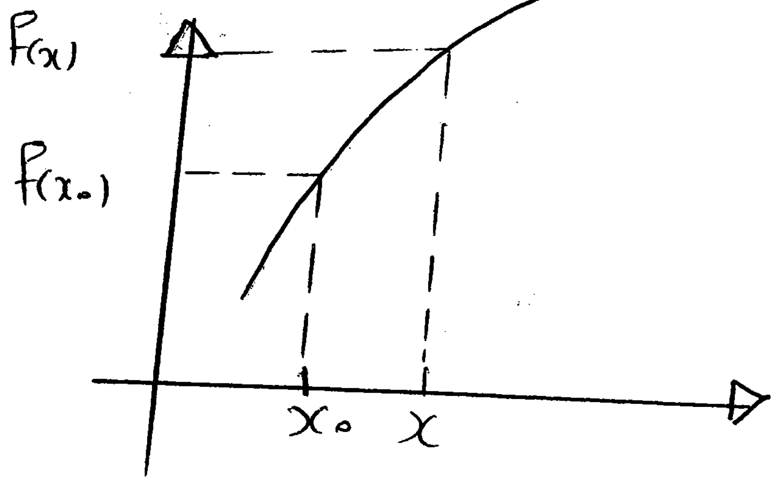
* تغییرات خروجی باید نسبت به ورودی سنجیده شود تا معیار ما درست باشد

پس هرچه تغییرات خروجی به تغییرات ورودی ⟸ تعریف مشتق:

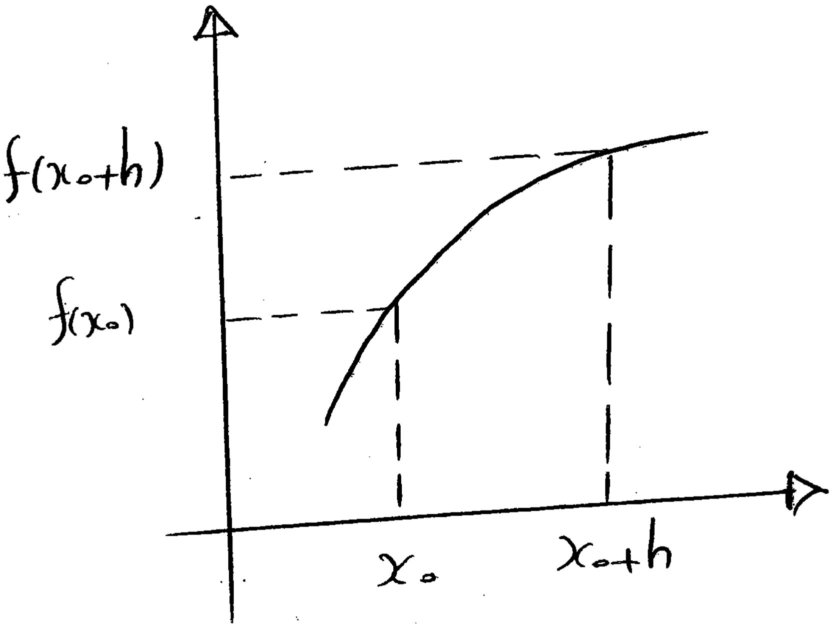
تغییرات خروجی به تغییرات ورودی وقتی که تغییرات ورودی صفر است یعنی تغییرات ورودی جزئی است.



$$\text{حد}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$$\text{حد}_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$



$$f'(x_0) = \underset{h\to 0}{\text{حد}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

⋮

* دانشجوی اول : در چه صورتی $f(x)$ در x_0 مشتق دارد؟

1. در x_0 تعریف شده باشد
2. در x_0 حد داشته باشد
3. در x_0 پیوسته باشد
4. در x_0 مشتق چپ و راست یکسان باشد
5. مقدار مشتق محدود باشد
6. مقدار مشتق محدود و مشخص باشد

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = \sin \infty$$ محدود هست اما مشخص نیست

تعریف دوم : در صورتی $f(x)$ در x_0 مشتق دارد:

مگر که در صورتیکه این حد وجود داشته باشد :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*دوم هم معادل اولی است :

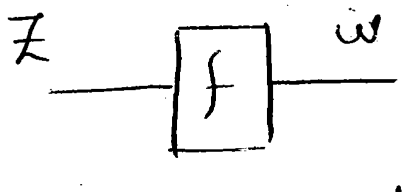
حد در صورتی وجود دارد که صورت صفر باشد :

بازهم باید صفر شود

$\overline{0}$

$$\underbrace{(2)\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \underset{1}{f(x_0)}}_{(3)}$$

*مختلط هم همینطور است :



$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad \text{یا} \quad \lim_{z \to z} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{حد}} \; \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \cdots$$

از دانشجویان می‌پرسیم: در چه صورتی تابع مختلط مشتق دارد؟

در صورتی که این حد وجود داشته باشد.

حاشیه: دایره

از بی‌شمار مسیر به z_0 نزدیک می‌شد ← باید این حد وجود داشته باشد

از راه، بنابراین هر مسیر بررسی کنیم ← کار سخت!

قضایا، مسیر را برای ما هموار کرده‌اند!

و تقریباً همون ساختاری که توی حقیقی کار کردیم ادامه میدیم، اینجا هم برقرار هستند!

تا این مقدمه از این بحث اصلی: ([illegible])

* قضیه: اگر تابع $f(z)=u+iv$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

شرایط کوشی-ریمان در مورد u و v برقرار است.

شرایط کوشی ریمان در مختصات دکارتی

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

در مختصات قطبی

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

نتیجه ۱: اگر شرایط کوشی ریمان برقرار نباشد آنگاه $f(z)$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f(z) = 3x - 5iy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 3 \neq -5$$

در هیچ نقطه‌ای شرایط کوشی ریمان برقرار نیست

$\leftarrow$ در هیچ نقطه‌ای تابع مشتق ندارد!

نتیجه ۲: ممکن است شرایط کوشی ریمان در نقطه‌ی z_0 برقرار باشد اما تابع در نقطه‌ی z_0 مشتق‌پذیر نباشد.

*مثال) نشان دهید شرایط کوشی ریمان در مبدأ برای تابع

$$f(z)=\begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^2}{z} & , z\neq 0 \\ 0 & , z=0 \end{cases}$$

برقرار است، اما تابع در مبدأ مشتق ندارد.

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{(\bar{z})^2}{z}-0}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{(\bar{z})^2}{z^2} \Rightarrow \text{وجود ندارد}$$

مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial x}$

روش اول: y ثابت ← از تابع نسبت به x مشتق ← در انتها بجای xها و yها با a, b جایگزین ← a,b !

روش دوم: y=b ← بجای yها b قرار بده ← از تابع نسبت به x مشتق ← در انتها بجای xها با a جایگزین می‌کنیم!

پاسخ: هر دو روش درست است!

اما انتخاب دومی بهتر است ← با جایگذاری y=b یک تکه از تابع حذف میشه راحت‌تر!

ما هم انتخاب دوم

هر موقع خواستی شرایط کوشی ریمان را در یک نقطه بدست بیاری ← اول نسبت به x مشتق

بعد جایگذاری کن بعد مشتق جزئی!

یا نسبت به y مشتق ← هر جا y دیدی جایگذاری کن بعد مشتق جزئی!

$$f(z)=\frac{(x-iy)^{2}}{x+iy}\quad\begin{cases} x=0 & iy \to \begin{cases} u=0 \\ v=y \end{cases} \\ y=0 & x \to \begin{cases} u=x \\ v=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}=1 \\ \left.\dfrac{\partial x}{\partial y}\right|_{x=0}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=0}=0 \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=0}=1 \end{cases}$$

* شرایط کوشی ریمان در مبدا برقرار است اما مشتق در مبدا ندارد!

ص ۲۱۴ س ۱۶   ص ۲۲۵

* برق ۸۷)

حد $\dfrac{\text{صفر از مرتبه ۳}}{\text{صفر از مرتبه ۲}}$ ⇒ ۲۶۰ = ۰ → [illegible]

۱) ×

۲)

۳)

۴)

مرور جلسه ۲

یه سؤال از ریاضی عمومی:

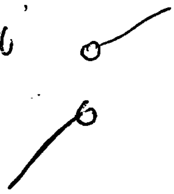
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

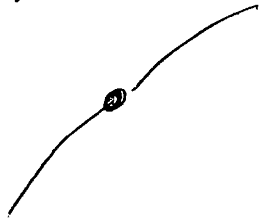
روش ۱ غلط : $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$\to f'(0)=0-\cos(\infty)\to$ مشتق وجود ندارد

روش ۲ درست : $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

ناپیوستگی رفع نشدنی ← هیچ وقت مشتق ندارد





ناپیوستگی رفع شدنی

↓

طراح پیوسته‌اش کرد

↓

هیچ راهی غیر استفاده از تعریف ندارد!

چون ضابطه تابع در این نقطه اصلاً تعریف نشده و از ضابطه تعریف کردیم غلط است. این جا از تعریف مشتق (روش ۲) [illegible]

اینجا هم چون داستانه ← نابودی‌ستون‌ها رفع شدن ← طراح پوشش داده

← هیچ راهی بجز تعریف نداره!

تعریف

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{(\bar{z})^3}{z^3} = 0 \to \text{وجود ندارد}$$

پس مشتق ندارد ← یا گزینه ۲ درسته یا ۳!

۳ درسته!

چون اگه کوشی ریمان صدق کند ← ۴ هم درست! ← ۲ گزینه درست داریم!

یعنی ۲ درست

اما بررسی می‌کنیم:

$$f(z) = \frac{(\bar{z})^3}{z^2} = \frac{(x-iy)^3}{(x+iy)^2}$$

$x=0$: $-iy \to \begin{cases} u=0 \\ v=-y \end{cases}$

$y=0$: $x \to \begin{cases} u=x \\ v=0 \end{cases}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0} = 1 \neq \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=0} = -1$$

← کوشی ریمان برقرار نیست!

ص ۵۶۴، س ۴

* برق ۹۲ _ مکانیک ۲ (۹۲

راه ۱

ن
در مبدأ گوشه‌ای برقرار است!

در مبدأ مشتق‌پذیر نیست!

در مبدأ گوشه‌ها برقرار است!

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✓

۴) ✗

راه ۲

مشتق‌پذیری از تعریف جزیی ← مشتق‌پذیر نیست ← ۲ تا غلط است!

از آنجا که گوشه‌ای برقرار نباشد ← هم ۱ درسته هم ۴!

پس باید گوشه‌ای برقرار باشد ← ۲ از ۳ ۱!

راه ۳

تذکر مهم

۳) هرگاه تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، مشتقات جزئی آن حول آن نقطه پیوسته نیستند!!

در اینکه گوشه‌ای برقرار نباشد ← قطعاً مشتق‌پذیر نیست

« « « باشد ← ممکنه مشتق‌پذیر باشد، ممکنه نباشد!

* قضیه ۲ : اگر تابع $f(z)=u+iv$ دو شرط زیر را دارا باشد،

آنگاه $f(z)$ مشتق‌پذیر است :

۱- توابع حقیقی u و v پیوسته و دارای مشتقات جزئی باشند

۲- شرایط کشی ریمان در مورد u و v برقرار باشد

شرط ① ، جنبه ذهنی است، حساسیتی نیست

در توابع حقیقی، جز توابع [illegible] در دامنه تعریفشان پیوسته و مشتق‌پذیرند!

مثلاً: اگر u و v که در R تعریف شوند ← مشتق‌پذیرند!

* مثال) مشتق‌پذیری توابع داده شده را بررسی کنید.

① $W=\cos z$

② $W=\cos \bar{z}$

③ $W=|z|^2$

④ $W=x^2+x^3+iy^2$

⑤ $W=\ln z$

① $w = \cos z \Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \, ch\, y \\ v = -\sin x \, sh\, y \end{cases}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow -\sin x \, ch\, y = -\sin x \, ch\, y \checkmark$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \cos x \, sh\, y = \cos x \, sh\, y \checkmark$$

شرایط کوشی ریمان همواره برقرار است

u و v در تمام نقاط تعریف شده اند!

① ✓ ← تابع در تمام نقاط مشتق پذیر است!

② $w = \cos \bar{z} \Rightarrow u + iv = \cos(x - iy)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \, ch\, y \\ v = \sin x \, sh\, y \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow -\sin x \, ch\, y = \sin x \, ch\, y$$

$$-2 \sin x \, ch\, y = 0$$

$$\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \checkmark$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \cos x\,\mathrm{sh}\,y = -\cos x\,\mathrm{sh}\,y \Rightarrow 2\cos x\,\mathrm{sh}\,y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{sh}\,y = 0 \longrightarrow y = 0 \\ \cos x = 0 \longrightarrow x = (2k-1)\frac{\pi}{2} \times \end{cases}$$

پس نمی‌تونن همزمان برقرار!

اما باید برقرار ⟸ پس ② نمی‌تونه برقرار!

فقط در نقاط $z=k\pi$ شرایط کوشی ریمان برقرار است $\xLeftarrow{①\checkmark}$ فقط در نقاط $z=k\pi$ تابع مشتق دارد

③ $w = |z|^2 = x^2+y^2 \Rightarrow \begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ فقط در $z=0$ شرایط کوشی ریمان برقرار است $\xLeftarrow{①\checkmark}$ فقط در $z=0$ مشتق دارد!

④ $W = x^2+x^3+iy^2 \rightarrow \begin{cases} u = x^2+x^3 \\ v = y^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow 2x+3x^2=2y \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \longrightarrow 0=0 \end{cases}$$

:

فقط روی منحنی $2x+3x^2=2y$ شرایط کوشی ریمان برقرار است ← ①√

تابع فقط روی منحنی $2x^2+3x^2=2y$ مشتق پذیر است!

⑤ $W=\ln z \longrightarrow w=\ln r+i\theta \longrightarrow \begin{cases} u=\ln r \\ v=\theta \end{cases}$

شرایط قطبی :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \rightarrow \dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r} \ \checkmark \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} \rightarrow 0=0 \ \checkmark \end{cases} \Rightarrow$$

شرایط کوشی ریمان همواره برقرار است

(در مبدا مشتق ندارد ← $\ln r$)

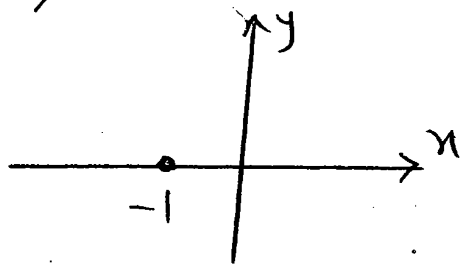
$\ln z$ در مبدا و نقاط روی شاخه اش مشتق ندارد

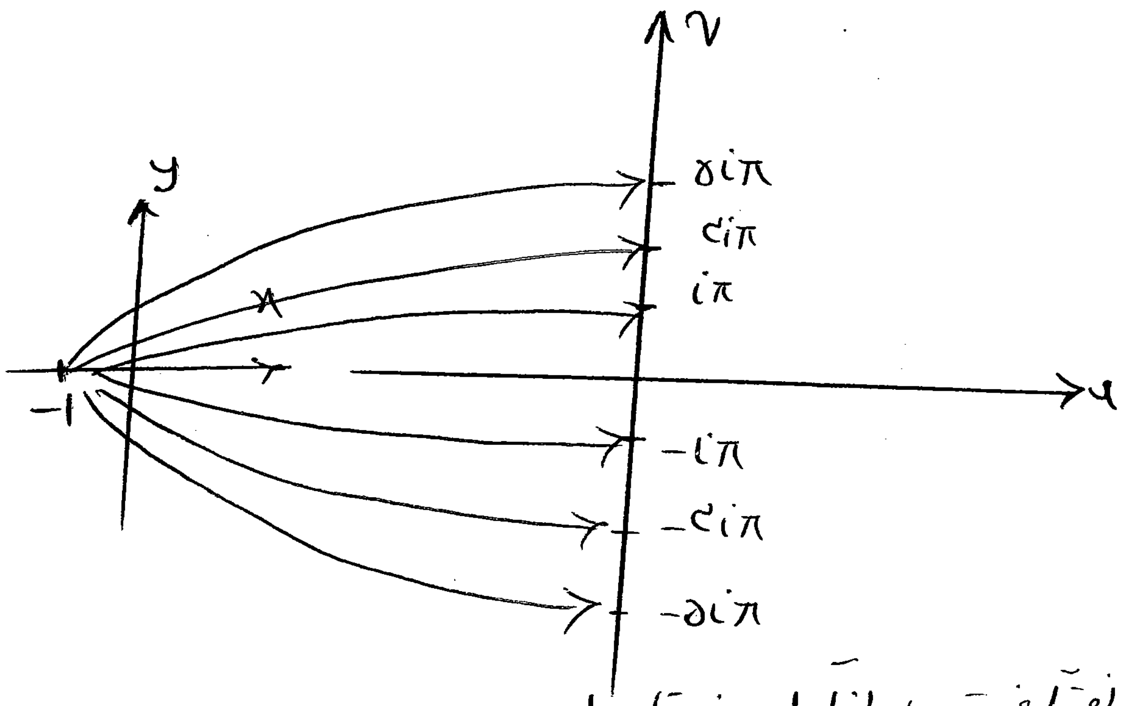
نقاط مشتق ناپذیری $\ln z$ عبارتند از: جدول
شاخه اصلی ← $\ln z$ در مبدا و محور حقیقی منفی ← مشتق ندارد
$\theta=\pi$ ← [illegible] محور حقیقی ← [illegible]
$\theta=\frac{\pi}{2}$ ← [illegible]

* معرفی توابع چند مقداری : $Z=re^{i(\theta+2k\pi)}$

$$\ln z=\ln r+i(\theta+2k\pi)$$

$$\ln(-1)=\cancel{\ln 1}^{\,0}+i(\pi+2k\pi)$$





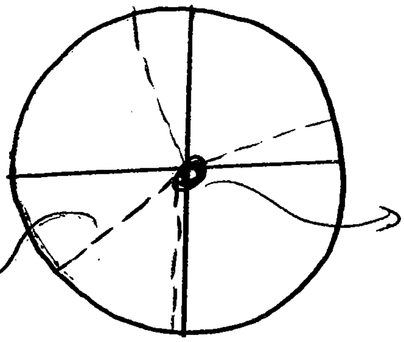
تو حقیقت که می‌گفتیم تابع نیست ← اینجا می‌گیم چند مقداری!

به ازای ۱ مقدار، چند مقدار تولید کرد ← چند مقداری!

اگر بخواهیم حد و مشتق و ... ببری ← باید یک مقداری شوند!

راه: عامل چند مقداری بودن را پیدا کنیم و دادن عامل را از بین ببریم!

$Z=re^{i(\theta+2k\pi)}$ ← عامل چند مقداری بودن: θ



یه جا برش بده θ یه دور حذف بده جواب!

هر جا دوست داشتی برش بزن!

هر کدوم از برش‌ها: شاخه

نقطه‌ای که در تمام شاخه‌ها مشترک: نقطه شاخه

هر جا صحبت از شاخه و نقطه شاخه شد بدون تابع چندمقداری!

بیایم داستان شاخه را ریاضی کنیم:

$\alpha < \theta \le 2\pi + \alpha \Rightarrow$ شاخه است $\theta = \alpha$

کل دایره را داشته باشیم بجز یک شعاعش به اون شعاع: شاخه

مثال)

$0 < \theta \le 2\pi \Rightarrow$ شاخه $\theta = 0$

$\frac{\pi}{2} < \theta \le \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ شاخه $\theta = \frac{\pi}{2}$

$-\pi < \theta \le \pi \Rightarrow$ شاخه $\theta = -\pi$ ← شاخه اصلی $\theta = -\pi$

$-\pi \le \theta < \pi \Rightarrow$ شاخه $\theta = \pi$

* دیگری هستون : 2π = حد بالا _ حد پایین ← یه دور کامل دایره رو پوشش بدهد! (یعنی شاخه)

دیگه اگر قرار باشه خودمون شاخه انتخاب کنیم، یه قطعی یه شاخه را بعنوان شاخه اصلی انتخاب می کنیم ← $\theta = -\pi$ شاخه اصلی

هر موقع در توابع چند مقداری شاخه معلوم نبود ← خودمون شاخه اصلی در نظر میگیریم (اسم طراح را در نبود ← همون)

* سوال: قبول داری هر وقت شاخه تعریف نشده

مثلا $\ln z$ ← هر θ مقدار ممکن است ← دیگه شاخه تعریف نشده!

پس مشتق پذیر نیست ← پس علاوه بر اینها در نقاط روی شاخه مشتق پذیر نیست

← بر می گردیم عقب

می رسیم روش کوتاه :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \equiv$$ برقراری شرایط کوشی ریمان

$$f(z) = z^2 e^{\cos(\sin \bar{z})} + z^4 \cos^2(e^{\operatorname{sh} \bar{z}}) + \bar{z}^5 + 1$$

$$\frac{\partial f(z)}{\bar{z}} = 0 \not\Rightarrow$$ شرایط کوشی ریمان همواره برقرار است ① ✓

← تابع همواره مشتق دارد!

با ۷ را پیدا کردیم، چطور ادعای ۷ و ① ؟

F(z) در تمام نقاط تعریف شده ← سوال: ۷ در همه را با نقاط تعریف شده اند، تمام نقاط تو بنویسیم!

* مثال‌های بالا را همین روش حل کنیم:

① $w = \cos z$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \Longrightarrow$$ کوشی ریمان ✓ $\overset{①\checkmark}{\Longrightarrow}$ تحق ✓

② $w = \cos \bar{z}$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = -\sin \bar{z} = 0 \Rightarrow \bar{z} = k\pi \Rightarrow z = k\pi$$

فقط در $z=k\pi$ کوشی ریمان ✓ $\overset{①\checkmark}{\Longleftarrow}$ فقط در $z=k\pi$ مشتق دارد!

③ $w = |z|^2$

$$w = z\bar{z} \Longrightarrow \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = z = 0 \Longrightarrow$$ فقط در $z=0$ کوشی ریمان ✓ $\overset{①\checkmark}{\Longrightarrow}$ فقط در $z=0$ مشتق ✓

در این روش تابع باید برحسب z و $\bar{z}$ باشد ← ۴ حل نمیشه

④ ×

⑤ $w = \ln z \rightarrow \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \rightarrow$ شرایط کوشی ریمان برقراره

$\ln(f(z)) \leftarrow$ چند مقداری

$f(z)^{\frac{1}{n}}$

$$i\,\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \equiv$$ برقراری شرایط کوشی ریمان

روش قبلی قدرتمندتر بود، این روش کلی نیست!

④ $w = x^2 + x^3 + iy^2$

$$i\,\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} \Rightarrow \cancel{i}(2x+3x^2) = 2\cancel{i}y$$

فقط روی محور $2x+3x^2=2y$ کوشی ریمان ✓ $\xleftarrow{\text{①V}}$ فقط در ... مشتق ✓

---

* مفهوم تک مقداری!

$-\pi < \theta \le \pi$ $\qquad \ln(-1) = i\pi$

$-\pi \le \theta < \pi$ $\qquad \ln(-1) = -i\pi$

$3\pi < \theta \le 5\pi$ $\qquad \ln(-1) = 5i\pi$

$\frac{\pi}{2} < \theta \le \frac{5\pi}{2}$ $\qquad \ln(-1) = i\pi$

$$\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi)$$

$\ne i\pi$

$\ne 3i\pi$

$\ne 8i\pi$

* تابع تحلیلی

تابع $f(z)$ در نقطه‌ی z_0 تحلیلی است اگر دو شرط زیر را دارا باشد:

① $f(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر باشد

② در همسایگی z_0 به شعاع ϵ در تمام نقاط مشتق‌پذیر باشد

نتیجه ۱: اگر $f(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر نباشد، تحلیلی هم نیست

*مثال $f(z)=\bar{z} \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0 \rightarrow$ در هیچ نقطه‌ای شرایط کوشی ریمان برقرار نیست

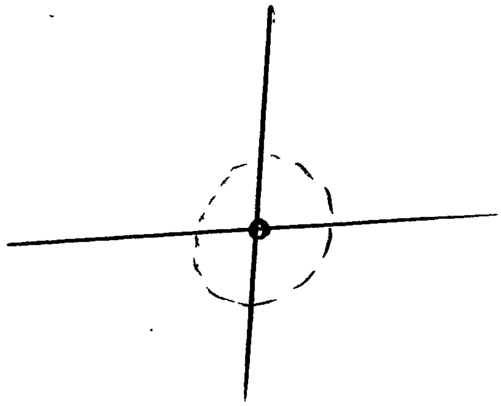
→ در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد → در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست

نتیجه ۲: ممکن است تابع $f(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر باشد اما در z_0 تحلیلی نباشد.

*مثال: تابع $w=|z|^2$ در مبدأ مشتق دارد اما در مبدأ تحلیلی نیست!

فقط در مبدأ مشتق دارد؛ در همسایگی هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست → شرط دوم برقرار نیست

پس تحلیلی نیست



ص ۲۲۳

ص ۲۱۲ تست ۷

* برق ۱۷۴

۱) ✗

۲) ✓

۳) ✓

۴) ✓

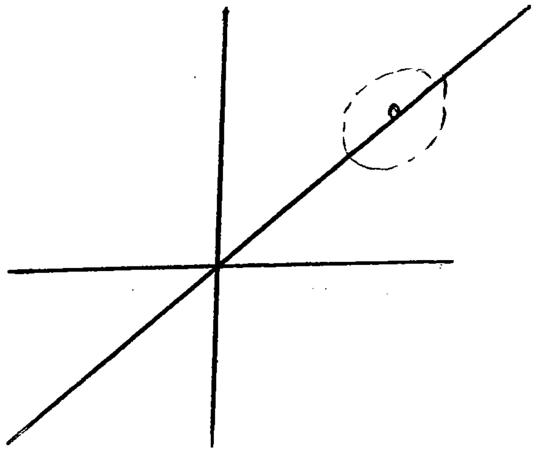
u,v پیوسته ← f(z) پیوسته ← ۴ صحیح

$$i\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \to 2ix = 2iy$$

$x = y$ ۳ صحیح

↓

۲ هم صحیح



فقط در $z=0$ مشتق دارد

همسایگی پیدا نمی‌شه دایره فقط قطرش روی خطه است ⇐ تحلیلی نیست ⇐ $\boxed{\text{اغ}}$

اینور و اونورش نیست!

* مفهوم تحلیلی: علاوه بر خود نقطه همسایگیش هم باشه!

* تابع $f(z)=u+iv$ هیچگاه نمی‌تواند فقط در نقاط روی یک منحنی یا در تعداد نقاط متناهی تحلیلی باشد.

نتیجه

شرط اول کوشی ریمان را می‌نویسیم

- به معادله می‌رسیم ⇐ در کل صفحه غیر تحلیلی!
- به اتحاد می‌رسیم ⇐ شرط دوم کوشی را بررسی می‌کنیم
  - به معادله می‌رسیم → در کل صفحه غیر تحلیلی است
  - به اتحاد می‌رسیم → در تمام نقاطی که u و v تعریف شده‌اند تابع تحلیلی است

* فرق معادله و اتحاد :

هر ارتباطی که به ازای بعضی x و y ها برقرار ← معادله ← $\begin{cases} x=y \\ y=1 \end{cases}$

هو تساوی که به ازای همه x و y ها برقرار ← اتحاد ← $\begin{cases} x=x \\ x^2-y^2=(x-y)(x+y) \end{cases}$

حل تست قبلی :

غیر تحلیلی ⇐ معادله $2x=2y$ ⇐ شرط اول نوشته شده

حل فلسفی ⇐

اگه ۴ غ ⇐ اگه پیوسته نباشه ← ۲ هم غ !

۳ هم نمی‌تونه غ باشه ← اگه تساوی برقرار نباشه ← مشتق ۲ طرف نیست ۴غ !

۲ هم نمی‌تونه غلط باشه ← چون ۱ هم غ میشه

پس تنها جواب غ ۱ است

مکانیک ۵۰) $\overset{۲۳۴}{\frown}$ ص ۲۱۶ ← ۲۸

۱) ✓ ۲)

۳) ۴)

غ تحلیلی $\xrightarrow{\text{معادله}}$ $2x=2y$ - ۱ : معادله اول نوشته

* موارد ۱)

$\frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial v}{\partial y}$

$2y = 2y \xrightarrow{\text{عدم}}$ غ تحلیلی

$y = 1 \xrightarrow{\text{عدم}}$ غ تحلیلی

$1 = x \xrightarrow{\text{تحلیلی عدم}}$ غ

$\begin{cases} 2x = 2x \xrightarrow{\text{اتحاد}} \\ -2y = -2y \end{cases}$ تحلیلی (در همه نقاط)

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✗

۴) ✓

همان z^2 است!

برق ۸۴)

ص ۲۱۳ ت ۳)

$xy > 0$ ربع اول و سوم $\Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$ ✓

$xy \Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy \rightarrow 2x = -2x$ ✗

۱)

۲)

۳) ✓

۴)

* مشتق توابع تحلیلی

اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، آنگاه مشتق $f(z)$ مطابق زیر است:

دکارتی

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

قطبی

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)e^{-i\theta}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(z)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}$$

* اگر در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$، حداقل یکی از توابع u یا v معلوم باشد، $f'(z)$ معلوم است.

تبصره: مشکل که حفظ ← فهم آسان‌سازی!

*مثال) اگر در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ داشته باشیم:

$$v = e^{x}\cos y + \operatorname{sh}x\sin y + x^{2} - y^{2} + 2xy$$

آنگاه $f'(z)$ را بدست آورید

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = (-e^{x}\sin y + \operatorname{sh}x\cos y - 2y + 2x) + i(e^{x}\cos y + \operatorname{ch}x\sin y + 2x + 2y)$$

$$\xrightarrow{x=z,\ y=0} f'(z) = \operatorname{sh}z + 2z + i(e^{z} + 2z)$$

* اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد در صورتیکه تابع برحسب x و y داده شده باشد برای آنکه تابع را برحسب z بنویسیم کافی است $\begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$ و اگر برحسب r و θ باشد کافی است $\begin{cases} r=z \\ \theta=0 \end{cases}$ قرار دهیم.

$$f(x+iy)\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}} = f(z)$$

$$f(re^{i\theta})\Big|_{\substack{r=z\\ \theta=0}} = f(z)$$

$$f(z)=x^2+iy^2=z^2 \cancel{=} (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$$

* چون به تحلیلی بودن توجه نکرده است!

روش:

اگر $\begin{cases} z \leftarrow x \\ 0 \leftarrow y \end{cases}$ ← دوباره بازش کنیم اگر دوباره تابع عینا اولی شد ← تحلی

نشد ← غ تحلیلی!

ولی خ روش جالبی نیست!

ص ۲۱۴، ت ۱۴ ص ۲۲۵

برق ۸۵)

۱) ✓ ۲) ۳) ۴)

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=1+e^{x}\cos y-i\left(-e^{x}\sin y\right)\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}}=1+e^{z}$$

$$f'(1)=1+e$$

حل ۲۴

اتوماسیون ۸ امواد ۹۰)

۱) ۲) ✓

۳) ۴)

$$f'(z)=2-2y-i(-2x)$$

* قضیه: اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه:

① u و v همساز هستند

② v مزدوج همساز u است

و برعکس (اگر شرط ① و ② برقرار باشد آنگاه $f(z)$ تحلیلی است)

* هر تابعی که در معادله‌ی لاپلاس صدق کند را همساز یا هارمونیک می‌نامند.

لاپلاس

- دکارتی $\rightarrow$ $u_{xx}+u_{yy}=0$
- قطبی $\rightarrow$ $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$
- صفحه مختلط $\rightarrow$ $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \bar{z}}=u_{z\bar{z}}=0$

* مثال: اگر $f(z)=u+iv$ (فرم اول) تحلیلی باشد و $u=r^m\cos(\theta)+\alpha\ln r+\beta r$

آنگاه m و α و β را بدست آورید.

≡ هم ارز

اگر (فرم دوم) $u=r^m\cos(\theta)+\alpha\ln r+\beta r$ همساز باشد آنگاه m و α و β را بدست آورید.

* هر موقع یک تابع تحلیلی با پارامتر مجهول در u و v داشتید، فقط شرط همساز بودن را اعمال کنید تا مجهول را بدست آورید. ؛ همشکلی

چون شرط لازم برای تحلیلی بودن ← u, v همساز

بنابراین فرم اول روشن‌تر است در کنکور !

$$\begin{cases} u_r = m r^{m-1}\cos 2\theta + \dfrac{\alpha}{r} + \beta \\ u_{rr} = m(m-1) r^{m-2}\cos 2\theta - \dfrac{\alpha}{r^2} \\ u_{\theta\theta} = -4 r^m \cos 2\theta \end{cases}$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

$$m(m-1) r^{m-2}\cos 2\theta - \frac{\alpha}{r^2} + m r^{m-2}\cos 2\theta + \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r} - 4 r^{m-2}\cos 2\theta = 0$$

$$(m^2-4) r^{m-2}\cos 2\theta + \frac{\beta}{r} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$\{ m=\pm 2$ و $\beta=0$ و α دلخواه $\}$

ص ۲۴۱ ص ۲۴۷ ، ست ۳۴

* مکانیک ۸۴)

جزء ارات هم تحلیلی دارند ← باید در لاپلاس صدق کند

$u_{xx}+u_{yy}=0 \rightarrow 2\alpha y - 6y = 0 \rightarrow \alpha = 3$

۱)

۲) ✓

۳)

۴)

اندازه‌ای به هارمونیک که در اینجا داریم باید هارمونیک باشد!

ص ۲۱۳ ، ست ۱۲

برق ۸۳)

اگر D ناحیه‌ای از صفحه xoy

همساز $z=x+iy$ باشد آنگاه مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$

۱) ✓

تمرین ۸۹) اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$u(x,y)=\alpha x\,\mathrm{ch}\,x\cos y+\beta$

۲۱

برای تحلیلی ← u همساز

* اگر در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ یکی از توابع u یا v معلوم باشد دیگری نیز معلوم است و در نتیجه $f(z)$ نیز معلوم است.

① اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی و $u=\dots$ باشد

آنگاه ← v را بدست آورید

↓

$f(z)$ را بدست آورید

② اگر $u=\dots$ باشد آنگاه خروج همساز u را بدست آورید.

③ اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی و $v=\dots$ باشد

آنگاه ← u را بدست آورید

↓

$f(z)$ را بدست آورید

[illegible]

چندین روش وجود دارد ← در کتاب ۱۳ تا ۱۴ روش !

در کلاس : ۱ روش !

بهترین روش ← هم کوتاه است و هم جامع !

$$dv = \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

خالص سازی

(انتگرال دو طرف با شرایط کوشی ریمان)

$$\Longrightarrow v = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy - \int \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^* dx$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

(انتگرال دو طرف با استفاده از شرایط کوشی ریمان)

$$\Longrightarrow u = \int \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx - \int \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^* dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial v}{\partial r} dr$$

$$\overset{''}{\Longrightarrow} v = \int \left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) d\theta - \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^* dr$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta$$

$$\overset{''}{\Longrightarrow} u = \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) dr - \int \left(r \frac{\partial v}{\partial r}\right)^* d\theta$$

* روش : مرسوم است که یه تابع برحسب x باشد ← x متغیر اول، y متغیر دوم

برحسب r و θ ← r = متغیر اول، θ = متغیر دوم

برحسب u و v ← u اول، v دوم

مثلاً

* هر موقع خواستم v را بنویسم ← با معادلات هم تراز خودش شروع می‌کنم ← ولی!

آن‌ها را از اصل رعایت ← حتماً منفی پشت دو عبارت

نکته: هر جا v را نوشتم بکارش مشتق نسبت به x

خود u با معادلات هم تراز خودش شروع

ولی نوشتن ← مشتق به x

u نوشتن ← مشتق به y

مختصات قطبی :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

ضریب r وجود دارد ← کنار θ ← $\frac{1}{r}$

کنار مشتق r ← ضرب در r

dv ← چون v تنها با dθ شروع ← چون r در dr ← ضرب $\frac{1}{r}$

du ← چون dr است ← مشتق نسبت θ به r ← ضرب $\frac{1}{r}$

* مثال) اگر در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$

$v=e^{x}\cos y+\sinh x\sin y+x^2-y^2+2xy$ آنگاه u را

بدست آورید.

نکته ⇐ چون u است ⇒ دنبال نسبت x: dx ← چون x ها است

مشتق نسبت y ← $(-e^{x}\sin y-\ldots)$

چون dy است ← مشتق نسبت به x ← $(e^{x}\cos y-\ldots)$

$$u=\int(e^{-x}\sin y+\sinh x\cos y-2y+2x)\,dx$$

$$-\int(\cancel{e^{x}\cos y}+\cancel{\cosh x\sin y}+\cancel{2x}+2y)\,dy$$

* نکته: خلاصه‌سازی

هر تابعی که تکرار شده باید برحسب y ← در تابع شامل x حذف

هر جمله dy ← نسبت به x مشتق ← بیرون شامل x حذف!

ختم نسبت { ۳ ← ۲ حذف
θ ← ۵ حذف
x ← حذف
y ← حذف

{ تنها جملاتی که حذف می‌شه: x (۱)۳ y (۱)
تنها جملاتی که رو قبلاً ندیدیم نسبت به x ← فاقد x بشه کافیه!

بعد نسبت به هر چی که رو قبلاً نداریم ← هر چی شامل اونا بود ← حذف!

$$u = -e^{x}\sin y + \operatorname{ch} x\cos y - 2yx + x^2 - y^2 + c$$

$$f(z) = u + iv \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} = \operatorname{ch} z + z^2 + c + i(e^{z} + z^2)$$

ص ۳۷، ست ۲

مکانیک ۸۲)

۱)
۲)
۳) ✓
۴)

$$v = \int (2x + 2 \quad) dy - 0 = 2xy + 2y$$

* تشتق نسبت به ؟
* تعیین نسبت به y ← (۱۲ و ۳) ← هر چی x حذف ← ۰

* مغناطیس ۷۹) ص ۲۵ — ص ۲۱۶، سطر ۲۶

۱) ✓ ۲)

۳) ۴)

۱ـ معادله ← v صحیح

جزء v ← dy ← جزء dy : مشتق نسبت به x

⊖

مشتق نسبت y ← بدون صفر ← دوم ($-3x^2$)

$$V=\int(-6xy)\,dy-\int(-3x^2)\,dx=-3xy^2+x^3+C$$

* مغناطیس ۸۰) ص ۲۴۵ — ص ۲۱۶، س ۲۹

۱) ۲)

۳) ✓ ۴)

جزء v ← (جزء x) dy ← جزء dy : مشتق نسبت به x ←

$$V=\int\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)dy-0$$

مشتق نداریم ← ۰

$$=2tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+C$$

ص ۲۲۵، ست ۷ — ص ۲۴۴

مسابقه ریاضی زهنلستان علوم - ریاضی محض ۹۱

۱) ۲) ۳) ۴) ✓

مشتق ← پیچیده

عبارت بر حسب x^2+y^2 پیچیده ← مقصات قطبی!

$$u=\frac{r\cos\theta}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$v \xleftarrow{\text{همراز}} d\theta \leftarrow \frac{\partial\theta}{\partial} \text{ مشتق نسبت } r \leftarrow \text{ بر حسب } r \text{ هم ضرب}$

چون نسبت به θ است!

$$v=\int\left(r\cdot\left(-\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\right)d\theta-0$$

چون در زیر کمه است

$$=\frac{-\sin\theta}{r}+\cancel{C}=\frac{-r\sin\theta}{r^2}$$

$$=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

صفحه ۲۴۳   صفحه ۲۱۳، تست ۱۰

* سری ۸۱)

۱)
۲)
۳)
۴)

v ← فقط dy ← جواب dy ← نسبت به x ← (ln۲ ---)

تو نسبت به y انتگرال بگیر ← ن

$$v=\int (\ln 2\, 2^x \cos(y\ln 2))\,dy + ن$$

$$=2^x \cdot \sin(y\ln 2)+c$$

* اگه خواستم f(z) تحلیلی بدم ← $x=z$, $y=0$ ←

صفحه ۲۴۳   صفحه ۲۴۷ تست ۲۵

* مقاطع ۸۷

۱)
۳)
۲)
۴)

v دارای ← u خواسته!
دیگر ندارد!
u ها خارج ← dx ← نسبت به y!
متوسط نسبت به x و x ← ۰

$$u=\int\left(1-\frac{2y}{x^2+y^2}\right)dx-0=2tg^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c$$

ص ۲۲۸ س ۹۱

* ابزار دقیق ۸۷)

۱) ✓

۲)

۳)

۴)

گیم تابع تحلیلی حاوی توش پارامتر ابداع کنید اول پارامتر مجهول را بدست آورد و عرض امتراح تحلیلی باشد.

صحیح از لاپلاس!

لاپلاس: $u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow 6ax+6by=0 \Rightarrow a=b=0$

$$u=0 \rightarrow v=c$$

ص ۲۱۱، س ۳

* مکانیک ۸۸، برق ۸۷ (نازمواد ۹۰، شیمی ۹۰)

۱)

۲)

۳)

۴) ✓

$v \rightarrow dy \rightarrow$ نسبت به x

خودش را نباید $\rightarrow 0$

$$v=\int\left(4x(x^2-y^2+1)-8xy^2\right)dy-0=4x^3y-\frac{4}{3}xy^3+4xy-\frac{8}{3}+c$$

$v(0,0)=0 \rightarrow c=0$ $\qquad v(1,1)=4-\frac{4}{3}+4-\frac{8}{3}=4$

۱۴۰

ص ۲۶۰ — ص ۱۱۱ س ۱

* برق ۹۰ (۱۹ برق ۷۶) کامپیوتر ۸۳ (هوافضا ۸۶)

۱)   ۲) ✓

۳)   ۴)

$$v=\int (3x^2-3y^2)\,dy-0=3x^2y-y^3+C$$

ص ۲۴۳ — ص ۲۱۹ س ۴

* کامپیوتر ۹۰)

ضریب ۲ام مجاز   جواب ۷ است

$$v=\int (r)\left(\frac{1}{r}+\cos\theta\right)d\theta-0=\theta+r\sin\theta+C$$

تو نسبت به θ مشتق دارد

۱)   ۲)   ۳) ✓   ۴)

* به روش دیگه هم حل کنیم ولی این روش اول بهتر است

۲ تا روش را

لطفا ایراد شو رو توانایی جامع بشید!

مطابق ۸۲ صفحه ۲۱۷ سطر ۳۲

u حقیقی ← زوج همساز خاص ← تابع $u+iv$ تحلیلی ← تابع کوشی ریمان صدق

شرط اول کوشی ریمان ← $\frac{\partial u}{\partial x}$ پیدا ←

هر کدام از گزینه‌ها $\frac{\partial v}{\partial y}$ برابر شد غلط

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+2}$$

۱) $2x$ ✗

۲) ✗

۳) ✗

۴) ✓

مطابق ۸۹ صفحه ۲۵۰ صفحه ۲۱۶ سطر ۲۶

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -4xy}$$

$\frac{\partial v}{\partial y}$

۱) $-4xy$ ✓

۲) $-2x^2$ ✗

۳) $-4x^2y$ ✗

۴) $-4x+2y$ ✗

ص ۲۴۵

* هکاتین ۸۰)

روش دوم: در دنمی خوره ← چون آزرنه کنب، لاحق ← دردسر

فرهنگستان علوم ص ۲۴۴ ← انتخاب روش دوم خوب نیست!

ص ۲۴۲ ← انتخاب روش دوم خوب نیست!

هکاتین ۸۷ ص ۲۴۶ ← انتخاب روش دوم خوب نیست!

شرق ۷۱، ص ۲۱۱، س ۳ ← ضعف این روش دوم: اصلاً امطا در نیستاد

تمرکز روی روش اول باشد

سه روش دیگر: ص ۲۴۷

ص ۲۱۵، س ۲۴

هکاتین ۷۶)

۱)

۲)

۳)

۴)

تیم روش: نقطه‌ی حالت: ۷ و ۸ بلند ← (دو) آ حی خواهند!

$u,v \longleftarrow$ پیدا $f(z)$ $\Leftarrow$ آنالیتیک: $f(z)$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 2(3-y) - i(-2x)\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}}$$

$$= 6 + 2iz$$

$$\xrightarrow{\int} \quad f(z) = 6z + iz^2 + C$$

روش اول:

$v \leftarrow dy \leftarrow$ نسبت به $x \leftarrow$

$\ominus$

نسبت به $y \leftarrow$ ناقص

$$v = \int (6-2y)\,dy - \int (-2x)\,dx = 6y - y^2 + x^2 + C$$

$$f(z) = 6z + iz^2 + iC$$

توضیح روش اول

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)\Big|_{\substack{x=z\\y=0}}$$

فرض: $f(z)$ تحلیلی

$$= u(z) + i\,v(z)$$

چون u و v حقیقی ← همیشه تابع تحلیلی

جملاتی که ضرایب i ندارند ← مربوط به u

″ ″ ″ i دارند ← مربوط به v

ص ۲۴۷

مکانیک ۱۳۷۲

$x=z,\ y=0 \Rightarrow 6z$

توجه کنید باید هر کدام که i ندارد ← باید $\boxed{6z}$ باشد!

جمله‌ای که i ندارد

۱) z^2 ✗

۲) $6z$ ✓

۳) z^2 ✗

۴) $-7z$ ✗

جلسه‌ی بعد آزمون تحلیلی! ۲ ساعت!

← بخش چهارم

$\boxed{\text{الحلوا}}$

تست‌ها را حتما بزنید!

① توابع e^z و $\cos z$ و $\operatorname{sh} z$ و $\operatorname{ch} z$ و چند جمله‌ای $a_n z^n + \dots + a_0$ همواره تحلیلی اند (تام هستند)

② ترکیب، جمع، تفریق و حاصلضرب هر چند تابع تحلیلی یک تابع تحلیلی است

$$f(z) = z^4 \cos^2\left(e^{\sin(z^2+1)}\right) + \sin^2 z \operatorname{ch}(e^z) + 1$$

③ اگر $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند، آنگاه تابع $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ فقط در ریشه‌های مخرج تحلیلی نیست

$$f(z) = \frac{z(z^2+1)}{z(z^2-1)\cos z}$$

$$z(z^2-1)\cos z = 0$$

فقط در نقاط $z=0$ و $z=\mp 1$ و $z=(2k-1)\frac{\pi}{2}$ غیر تحلیلی است.

۴) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه $\overline{f(z)}=u-iv$ غیر تحلیلی است مگر آنکه u و v ثابت باشند

$$f(z)=\bar{z}$$

z تحلیلی ← $\bar{z}$ غیر تحلیلی

$$f(z)=\overline{\cos z}$$

$\cos z$ همواره تحلیلی ← $\overline{\cos z}$ غیر تحلیلی

۵) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه $g(z)=v+iu$ حتماً غیر تحلیلی است مگر آنکه u و v ثابت باشند

به عبارت دیگر اگر v مزدوج همساز u باشد آنگاه u نمی‌تواند مزدوج همساز v باشد مگر آنکه u و v ثابت باشند

$$g(z)=i(u-iv)=i\,\overline{f(z)}$$

$$h(z)=v-iu=-i(u+iv)=-if(z)\Rightarrow$$

مزدوج همساز v برابر $-u$ است.

۶) اگر $f(z)$ غیرتحلیلی باشد آنگاه با هر چند تابع تحلیلی ترکیب، جمع، تفریق و یا ضرب بشود باز هم غیرتحلیلی است و ناحیه‌ی غیرتحلیلی هیچگاه کاهش نمی‌یابد.

$$f(z)=z^{2}\cos^{2}\left(e^{\sin(\bar z)}\right)+z^{4}\,ch^{2}z+5$$

z تحلیلی ← $\bar z$ در کل صفحه غیرتحلیلی ← با هر مقدار تابع تحلیلی جمع و ضرب و ترکیب ← غیرتحلیل

$$f(z)=z^{4}\sin^{2}\left(e^{\frac{1}{\bar z^{2}-1}}\right)+z^{3}\cos z+2$$

۷) جمع، تفریق، ترکیب و یا ضرب دو یا چند تابع غیرتحلیلی ممکن است تحلیلی یا غیرتحلیلی باشد.

$$f(z)=e^{\bar z}$$

$$g(z)=e^{-\bar z}$$

$$h(z)=-e^{\bar z}+\cos z$$

$f(z)g(z)$ ← تحلیلی است

$f+g$ ← غیرتحلیلی است

$f+h$ ← تحلیلی

$f(z)-h(z)$ ← غیرتحلیلی

$f(x)=\frac{x}{x}$

$g(x)=1$

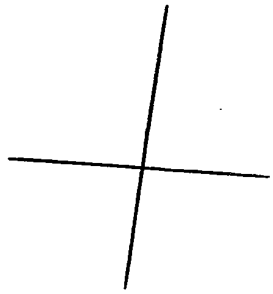
$g(z)=\frac{\bar z}{\bar z}$

[illegible] نیست درسته 1 به عنوان تحلیلی ۱

۸) اگر $f(z)$ تحلیلی باشد آنگاه $\ln(f(z))$ و $(f(z))^{\frac{1}{n}}$

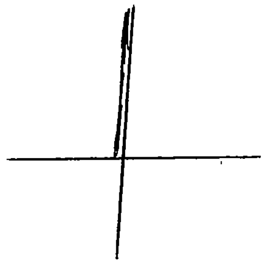
فقط در ریشه های $f(z)$ و نقاط روی شاخه تحلیلی نیستند

شاخه اصلی $\rightarrow \theta = -\pi$



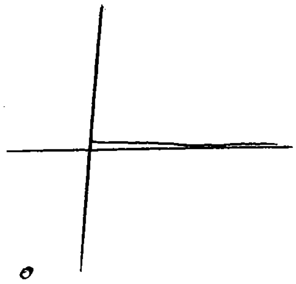
ناحیه غیر تحلیلی $\begin{cases} Re(f(z)) \leq 0 \\ Im(f(z)) = 0 \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{5\pi}{2}$



// $\begin{cases} Re(f(z)) = 0 \\ Im(f(z)) \geq 0 \end{cases}$

$0 < \theta \leq 2\pi$



// $\begin{cases} Re(f(z)) \geq 0 \\ Im(f(z)) = 0 \end{cases}$

⋮

* مثال) صفحه ۲۳۱ س ۱۰۹ جلد دوم

۱)　　　　۲)

۳) ✓　　　　۴)

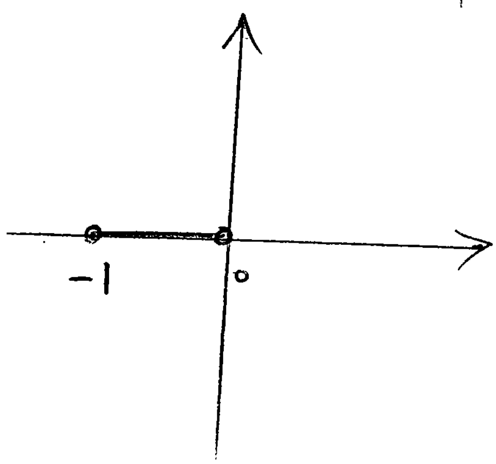
$$\begin{cases} Re\left(\frac{z}{z+1}\right) \leq 0 \\ Im\left(\frac{z}{z+1}\right) = 0 \end{cases}$$

۱۴۵

$$W=\frac{x+iy}{x+1+iy}\times\frac{x+1-iy}{x+1-iy}\rightarrow\begin{cases}Re=\dfrac{x(x+1)+y^2}{(x+1)^2+y^2}\\ Im=\dfrac{y}{\;''\;}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(x+1)+y^2\leq 0\rightarrow x(x+1)\leq 0\\ y=0\end{cases}$$

		-1		0	
$x(x+1)$	$+$		$-$		$+$



$$(f(z))^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln(f(z))}$$

* از لحاظ نقاط تحلیلی، غیر تحلیلی هم‌ارزند.

۹) اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، آنگاه دسته منحنی‌های

$u(x,y)=c_1$ و $v(x,y)=c_2$ متعامدند. به عبارت

دیگر برای محاسبه‌ی مسیرهای قائم دسته منحنی $u(x,y)=c_1$

کافی است مزدوج همساز u را بدست آورد و مساوی

c_2 قرار دهیم.

صفحه ۲۵

* برق ۷۵)

۱)

۲) ✓

۳) ✓

۴)

$$\begin{cases} u_{xx}=2 \\ u_{yy}=-2 \end{cases} \rightarrow \text{لاپلاس} \checkmark$$

$$v=\int (2x-2)\,dy-0=2xy-2y=c_2$$

دو تا رو باید علامت می‌زدی!

* اصل ماکزیمم :

اگر $|f(z)|$ غیرثابت و در ناحیه‌ی D تحلیلی باشد، آنگاه ماکزیمم اندازه $|f(z)|$ روی مرز D رخ می‌دهد (نه در داخل آن)

نتیجه ۱ : هر تابع تام غیرثابت بیکران است

نتیجه ۲ : هر تابع تام کراندار تابع ثابت است

$$\left\{ f(z)\ \text{تام}\ ,\ |f(z)| < M \Rightarrow f(z)=c \right\}$$

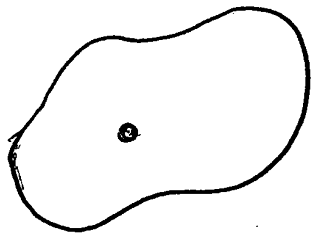
نتیجه ۳ : اگر $f(z)$ غیرثابت و در ناحیه‌ی D تحلیلی و در D هیچ صفری نداشته باشد، آنگاه ماکزیمم و مینیمم $|f(z)|$ روی مرز D رخ می‌دهد.

دلیل :
تحلیل اول

دقت در D صفر ندارد پس $\frac{1}{f(z)}$ در D تحلیلی است

$\frac{1}{f(z)}$ تحلیلی پس طبق اصل ماکزیمم پس ماکزیمم را روی مرز اختیار می‌کند

ماکزیمم $\frac{1}{f(z)}$ پس مینیمم $|f(z)|$ روی مرز است!



تحلیل دوم -

ریشه داخل ناحیه ← مینیمم داخل ناحیه و مقدارش صفره!

اما اگر ریشه داخل ناحیه نداشته باشیم ← اگه ناحیه‌ی D هست،

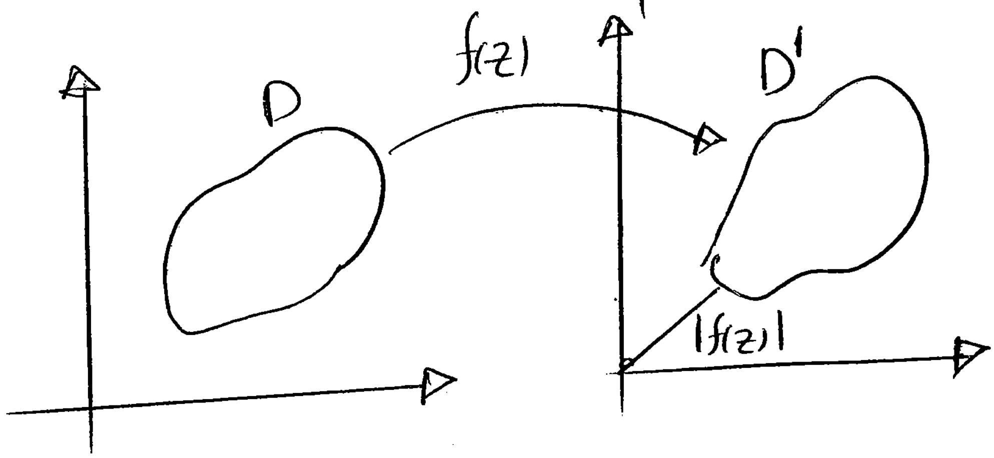
تلاش آن را توسط $f(z)$ ها ببریم ← ناحیه‌ی D'!

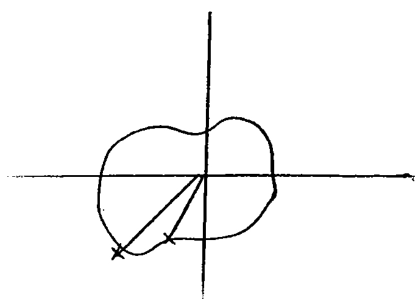
اگه صفری در D نداشته باشد ← مبدأ در ناحیه نیست

تعریف فاصله تا مبدأ ← به ازای یک نقطه روی مرز رخ می‌دهد

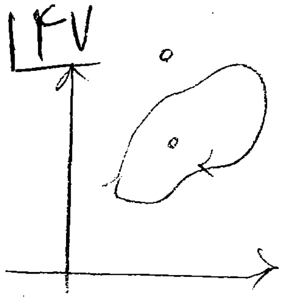
پس مینیمم به ازای مرز

بیشترین مقدارش هم همینطور!





جلسه دوم



نقاط داخل ناحیه ← اندازه = صفر

نقطه خارج ← مرز ناحیه ← روی مرز رخ می‌دهد

* مثال) ماکزیمم و مینیمم $|f(z)|$ برای تابع $f(z)=z^2+2$ روی دایره $|z|=1$ را بدست آورید.

ماکزیمم و مینیمم به ازای نقطه‌ای روی مرز رخ می‌دهد.

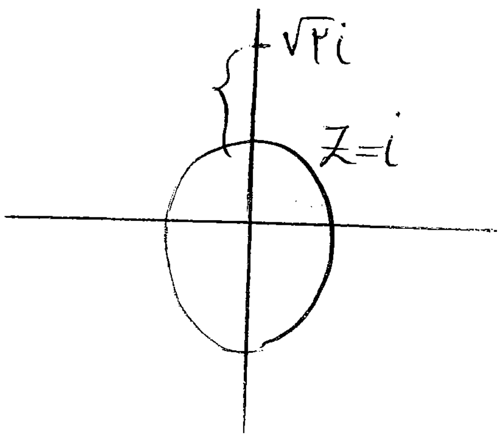
$$z = \operatorname{cis}\theta \rightarrow f(z) = \operatorname{cis}2\theta + 2 = 2 + \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$|f(z)| = \sqrt{(2+\cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta} = \sqrt{4 + 4\cos 2\theta + \underbrace{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}_{1}}$$

$$|f(z)| = \sqrt{5 + 4\cos 2\theta}$$

$\operatorname{Max}|f(z)| = 3$

$\operatorname{Min}|f(z)| = 1$



ص ۲۲۶

* برق ۷۳) ۱

۱)

۲)

۳)

۴)

اصل ماکزیمم : $f''(z)$ کراندار و تام
باید ثابت باشد ⇐

$$f''(z) = A \qquad |A|<C$$

$$f'(z) = Az+B$$

$$f(z) = A\frac{z^2}{2} + Bz + C_1 \qquad |2A_1|<C$$

ص ۲۶۶

* برق ۸۵)

۱) ✓

۲)

۳)

۴)

هر تابع تحلیلی غیر ثابت ← بیکران ← ۱

۱۴۸

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + sh^2 y \to \infty$$
$$y \to \infty$$

ص۲۱۸ تست ۳۶

*مقطع ۱۸)

۱) $\frac{1}{2} + sh^2 \frac{1}{2}$ ۲) $ch^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$

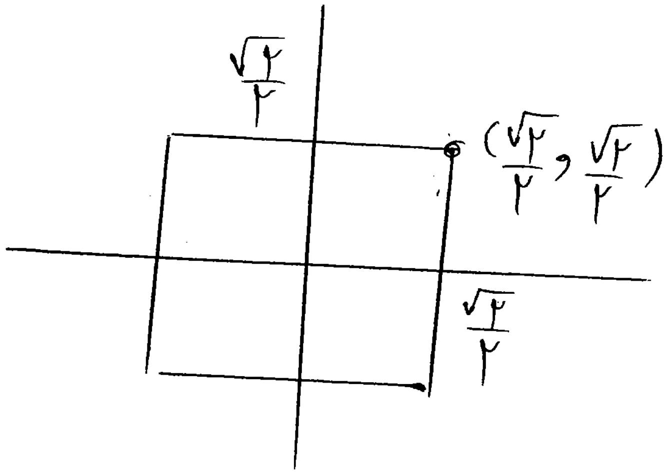
۳) $ch^2 \frac{\pi}{2}$ ۴) $\sin^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + sh^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

$$z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z = (-1)^{\frac{1}{4}} = Cis \frac{2k\pi + \pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$k=0$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=1$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$

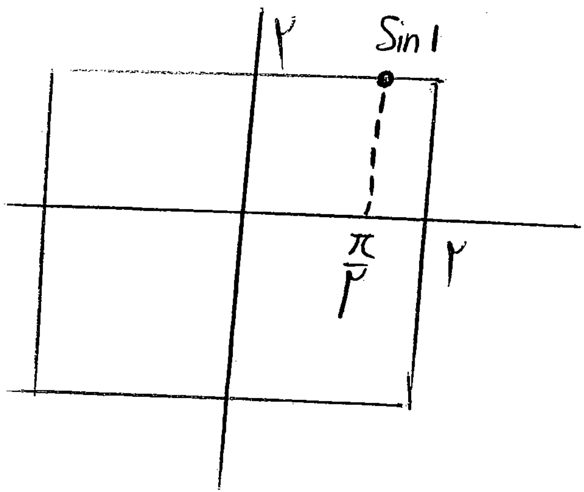
$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + sh^2 y \Rightarrow Max |\sin z|^2 = \sin^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + sh^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$



* سؤال : اگر مختصات رئوس $z = \mp 2 \mp 2j$ باشند؟

ماکزیمم $\sin^2 x + sh^2 y$ ؟

$\longmapsto \quad \operatorname{Max} |\sin z|^2 = 1 + sh^2 2$



$sh\,y$ صعودی ← هرچی y بیشتر بهتر ← $y=2$

در این نقطه $\sin$ ماکزیمم است.

۱۴۹

$$\int_0^1 \cos x\,dx = ? \quad = \sin x\Big|_0^1 = \sin 1 \ (\text{rad})$$

$= \sin 57$ درجه $= 0.84$

۱) ۰٫۰۰۱   ۲) ۰٫۹۹   ۳) ۰٫۶   ۴) ۰٫۸۴

تعریف رادیان بر اساس واحد طول است

در محاسبات مشتق و انتگرال باید بر حسب رادیان باشد

$$\sin(x^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{180}x\right)$$

$$\frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi}{180}x\right)$$

$$\frac{\pi}{180}\cos(x^\circ)$$

$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\,\text{rad}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7$$

ربع اول ← صعودی ← هر چی درجه بیشتر ← زاویه بیشتر

$2\,\text{rad}$ ← از $1.5\,\text{rad}$ بیشتر ($\frac{\pi}{2}$)

از $3\,\text{rad}$ کمتر

← جواب ۲

چرا نمیشه جا عبور کرد !

ص ب ۲۶۸ — ش ۲۲۴ — تست ۶۵

* ریاضی محض ۸۹)

۱)　۲ ✓)

۳)　۴)

$$|e^{-z}f(z)| \leq 1 \rightarrow e^{-z}f(z) = C$$

$$f(z) = Ce^{z} \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow C = 1$$

$$f(z) = e^{z}$$

چون $f(z)$ تحلیلی ← سعی می‌کنم کراندار کنم و لیوویل را بزنم

طرفین تقسیم بر $|e^{z}|$ می‌کنم!

تام و کراندار ← پس باید ثابت باشد!

تام $f(z)$ ، تام e^{-z} ← $\left| \text{تام } e^{-z}f(z) \atop \text{اندازه محدود} \right.$ ← ثابت

ص ۲۲۶ ، سال ۷۱

*ریاضی محض ۱۹۱ فرض کنید $f(z)=u+iv$ تابعی تام (همه جا تحلیلی) باشد همواره $u^2-v^2<1$ در این صورت تابع f :

۱)

۲)

۳) ✓ ثابت است

۴) کراندار نیست

$$f^2(z)=u^2-v^2+iuv$$

$$g(z)=e^{f^2(z)} \quad \mathrm{Re}\,(f^2(z))$$

$$|g(z)|=e$$

$$|g(z)|=e^{u^2-v^2}$$

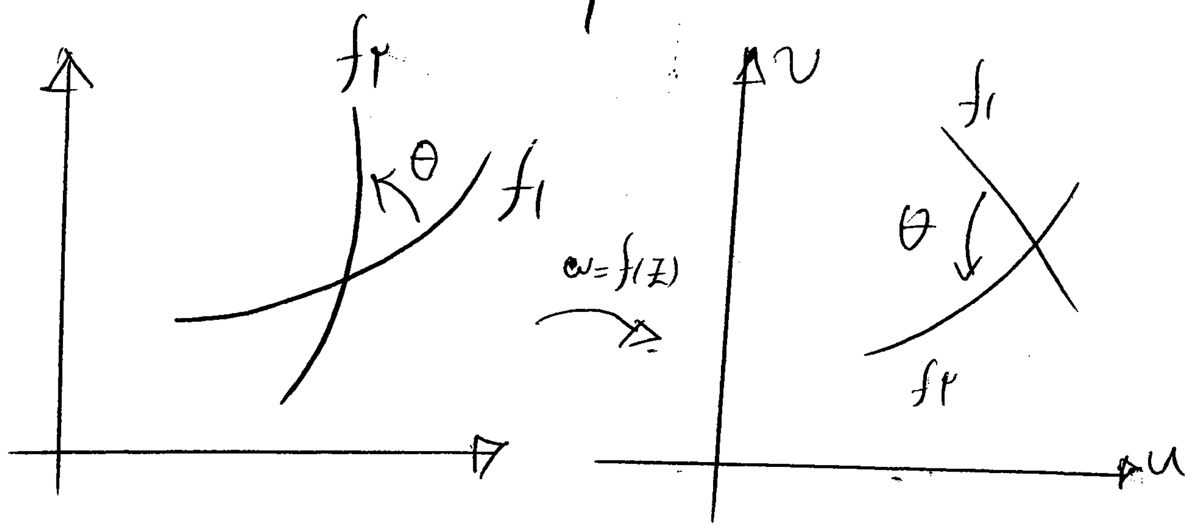
$u^2-v^2<1 \rightarrow |g(z)|<e \rightarrow$ $g(z)$ ثابت است

g ثابت $\rightarrow$ f^2 ثابت $\rightarrow$ f ثابت

* اگر تابع $f(z)=u+iv$ تام باشد و u یا v کراندار باشد آنگاه $f(z)$ کراندار است و در نتیجه $f(z)$ تابع ثابت است.

* نگاشت همدیس :

اگر در نگاشت توسط $W=f(z)$ ، اندازه و جهت زوایا حفظ شود می‌گوییم نگاشت همدیس است.



هم جهت حفظ می‌شه هم اندازه زاویه

* مثال) نگاشت $W=\frac{1}{Z}$ در مبدأ همدیس نیست

چون جهت را عوض می‌کند!

اما $w=\frac{1}{\bar{Z}}$ در مبدأ همدیس است

$\frac{1}{Z}$ ← با زاویه قرینه
$\bar{Z}$ ← با زاویه قرینه

← در کل زاویه عوض نمی‌شه!

* اگر تابع $W=f(Z)$ تحلیلی باشد آنگاه نگاشت $W=f(Z)$

فقط در نقاطی که $f'(Z)=0$ می‌شود، غیرهمدیس است.

* مثال) نقاط غیرهمدیس توابع داده‌شده را بدست آورید

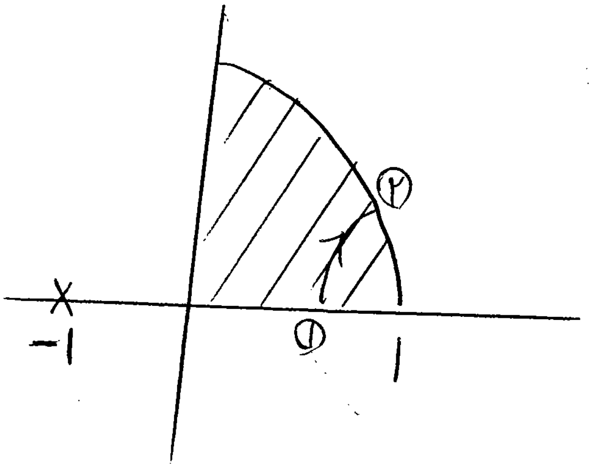
$f(Z)=Z^5 \to f'(Z)=5Z^4=0 \Rightarrow$ $Z=0$ غیرهمدیس است

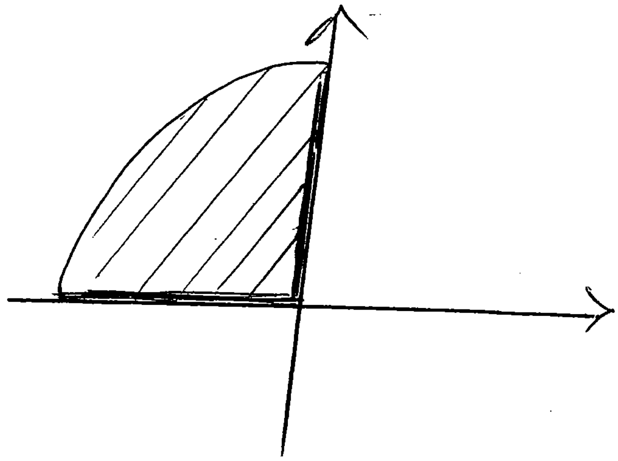
$f(Z)=\cos Z \to f'(Z)=-\sin Z=0 \Rightarrow$ $Z=k\pi$ غیرهمدیس است

$f(Z)=\frac{1}{Z} \to f'(Z)=-\frac{1}{Z^2} \Rightarrow$ بجز $Z=0$ سایر نقاط همدیس است

$f(Z)=\frac{aZ+b}{cZ+d} \to f'(Z)=\frac{ad-bc}{(cZ+d)^2}$ $ad-bc\neq 0$ $\Rightarrow$ بجز ریشه‌های مخرج سایر نقاط همدیس است

* مثال) نگاشت ناحیه‌ی هاشورخورده توسط $W=\frac{z-1}{z+1}$ را بدست آورید.





هر دوایری مخرج عبور می‌کند به خط

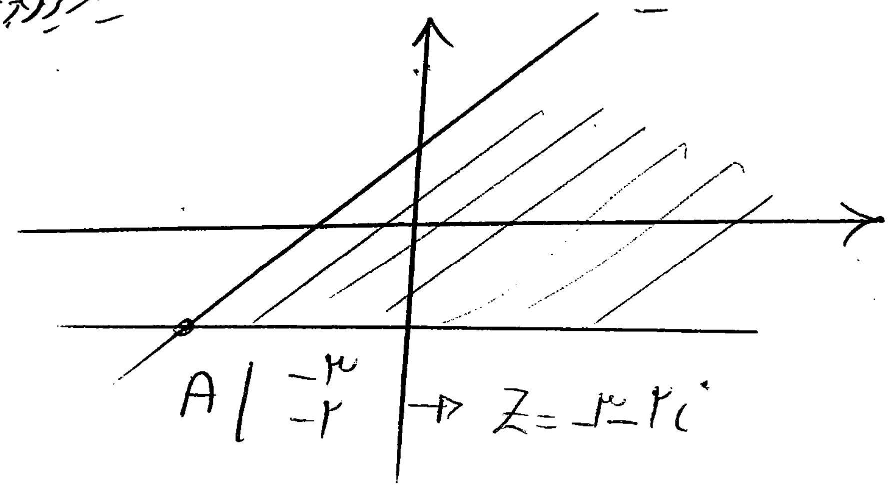
جهت عقربه‌ی ساعت : ① به ②

حتماً ← در خروجی هم باید در جهت عقربه ساعت از ① به ②

پس ناحیه بالایی است.

صفحه ۱۶۲، تست ۱۴

* برگ ۱۷۹ کدام یک از نگاشت‌های داده شده، ناحیه زیر را می‌دهد



$A \left| \begin{matrix} -3 \\ -2 \end{matrix} \right. \to z=-3-2i$

(دایره داده)

نقطه ناحیه‌ای است که جواب در خود بماند ... کدام ← ... می‌شود

$$W=\frac{au+b}{cu+d}$$

$$W'=\frac{(ad-bc)u'}{(cu+d)^2}$$

نقطه بحرانی ← باید $u'=0$

$u=z^4$

۱) ✗ $\quad$ مشتق $u=4z^3\neq 0$ ← غ

$u=$

۲) ✗ $\quad u'\neq 0$ ← غ

۳) ✗ $\quad u'=1 \rightarrow u=z$ ← غ

۴) ✓

$$u'=4(z+3+2i)^3$$

$$u'\Big| =0$$

اگر نگاشت ناحیه‌ی D توسط $w=f(z)$ ناحیه‌ی D' باشد، آنگاه

داریم:

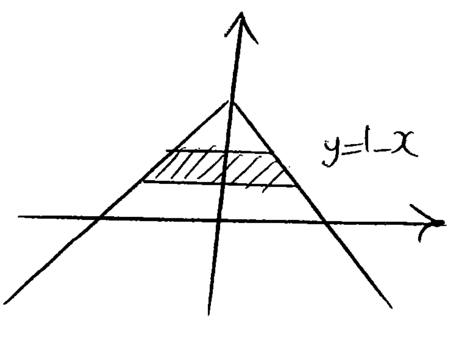
$$\text{مساحت ناحیه } D' = \iint_D |f'(z)|^2 \, dy\, dx$$

صفحه ۱۶۴، تست ۲۶

مثال ۹) ناحیه داخل مثلث تشکیل شده از منحنی $y=1-|x|$ و محور x ها را در نظر می‌گیریم. مساحت شکل حاصل از تبدیل این ناحیه از صفحه z توسط نگاشت $w=z^2$ (در صفحه w) برابر است با:

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ✓ ۴) ۲

$$f'(z)=2z=2x+2iy \rightarrow |f'(z)|^2=4(x^2+y^2)$$



$$\text{مساحت ناحیه } D' = 4\iint_D (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

$$=8\int_0^1\int_0^{1-y} (x^2+y^2)\, dx\, dy$$

$$= 8\int_0^1 \left(\frac{(1-y)^3}{3} + y^2(1-y)\right)dy$$

$$= 8\left(-\frac{1}{12}(1-y)^4 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$= 8\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = \frac{4}{3}$$

* نقطه تکین: نقطه z_0 نقطه‌ی تکین تابع $f(z)$ است. اگر دو شرط زیر را دارا باشد:

① $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد

② در همسایگی z_0 به شعاع ε نقاطی وجود داشته باشند که $f(z)$ در آن‌ها تحلیلی باشد

نقطه تکین منفرد (تنها): نقطه‌ی z_0 را نقطه‌ی تکین منفرد $f(z)$ می‌نامند اگر دو شرط زیر را دارا باشد

① $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد

② در همسایگی z_0 به شعاع ε در تمام نقاط تحلیلی باشد

شرط دوم، شرط اول را پوشش می‌دهد پس نقاط تکین را به دو دسته

تقسیم می‌کنیم :

تکین → تنها
تکین → غیرتنها

* تنها: در همسایگی‌اش تکین نداریم

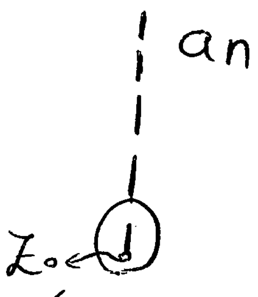
غیرتنها : در همسایگی‌اش یک سری نقاط غیرتحلیلی هست

سه حالت متصور : پیوسته → تکین غیرتنها → از نوع انباشته

حدی → تکین غیرتنها

↓

(انشعابی)



$$\lim_{n \to \infty} a_n = z_0$$

وجود حد تضمین کننده‌ی همسایگی است
چون وجود حد یعنی حتماً تابع در همسایگی آن تعریف شده باشد

۱۵۴ *پس هرگاه نتوانیم همسایگی حول z_0 بیابیم که داخلش فقط ۱ تکین باشه پس غیرتنها است.

* اگر دنباله‌ی a_n نقاط غیرتحلیلی $f(z)$ باشند درصورتیکه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = z_0$ باشد آنگاه نقطه‌ی z_0 تکین غیرتنها از نوع انباشته است و سایر نقاط دنباله همگی تکین تنها هستند.

هر دنباله یه حد داره ← کدوم توی z حد دارند
ولی تابع ممکنه چندتا دنباله غیرتحلیلی داشته باشه

* مثال) نقاط تکین توابع داده شده را بدست آورید نوع آن را مشخص کنید.

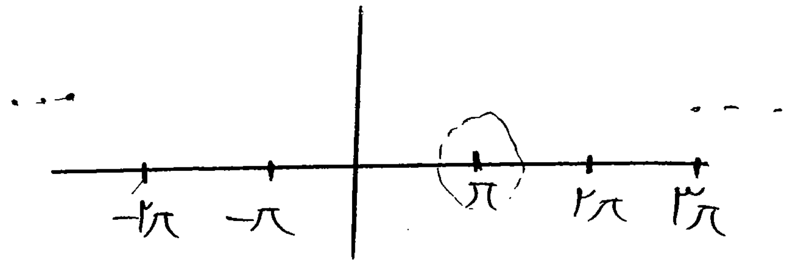
(1) $W=\dfrac{z}{z(z^2-1)} \Rightarrow$ این تابع فقط در $z=0$ و $z=\mp1$ غیرتحلیلی است

$z=0$ و $z=\mp1$ تکین تنها هستند

② $W = \dfrac{1}{\sin Z}$ → نقاط در $Z=k\pi$ تحلیلی نیست → تکین تنها هستند $Z=k\pi$

جمله عمومی $= k\pi$

$\lim\limits_{k\to\infty} k\pi = \infty$

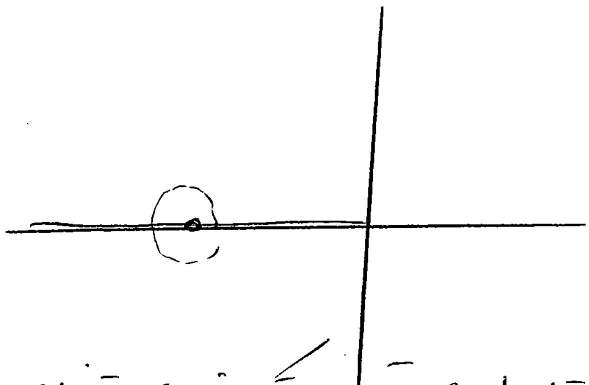


* فقط ∞ غیرتنهاست! حد $=\infty$

* نقاط دنباله همه تنها، فقط حد شون غیرتنهاست!

③ $W = e^{\sin(\frac{1}{z})}$ → نقاط در $z=0$ غیرتحلیلی است → تکین تنهاست $z=0$

④ $w = \ln z$



تمام نقاط غیرتحلیلی تکین غیرتنها از نوع انشعابی هستند

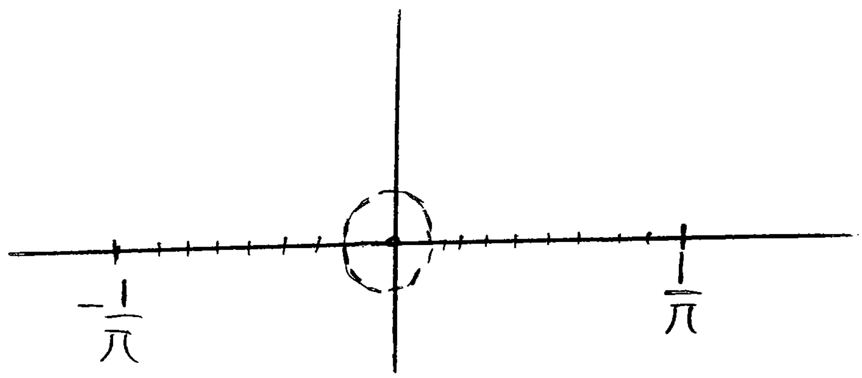
۵) $W=\dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ $\quad z=0$

$\sin(\frac{1}{z})=0 \to \frac{1}{z}=k\pi \to z=\frac{1}{k\pi}$

$z=\underset{k\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{1}{k\pi}=0$

$z=0$ تکین غیرتنها از نوع انباشته است

$z=\frac{1}{k\pi}$ همگی تکین تنها هستند



* جمع‌بندی :

۱) اگر $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند آنگاه در تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ تمام نقاط غیرتحلیلی (ریشه‌های مخرج) تکین منفرد هستند

$$W = \frac{z(z^2-1)}{\sin(z)(z^2+4)}$$

$$\sin z\,(z^2+4)=0 \begin{cases} z=k\pi \rightarrow \text{تکین منفرد هستند} \\ z=\mp 2j \rightarrow \text{تکین تنها هستند} \end{cases}$$

② اگر z_0 نقطه ی تکین تابع $f(z)$ باشد درصورتیکه $f(z)$ به عنوان ورودی هرچند تابع تحلیلی قرار گیرد و یا با هرچند تابع تحلیلی جمع یا تفریق شود و یا در هرچند تابع تحلیلی ضرب شود باز هم z_0 نقطه ی تکین تابع است

$$f(z) = z^4 e^{\sin\left(\frac{1}{z^2+1}\right)} + \cos^2(e^z)+1 \rightarrow \text{تکین تنها } z=\pm j$$

* نوع نقطه ی تکین هم عوض نمی شود!

۳) اگر $f(z)$ تحلیلی باشد آنگاه نقاط غیرتحلیلی $\ln(f(z))$ و $(f(z))^{\frac{1}{n}}$ تماماً تکین غیرتنها از نوع انشعابی هستند

۴) در توابع

$$\frac{1}{\sin(f(z))} \quad , \quad \frac{1}{\cos(f(z))} \quad , \quad tg(f(z))$$

و

$$\frac{1}{ch(f(z))} \quad , \quad \frac{1}{sh(f(z))} \quad , \quad tgh(f(z))$$

و $\frac{1}{e^{f(z)}-a}$ ، $a \neq 0$ و ... همواره نقاط تکین منفرد

$f(z)$ برای توابع فوق نقاط تکین غیرتنها از نوع انباشته هستند.

$$W = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{z(z^2-1)}\right)}$$

$z=0$ و $z=\pm 1$ تکین غیرتنها از نوع انباشته‌اند

$g(f(z))=0 \Rightarrow f(z)=a_n$ و $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$

فرض: z_0 نقطه تکین منفرد $f(z)$:

$$\frac{1}{z-z_0}=a_n \Rightarrow z-z_0=\frac{1}{a_n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z = \lim_{n\to\infty}\left(z_0+\frac{1}{a_n}\right)=z_0$$

z_0 نقطه تکین غیر تنها از نوع انباشته برای $\frac{1}{g(f(z))}$ است.

(۵) اگر $f(z)$ در یک ناحیه غیر تحلیلی باشد در آن ناحیه نقطه ی تکین ندارد

مثال: تابع $w=\frac{1}{z-1}$ نقطه تکین ندارد چون در کل صفحه غیر تحلیلی است

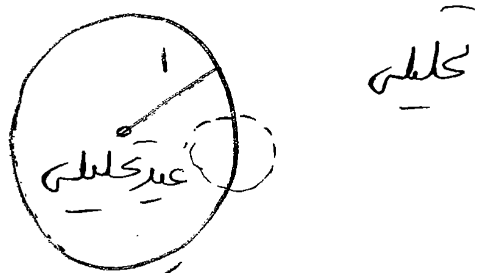
بعضی کارا با استفاده از این (ه) تا مرز ۳ بار با تعریف بلد باشی!

$$f(z)=\begin{cases} \sin z & z\neq 0 \\ 2 & z=0 \end{cases}$$

در صورت پیوسته نیست ← مشتق‌پذیر نیست ← تحلیلی نیست

$z=0$ نقطه‌ی تکین تنها است.

$$f(z)=\begin{cases} \bar{z} & |z|<1 \\ z^2+2z & |z|\geq 1 \end{cases}$$



یه سری نقاط تحلیلی اطرافش هست ← تکین

غیرتنهاست ← یه سری غیرتحلیلی اطرافش هست.

نقاط روی دایره واحد تکین غیرتنها هستند

* کتاب چرچیل: مهم‌ترین کتاب در زمینه مختلط!

بسط تیلور : اگر تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد آنگاه $f(z)$ را می‌توان برحسب سری توانی $(z-z_0)$ مطابق زیر بسط داد :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , \quad a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

حالت خاص : بسط مک‌لورن : اگر $z_0=0$ باشد بسط را مک‌لورن می‌نامند

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

بسط لوران : اگر تابع $f(x)$ در همسایگی z_0 تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ را می‌توان برحسب توان‌های $z-z_0$ مطابق زیر بسط داد :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{جملات اصلی بسط لوران}}$$

بسط لوران را حول نقاط زیر می‌توان نوشت :

z_0 نقطه‌ی تحلیلی $f(z)$ باشد

z_0 نقطه‌ی تکین منفرد $f(z)$ باشد

تحلیلی باشد، لورانش تحلیلی حله

غیرتحلیلی باشد، قسمت اصلی لورانش تحلیلی به تکین تنها

* مثال بسط لوران $W=\ln z$ حول $z=0$ وجود ندارد ← $z=0$ تکین غیرتنها است
* مثال بسط لوران $W=\frac{1}{z^2\sin(\frac{1}{z})}$ حول $z=0$ وجود ندارد ← "

سوال : اگر z_0 نقطه‌ی تحلیلی $f(z)$ باشد چه تفاوتی یا شباهتی بین بسط تیلور و لوران وجود دارد ؟

روش محاسبه‌ی سری لوران $f(z)$ حول نقطه z_0 :

① ابتدا $z-z_0=t$ در نظر می‌گیریم تا سری حول $t=0$ تبدیل شود

② اگر $f(z)$ شامل توابع مثلثاتی، هایپربولیکی، نمایی، لگاریتمی باشد، از سری مک‌لورن آن‌ها استفاده می‌کنیم با این تفاوت که در صورت نیاز می‌توان به جای z، $\frac{1}{z}$ نیز قرار داد

$$z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)=z^3\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\cdots\right)$$

* صفحه ۲۸۱ تا ۲۸۹

یادآوری روش‌های محاسبه سری مک‌لورن که بطور کامل و دقیق مطالعه شود!

جمع بسط مک لورن ـ جز

$\operatorname{tg} z$ نیاز نیست حفظ کنید

↓

این جمع از کسر بدست نمیاد

۳) اگر تابع $f(z)$ شامل توابع چندجمله‌ای کسری باشد ابتدا به کسرهای جزئی تفکیک کرده و سپس از بسط تصاعد هندسی مطابق زیر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{a_0}{1-q} \overset{|q|<1}{=} a_0(1+q+q^2+q^3+\cdots)$$

$$\frac{1}{1-z} \overset{|z|<1}{=} 1+z+z^2+z^3+\cdots$$

$$\frac{1}{1+z} \overset{|z|<1}{=} 1-z+z^2-z^3+\cdots$$

$$\frac{1}{1+z^2} \overset{|z|<1}{=} 1-z^2+z^4-z^6+\cdots$$

⋮

$$\frac{1}{1+z^k} \overset{|z|<1}{=} 1 - z^k + z^{2k} - z^{3k} + \cdots$$

* مثال بسط لوران تابع $f(z) = \dfrac{\ln z \times tg^{-1}(\frac{1}{z-1}) \sin z}{(z-1)^3 z^2}$ را در ناحیه‌ی $|z-1|<1$ بدست آورید.

$$z-1=t \to z=t+1$$

$$f = \underbrace{\frac{1}{t^3}}_{f_1} \times \underbrace{\frac{1}{(t+1)^2}}_{f_2} \underbrace{\ln(1+t)}_{f_3} \underbrace{tg^{-1}(\frac{1}{t})}_{f_4} \underbrace{\sin(t+1)}_{f_5} \quad |t|<1$$

$$f_1 = \frac{1}{t^3} \checkmark$$

$$f_2 = \frac{1}{(t+1)^2}$$

(* $\frac{1}{t+1} \overset{|t|<1}{=} 1-t+t^2-t^3+\dots$

(* مشتق از $\longrightarrow \frac{-1}{(1+t)^2} = -1+2t-3t^2+\dots$

$\longrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} = 1-2t+3t^2-\dots$

f_2

$\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\dots$ f_3

$\ln(1+x) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\dots \xrightarrow{\int} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots$

$f_4 = tg^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \longrightarrow tg^{-1}x \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\dots$

$\xrightarrow{\text{انتگرال}} tg^{-1}(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$

$tg^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{5t^5}-\dots$ f_4

$$f_5 = \sin(t+1) = \sin t \cos 1 + \cos t \sin 1$$

چون مکلورن !
* اینجا باید بیایم بیرون ← ترم صفر صفر شود
در دوری باید صفر باشد

$$= \cos 1\left(t - \frac{t^3}{3!} + \cdots\right) + \sin 1\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)$$

$$f = f_1 f_2 \cdots f_5 \Big|_{t = z-1}$$

ص ۲۶۴ است ۵۶

* ریاضی محض ۸۴، مکانیک ۹۲)

در بسط لوران مقدار اصلی $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ حول ۰،
ضریب z^2 برابر است با:

۱) ۰ ۲) πi ۳) $\frac{11e}{24}$ ✓ ۴) $\frac{13e}{24}$

از طرفین ln می‌گیریم ⟵ (لوران، مکلورن) دو وقت تابع $g(z)$ $f(z)$

$$W = (1+z)^{\frac{1}{z}} \Rightarrow \ln w = \frac{1}{z}\ln(1+z)$$

$$= \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots\right)$$

$$\ln w = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \cdots$$

$$W = e^{1\underbrace{- \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \cdots}_{u}}$$

$$f(g(x)) \begin{cases} g(0)=0 \longrightarrow u = g(x) \\ g(0) \neq 0 \end{cases}$$

$$g(0) \neq 0 \;\Downarrow\; a + \underbrace{g_1(x)}_{u}, \quad g_1(0) = 0$$

$$W = e \times e^{u} = e\left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$W = e\left(1 + \left(-\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \cdots\right) + \frac{\left(-\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \cdots\right)^2}{2!} + \cdots\right)$$

ضریب z^2 $= e\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)=\frac{11e}{24}$

* مثال) بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ در نواحی

داده شده بدست آورید.

الف) $|z|<1$ ب) $1<|z|<2$ ج) $|z|>2$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\underbrace{\frac{-1}{z-1}}_{f_1}+\underbrace{\frac{1}{z-2}}_{f_2}$$

$$f_1=-\frac{1}{z-1}\xrightarrow{|z|<1}\frac{1}{1-z}\overset{|z|<1}{=}1+z+z^2+z^3+\cdots$$

$$|z|<1\rightarrow\left|\frac{z}{2}\right|<1$$

$$f_2=\frac{1}{z-2}\rightarrow-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\overset{\left|\frac{z}{2}\right|<1}{=}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right)$$

$$f=f_1+f_2$$

ب) $1<|z|<2$

$$|z|>1 \rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1 \rightarrow f_1=\frac{-1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) \overset{\left|\frac{1}{z}\right|<1}{=} -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$|z|<2 \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right|<1 \Rightarrow f_2=\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$\overset{\left|\frac{z}{2}\right|<1}{=} -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right)$$

$$f=f_1+f_2$$

ج) $|z|>2$

$$|z|>2 \rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{2} \rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$f_1=\frac{-1}{z-1}=-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) \overset{\left|\frac{1}{z}\right|<1}{=} -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$|z|>2 \rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1$$

$$f_2 = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} \overset{\left|\frac{2}{z}\right|<1}{=}$$

$$= \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\dots\right)$$

دایره‌ای به شعاع r رسم می‌کنیم

شرط شعاع را از روی شرط مسأله می‌نویسیم

همه داخل دایره همگرا شود

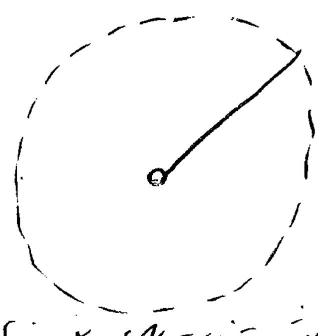
ریشه مخرج داخل → قطب $\frac{\alpha}{z}$

ریشه مخرج خارج → αz قطب

$z=1$ → خارج ← خارج است ← قطب $=\alpha z$

فقط اعداد ثابت ← همگرا

$\frac{-1}{z+1}$



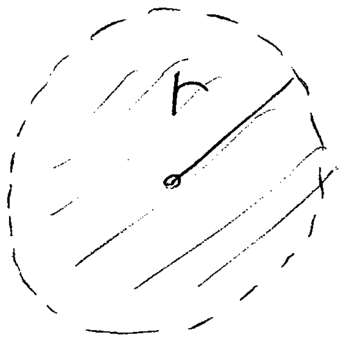
$r=99$

$\leftarrow \left(1-\frac{z}{2}\right)$

$z=2$ ← خارج ← از عدد ثابت همگرا نیاز ۲- همگرا

ب)

$r=1/9$



$|z|<2$

۲ از روی شرط تیز برمی‌نویسیم!

$z=1$ داخل ناحیه ← از z فاکتور می‌گیریم

$$-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$$

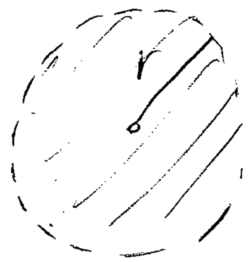
$z=2$ خارج ناحیه ← از عدد ثابت فاکتور می‌گیریم

از ۲- فاکتور می‌گیریم

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

ج)

$r=2/1$



$|z|>2$ ↓ ۲٫۱

$z=1$ ← داخل ← از z فاکتور $\quad -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$

$z=2$ ← داخل ← از z فاکتور ← $\quad \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$

* جمله اول را بنویسیم ← دو بار در یک $\frac{1}{}$ ضرب داشت!

$$|z-i|=2$$

$$z=-1+\frac{i}{2}$$

$$\left|-1+\frac{i}{2}-i\right|=\left|-1-\frac{i}{2}\right|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}<2$$

داخل

مساوی = روی مرز

بزرگتر = خارج

پس نیازی به رسم دایره نیست

اما نقطه ها ⇐

دایره

$|z|=r$

خارج ← $|z|>r$

مرز ناحیه $|z|=r$

داخل ← $|z|<r$

$$\frac{1}{az+b}$$

ناحیه داخل $z=-\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{az}\,\frac{1}{1+\frac{b}{az}}=\frac{1}{az}\left(1-\frac{b}{az}+\left(\frac{b}{az}\right)^2-\left(\frac{b}{az}\right)^3+\cdots\right)$

ناحیه خارج $z=-\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{b}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}z}\right)=\frac{1}{b}\left(1-\left(\frac{a}{b}z\right)+\left(\frac{a}{b}z\right)^2-\left(\frac{a}{b}z\right)^3+\cdots\right)$

جالبه [illegible] ناحیه ای که ما لازم داریم [illegible]

برگردیم به صورت مثال)

ب)   از z تا کنتور + داخل ناحیه ← $z=1$

از عدد ثابت تا کنتور + خارج ناحیه ← $z=2$

جواب سوال ص:

z_0 تحلیلی ← لوران با تیلور همسانند؟

$z=0$ نقطه تحلیلی است

اما همه جا نمی توان همه را تیلور نوشت!

همسایگی z_0 تحلیلی باشد ← تیلور و لوران همسانند

حوزه z_0 تحلیلی در جاهایی [illegible] تیلور [illegible]

اگر z_0 نقطه‌ی تحلیلی $f(z)$ باشد درصورتیکه بسط لوران را

در همسایگی z_0 بنویسیم بسط تیلور و لوران یکسان

می‌شود. درغیراینصورت یکسان نیستند

* ادامه صحبت سطالوران:

① تشخیص مرز قدرتی. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \to \frac{\alpha}{z} =$ قدرتی $\to$ نقطه اکلیپس داخل دایره

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \to \alpha z =$ قدرتی $\to$ نقطه اکلیپس خارج دایره

② تشخیص مرز جمله اول.

$$\frac{1}{az+b} = \frac{1}{az}\left(\frac{1}{1+\frac{b}{az}}\right) = \frac{1}{az}\left(1 - \frac{b}{az} + \left(\frac{b}{az}\right)^2 - \cdots\right)$$

③ تشخیص قدرتی جمله اول ← مشخص شدن تمام جملات سطالوران

ص ۲۹۵ ص ۲۶۲ ص ۴۱

کامپیوتر ۸۴

۱) ✗

۲) ✓

۳) ✗

۴) ✗

$$\frac{\alpha}{z+1} + \frac{\beta}{z+3}$$

۱- داخل کره ← $\sum \frac{a_n}{z^n}$ دارم

۳- خارج ← $\sum a_n z^n$ دارم

بین ۳ و ۴ ← حذف

اختلاف اول ۲ ← یعنی اختلاف درجه ← بعد ضریب

ترتیب اول : جمله اول = عدد ثابت

$\frac{\alpha}{z+1}$ ← $z=-1$ داخل ← از z کمتر ← ضریب = $\frac{\alpha}{z}$

پس تا جمله اول $\frac{\alpha}{z}$ است پس ترتیب اول غلط است

حالا حل با ضریب

$n=0$ ← ترتیب اول -1 ، ترتیب دوم $-\frac{1}{3}$

$\beta=-1 \Rightarrow \frac{-1}{z+3}$

۳- خارج ← از ۳ کمتر ← جمله اول $= -\frac{1}{3}$

ترتیب اول غلط است ← ۲ درست ✓

۱۶۶۴

ص ۲۶۸ ص ۲۵۶، س ۲۶

~~مکاتبه~~ ۱۷۲

$n=0$
جمله اول

(۱ ✓ $\frac{1}{t^2}$ (۲ × $\frac{1}{t}$

(۳ × $-\frac{2}{t}$ (۴ × $\frac{-2}{t^2}$

تعجب
حول نقطه صفر نبود ← حتماً ← $z-1=t$

(۱) $z-1=t \Rightarrow z=t+1 \Rightarrow \omega=\frac{1}{(t+1)^2-1}=\frac{1}{t(t+2)}$

جمله اول $=\frac{1}{t^2}$

صورت عدد، $\frac{1}{t}$ خودش بسط داده شده حتی باید $(t+2)$ را بسط

۲- داخل ناحیه ← از t فاکتور ← جمله اول $=\frac{1}{t^2}$

(شعاع $=2,1$) قبلی $= -\frac{2}{t}$

در هر حلقه جدا است

$n=0$ ← جمله کلی اول ← ۲، ۳، ۴ غ ← ۱ درست ✓

ص ۲۷۲، س ۹۷

سوال ۸۱، ریاضی محض ۸۹

همسایگی: $|z-z_0|<\varepsilon$

(۱ × (۲ ✓

(۳ × (۴ ×

$|z-z_0|<4 \Rightarrow |z-2|<4$

وقتی میگه تحلیلی ← همه نقاط تکین خارج ← چون تنها نقطه تکین $z\alpha$

تفاوت نوع ۱ و نوع ۲ چیه

نوع ۱ ← بسط‌های سری تحلیلی باشه چی‌جوری

نوع ۲ ← 〃 〃 〃 〃 نباشه 〃 〃

نوع ۲ تعمیم شده نوع ۱ است!

بسط لوران حول نقطه تحلیلی ← پس همه جا تیلور ← نوع ۱

تا اینجا 〃 〃 〃 〃 نوع ۱ هستند

در ۲ هم جمله‌هایی که همه‌شون منفی‌اند توان‌شون را نداریم

پس فرق اصلی در نقطه‌هاست ← تحلیلی و غیر تحلیلی!

چون حول صفر نیست اول ⇐

$$z-2=t \Rightarrow z=t+2$$

$$\Rightarrow \quad w=\frac{2(t+2)-3}{(t+2)^2-3(t+2)+2}=\frac{2t+1}{t(t+1)}, \quad 1<|t|<4$$

$$=\frac{a}{t}+\frac{b}{t+1}$$

۱۶۷

صورت $\frac{1}{t}$ ← درجه ۱ ← موارد

درجه چهار ← جمع قطب جمله $\frac{a}{t}$ داریم اما ← درجه ۴ ← تمام $\frac{1}{t}$ دارد

$\frac{b}{t+1}$ ← ساده ← $\sum a_n t^n$ ← مخرج $\frac{a}{t}$ باشد!

لفظ درجه اول ۲ ← $n=1$ توان t^2 ، $n=1$ توان‌ها عدد ثابت

جمله اول عدد ثابت است ← درجه ۱ اغ است ← درجه ۲

$\boxed{b = \text{جمله اول}}$

* همش یه کار تکراری ← پیدا کردن جمله اول و قدر نسبت!

ص ۲۶۱ ، ص ۳۸

* مکانیک ۱۸۲ ص ۳۰۰

۱) ۲)

۳) ۴) ۴۷

* راه حل اول: $Z^2 = -1$ ← $|-1| = 1$ ← داخل ناحیه ← از Z^2 مالکوم ← جمله اول $\frac{1}{Z^2}$

b_2 یعنی جمله اول ← میشه ۱ (ضریب)

a_2 هم صفره!

راه دوم: چون همه عدد Z^n های مثبت‌اند جمله اول باید مقدار $\frac{1}{Z^2}$ باشد (شک)

$|t| > 1$

$$Z^2 = t \longrightarrow \frac{1}{1+t} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\cdots\right)$$

برق ۸۸) صفحات ۲۵۸، ۲۲

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+2)}$$

۴) $\frac{2}{81}$ ۳)✓ ۲) ۱)

$$z-1=t \Rightarrow z=t+1 \Rightarrow f=\frac{t+1}{t(t+3)} \quad 2<|t|<3$$

۳ خارج ناحیه است ⇐

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\left(-\frac{t}{3}\right)^2=\frac{2}{81}t^2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{t}+\frac{b}{t+3}$$

$$q=-\frac{t}{3}$$

$$\frac{a_0}{1-q}=a_0(1+q+q^2+\cdots)$$

ص ۲۷۱ ، ت ۹۲

*نانوعلوم (۸۹)

$$f(z)=\frac{1}{z(z^2-1)}$$

جمله اول

$n=0$ جمله دوم

۱) ××

۲) ×× عدد / عدد ثابت

عدد / عدد ثابت

۳) ✓✓

$-\frac{1}{t}$ عدد ثابت

۴) ×× $\frac{1}{t^2}$ $\frac{\alpha}{t}$

چون حول ۱ $\Leftarrow$ $z-1=t$

$$z-1=t \Rightarrow z=t+1$$

$$\Rightarrow f=\frac{1}{(t+1)((t+1)^2-1)}=\frac{1}{t(t+1)(t+2)} \qquad 1<|t|<2$$

$\frac{1}{t}$ خورش لطف را نشد الست $\leftarrow$ ما یم بیرون

راه دوم:

۲- خارج $\leftarrow$ از ۲ فاکتور $\leftarrow$ $\frac{b}{2t}$ $\leftarrow$ $\frac{\alpha}{t}$

$$\frac{1}{t}\left(\frac{a}{t+1}+\frac{b}{t+2}\right)$$

۱- داخل $\leftarrow$ از t فاکتور $\leftarrow$ جمله اول $\frac{a}{t^2}$

راه اول: جمله اول که حذف شد $\leftarrow$ ۳ درست!

صفحه ۵۷۶ تست

* ریاضی محض ۹۲)

$$f(z)=\frac{-2z}{(z-i)(z-3i)}$$

۱) ✗ $\frac{a}{z^2}$ ۲) ✓ $\frac{a}{z}$

۳) ✗ $\frac{a}{z}$ ۴) ✗ $\frac{a}{z^2}$

$z=$ جمله اول

داخل i ← از جمع فاکتور ←

⇐ ۱ و ۴ غ

بین ۱ و ۳ ← فرم یکسان!

۳i خارج ← از i۳ فاکتور ← جمله اول غیر ثابت

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$$

الف) $|z|<1$

ب) $1<|z|<2$

ج) $|z|>2$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

د) ~~$|z|<5$~~

طرح این سوال غ است

این تابع در صورت سؤال در ناحیه ۱ هر دو تابع تحلیلی است
داخل ناحیه تحلیلی با هیچ نقطه تکین بجز مرکز دایره نباشد

الف) داخل ناحیه نقطه تکین نیست
ب) 〃
ج) 〃

د) ۲ تا نقطه تکین داخل ناحیه است

اولین دیدگی ناحیه تحلیلی اینه هیچ نقطه تکین داخل ناحیه نباشد

طراح فقط رشون الف و ب و ج را به داخل سؤال!

مثلا ۱، ۲، ۳ : <1 ، $1<$ ، <2 ، $2<$ ، <3 ، >3

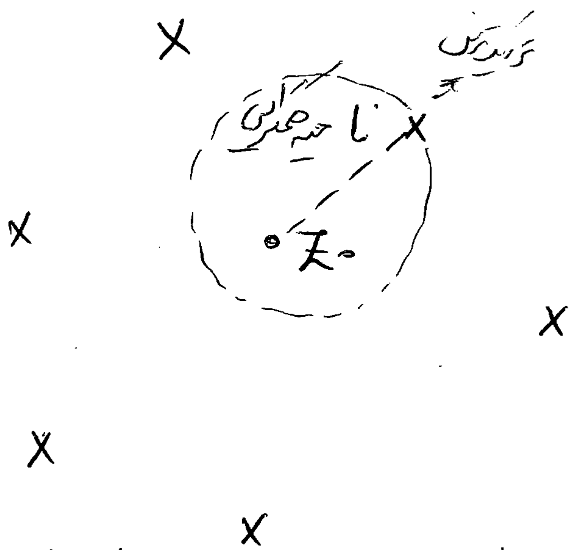
وقتی می‌نویسد $|z-z_0|<4$ ⟵ ۴ تا اولین نقطه تکین هم را مشترک کرد!

*اگر z_0 نقطه تحلیلی $f(z)$ باشد، در صورتیکه سط لوران در همسایگی z_0 نوشته شود با سط تیلور یکسان است، در غیر اینصورت متفاوت است

$|z|<r$ ⟵ فقط جملات با توان مثبت $\frac{\dots}{z^n}$
تا اولین نقطه تکین ...

سؤال: چرا بسط لوران حول نقاط تکین غیرتنها وجود ندارد؟

* برای محاسبه‌ی شعاع همگرایی تابع $f(z)$ حول نقطه z_0 کافی است نقاط غیر تحلیلی $f(z)$ را بدست آوریم. کمترین فاصله z_0 تا نقاط غیر تحلیلی را برابر شعاع همگرایی در نظر می‌گیریم.



ناحیه همگرایی ⇐ چون نقض می‌کند سایر نقاط اینجا نیستند!

ص ۲۵۸ تست ۲۳

* برق ۸۹، ریاضی مهندسی ۸۳) شعاع همگرایی بسط تیلور $\frac{1}{(z-1)(z-3)}$

۱) $\frac{1}{2}$ ✓   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

$z=1 \longrightarrow d_1=\frac{1}{2}$

$z=3 \longrightarrow d_2=\frac{5}{2}$

$\rightarrow R=\min(d_1, d_2)=\frac{1}{2}$

جواب سوال: شعاع همگرایی ... ← ۱ نمی‌شه بسط نوشت!

ex: $\quad tg x = x + \frac{1}{3}x^3 + \dots$

$$tg\left(\frac{1}{z}\right) = \cancel{\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \dots}$$

غ ← چون $z=0$ تکین غیر تنها است! ← بسط لوران وجود ندارد

* بسط لوران حول نقاط تکین غیر تنها وجود ندارد

$\frac{1}{z^4 \sin(\frac{1}{z})}$ ⇐ ~~اگر بپرسید $z=0$ را~~ بسط لوران حول

بسط لوران وجود ندارد

* کلاس‌های جبرانی معادلات با مشتقات جزئی: جلسه اول

پنج‌شنبه: ۷/۴ ← ساعت ۱۶ تا ۲۱/۵

دوشنبه: ۷/۸ ← ۱۱/۵ تا ۱۷

چهارشنبه: ۷/۱۰ ← ۷/۵ تا ۱۳

پنج‌شنبه: ۷/۱۱ ← ۱۶ تا ۲۱/۵

محاسبه ناحیه همگرایی و شعاع همگرایی :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

آزمون ریشه (کوشی) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{a_n}\right| < 1$

آزمون نسبت (دالامبر) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

* کامپیوتر ۸۳) ص ۲۶۲، تست ۴۵

$$\sum \left(\frac{2z}{2z+1}\right)^n$$

۱)　　　　۲)

۳) ✓　　　　۴)

آزمون ریشه $\Rightarrow \left|\frac{2z}{2z+1}\right| < 1 \rightarrow Re(z) > -\frac{1}{4}$

ریشه صورت $= 0$ ، ریشه مخرج $= -\frac{1}{2}$ ← عمود منصف $= -\frac{1}{4}$ ← سمت شامل صفر ← همانجا ← $Re(z) > -\frac{1}{4}$

صفحه ۳۰۸

صنعتی ۱۳۸۷ تست ۱۴

* برق ۱۳۸۳

۱)   ۲)   ۳)   ۴)

آزمون شده $\rightarrow \left| e^{\frac{i}{z+1}} \right| < 1 \rightarrow y < 0$

صورت موهومی ← ضرب در مزدوج مخرج موهومی تا حقیقی !

i ← زوج ← $-iy$ ← ← $-iy$ حقیقی i ← y

$$e^{Re\left(\frac{i}{z+1}\right)} < 1 \rightarrow Re\left(\frac{i}{z+1}\right) < 0$$

$$Re\left(\frac{i(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}\right) < 0 \rightarrow y < 0$$

ص ۲۰/۱۰ ص ۲۵۷، ست ۱۲

* برق ۸۲)

۱) ۲) ۳) $xy<0$ ✓ ۴)

آزمون ریشه $\Rightarrow |e^{\frac{1}{z^2}}|<1$

تحلیل ذهنی : $x^2-y^2+2ixy \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -2ixy \times i = 2xy$

ص ۳۰۷ ص ۲۵۹، ست ۲۶

* کامپیوتر ۷۰)

۱) ۲) ✓ ✓ ۳) ۴)

آزمون ریشه $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |\underbrace{(1-\frac{1}{n})^n}_{e^{-1}} z| < 1 \Rightarrow |z|<e$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = 1^\infty \rightsquigarrow \lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)}$$

$$e^{\lim_{n\to\infty} n(1-\frac{1}{n}-1)} = e^{-1}$$

۱۷۲

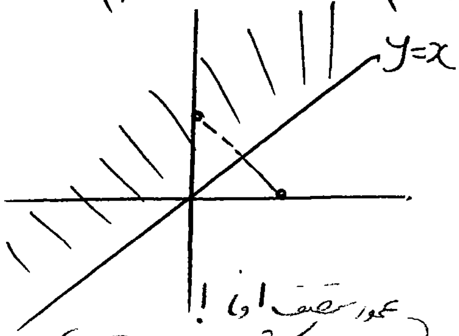
ص ۲۵۸، ست ۲۱

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{z-1}\right)^n$$

* برق ۸۷)

۱) ✓ ۲) ۳) ۴)

آزمون ریشه → $\left|\frac{z-i}{z-1}\right|<1$ →



عمود منصف اول!
نواحی که شامل z_1 هست کنورا!

ص ۲۲۴، ست ۵

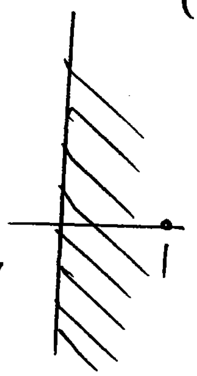
* کامپیوتر ۹۱

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^n$$

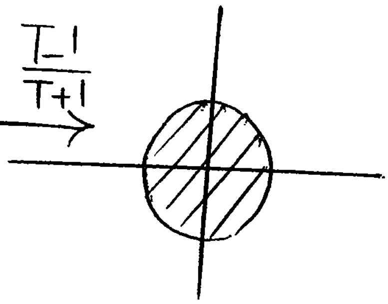
۱) ۲) ✓ ۳) ۴)

آزمون ریشه → $\left|\frac{z^2-1}{z^2+1}\right|<1$

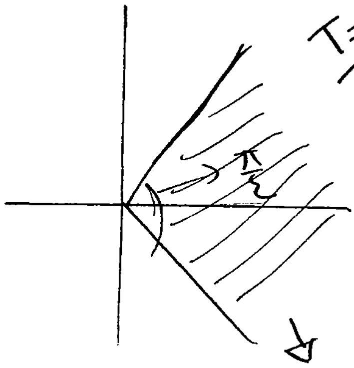
$\xrightarrow{T=z^2}$



$\xrightarrow{\frac{T-1}{T+1}}$



حل:
دو مرحله



$|x|>|y|$)

درواقع حل بود که شده انی = دو مرحله

$z^2=T$ ⟵ چه دوایری که توسط $\frac{T-1}{T+1}$ شدن را پیدا کنید

چه دوایری که توسط $T=z^2$ شدن این

مسئله حل میشه!

* معرفی انواع نقاط تکین منفرد

اگر z_0 نقطه تکین منفرد $f(z)$ باشد آنگاه z_0 یکی از حالت‌های زیر است.

الف) قطب ب) ویژه اساسی ج) حذف شدنی (رفع شدنی) (برداشتنی)

الف) قطب: اگر در بسط لوران $f(z)$ در همسایگی نقطه تکین منفرد z_0 تعداد جملات اصلی محدود باشد z_0 قطب است و بالاترین درجه جمله اصلی مرتبه‌ی قطب است

* مثال) در تابع $w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{3n-5}}{(n+1)!}$ ، $z=2$ چه نوع نقطه ای است

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^{\boxed{5}}}+\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{z-2}{3!}+\frac{(z-2)^4}{4!}+\cdots$$

۲ جمله اصلی دارد

تعداد جملات اصلی محدود ← قطب

بالاترین توان جمله اصلی = ۵

$z=2$ قطب مرتبه ۵ است.

ب) نقطه ویژه اساسی: اگر در بسط لوران $f(z)$ در همسایگی نقطه‌ای تکین منفرد z_0، تعداد جملات اصلی نامحدود باشد، z_0 ویژه اساسی است

* در بسط لوران $f(z)$ بر حسب توان‌های $z-z_0$ تعداد جملات اصلی نامحدود داشته باشیم z_0 نقطه ویژه اساسی است. به دسته ناغ ؟

$$w=\frac{1}{z-1}\overset{|z|>1}{=}\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots\right)$$

باوجود آنکه تعداد جملات اصلی نامحدود است اما $z=0$ ویژه اساسی نیست چون $z=0$ نقطه تکین منفرد نیست

$$w=\frac{1}{z(z-1)}\overset{|z|>1}{=}\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

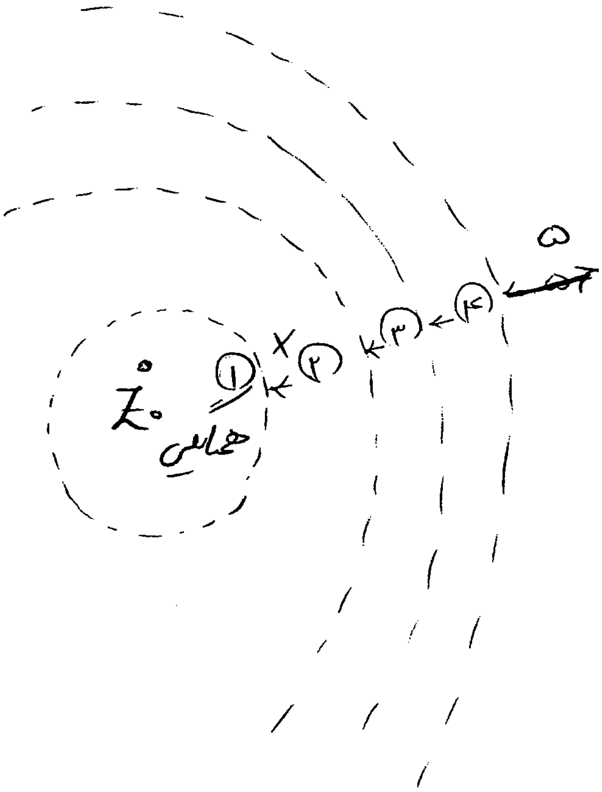
تعداد جملات اصلی نامحدود است، اما $z=0$ ویژه اساسی نیست چون نقاط در همسایگی

$z=0$ نوشته نشده است.

$$W=\frac{1}{z(z-1)}\overset{|z|<1}{=}-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z}\right)=-\frac{1}{z}(1+z+z^2+\dots)$$

$$=-\left(\frac{1}{z}+1+z+z^2+\dots\right)$$

$z=0$ قطب ساده یا مرتبه اول است.



* $z=0$ برای تابع زیر چه نوع نقطه‌ای است؟

تا ده رقم

$$w = z^{1\ldots1}\cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^{1\ldots}\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}\ldots\right)$$

$\Longrightarrow$ $z=0$ ویژه اساسی

ج) اگر در بسط لوران $f(z)$ در همسایگی نقطه تکین منفرد z_0 تعداد جملات اصلی صفر باشد، z_0 را حذف شدنی می‌نامند.

$$\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1-1+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\ldots}{z^2} = \frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}\ldots$$

$z=0$ حذف شدنی است!

* جمع‌بندی :

۱) اگر $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند، آنگاه در تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ ریشه‌های مخرج همواره قطب یا حذف شدنی اند

بعبارت دیگر اگر z_0 ریشه n ام مخرج و ریشه m ام صورت باشد داریم :

الف) $n > m \implies z_0$ قطب مرتبه $n-m$ است.

ب) $n \leq m \implies z_0$ حذف شدنی است.

* روش تشخیص مرتبه ریشه : اگر z_0 ریشه‌ی $f(z)$ باشد مرتبه‌ی ریشه‌ی z_0 معادل مرتبه‌ی اولین مشتق $f(z)$ است که در z_0 مخالف صفر است.

z_0 ریشه مرتبه n ام $f(z)$ است $\iff \begin{cases} f(z_0)=0 \\ f'(z_0)=0 \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(z_0)=0 \\ f^{(n)}(z_0)\neq 0 \end{cases}$

* مثال) $z=0$ برای تابع داده شده چه نوع نقطه‌ای است ؟ ۱۷۵

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{\operatorname{sh} z+\sin z-2z}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
g(z)=\operatorname{sh} z+\sin z-2z & \to g(0)=0 \\
g'(z)=\operatorname{ch} z+\cos z-2 & \to g'(0)=0 \\
g''(z)=\operatorname{sh} z-\sin z & \to g''(0)=0 \\
g'''(z)=\operatorname{ch} z-\cos z & \to g'''(0)=0 \\
g^{(4)}(z)=\operatorname{sh} z+\sin z & \to g^{(4)}(0)=0 \\
g^{(5)}(z)=\operatorname{ch} z+\cos z & \to g^{(5)}(0)\neq 0 \to
\end{array}\right.$$

$z=0$ ریشه پنجم مخرج است

$z=0$ قطب مرتبه ۳ است !

$$\left\{\begin{array}{ll}
f_1(z)=1-\cos z & \to f_1(0)=0 \\
f_1'(z)=\sin z & \to f_1'(0)=0 \\
f_1''(z)=\cos z & \to f_1''(0)\neq 0
\end{array}\right.$$

$z=0$ ریشه مرتبه ۲ صورت است

$$f(z)=\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots}{\cancel{z}+\cancel{\frac{z^3}{3!}}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+\cancel{z}-\cancel{\frac{z^3}{3!}}+\frac{z^5}{5!}\cdots-\cancel{2z}}$$

$z=0$ ریشه مرتبه ۲ صورت است

$$=\frac{z^2}{z^5}=\frac{1}{z^3}$$

$z=0$ ریشه مرتبه ۵ مخرج است

$z=0$ قطب مرتبه ۳ است

* در بسط مک لورن $f(z)$ درجه کمترین جمله معادل مرتبه ریشه $z=0$ است

* مثال) در تابع زیر $z=i\pi$ چه نوع نقطه ای است؟

$e^z\neq 0$ مرتبه ۱ — $2z\neq 0$ مرتبه ۱

مرتبه ۱۰ — مرتبه ۱۸ — $\boxed{\text{مرتبه ۲}}$

$$f(z)=\frac{(e^z+1)^{10}(z^2+\pi^2)^{18}}{(1+\operatorname{ch} z)^3\left(1+\operatorname{sh} z+\operatorname{ch} z+z-i\pi+\frac{1}{2}(z-i\pi)^2\right)^4(\operatorname{sh}^2 z)(1+\cos z)}$$

مرتبه ۶ — مرتبه ۱۲ — $\neq 0$ ریشه نیست

$(1+\operatorname{ch} z)\xrightarrow{\text{مشتق}}\operatorname{sh} z\xrightarrow{\text{مشتق}}\operatorname{ch} z\neq 0$ مرتبه ۲

$\operatorname{ch} z+\operatorname{sh} z+1+(z-i\pi)\to\operatorname{sh} z+\operatorname{ch} z+1\to\operatorname{ch} z+\operatorname{ch} z\neq 0$ مرتبه ۳

$\operatorname{ch} z\neq 0$ مرتبه ۱

$z=i\pi$ ریشه‌ی مرتبه ۲ صورت است
$z=i\pi$ ریشه‌ی مرتبه ۲ مخرج است
$\Leftarrow$ $z=i\pi$ حذف شدنی است

② در توابع $\sin(f(z))$ و $\cos(f(z))$ و $e^{f(z)}$ و $sh(f(z))$ و $ch(f(z))$ و ... همواره نقاط تکین منفرد حذف نشدنی $f(z)$ برای توابع فوق ویژه‌ی اساسی‌اند.

$$e^{\sin\left(\frac{1}{z(z^2-1)}\right)} \longmapsto$$ $z=0$ و $z=\mp 1$ ویژه‌ی اساسی‌اند

در توابع $\frac{1}{\sin(f(z))}$ و $\frac{1}{\cos(f(z))}$ و $tg(f(z))$ و $\frac{1}{sh(f(z))}$ و $\frac{1}{ch(f(z))}$ و $tgh(f(z))$، نقاط تکین منفرد حذف نشدنی $f(z)$، همواره نقطه تکین غیرتنها برای توابع فوق می‌باشند.

③ اگر z_0 نقطه‌ی تکین منفرد $f(z)$ باشد آنگاه :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Rightarrow$$ z_0 قطب تابع است

$$\lim_{z \to z_0} f(z) =$$ وجود ندارد $\Rightarrow$ z_0 نقطه‌ی تکین اساسی است

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = h \Rightarrow$$ z_0 حذف شدنی است

h: عدد محدود و مشخص

ex: $\cancel{\lim_{z \to 0} z^k \sin\left(\frac{1}{z}\right) = 0}$ $\Rightarrow$ $z=0$ حذف شدنی است

$\Downarrow$

این حد وجود ندارد!

ex: $\lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z^2}} \cancel{= \infty}$ $\rightarrow$ $z=0$ قطب است

هیچ‌کدام از این موارد [illegible] حد ندارد.

توضیحاتی که از ③ استفاده نشده!

۱۷۷

* مکانیک ۸۲) صف ۳۱۵ صف ۲۲۰، س ۳۴

$$f(z)=\frac{e^{z}-1}{z^{2}}$$

$e^{z}-1$ ← مرتبه ۱

z^{2} ← مرتبه ۲

۱)

۲) قطب مرتبه اول ✓

۳)

۴)

* کامپیوتر ۸۰) صف ۱۳۵ صف ۲۶۲، س ۴۰

$$f(z)=z^{10}e^{-\frac{1}{z^{2}}}$$

۱)

۲)

۳)

۴)

* ریاضی محض ۸۴) صف ۲۶۴، س ۵۷

$z=0$ تکین حذف‌شدنی

تابع $f(z)=e^{tg\left(\frac{1}{z}\right)}$ در نقطه $z_0=0$ دارای چه نوع تکینی است؟

۱)

۲)

۳)

۴) غیرتنها ✓

* کامپیوتر ۷۵) صف ۳۱۵ صف ۲۶۱، س ۳۹

$z=0$ ← تکین غیرتنها ← تکین است!

$$f(z)=\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

۱) یک نقطه تکین است ✓

۲)

۳)

۴)

۲ درست باشد ← ۵ ۶ صورت
سه درست باشد ← ۴ صورت
۴ درست باشد ← ۱ صورت

به فقط ۱ جواب درست است!

ص ۲۷۱، س ۹۴

* مواد ۷۸

$1 \to \sin$ نه $\cos z$ — ق

$$f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^4}$$

$\cos z - 1 \to$ مرتبه ۲

$z^4 \to$ مرتبه ۴

۱)　　۲) ۲ ✓　　۳)　　۴)

ص ۳۱۶

ص ۲۶۲، س ۱۴۷

* کامپیوتر ۸۵

۱) ×　　۲) ×
۳) ×　　۴) ✓

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)}$$

$z=1$ تکین غیر ...

بیشمار قطب ساده دارد

ق cos ← sin ریشه‌های cos صورت ... ...

هر ۴ غلط ← ... سطر ارزش بخش = ۴

*برق ۸۶

۱) × ✓

۲) ×

۳) ×

۴) ×

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)}$$

→ $z=-1$ تکین غیرتنها

→ بی‌شمار قطب ساده دارد

ص ۲۷۳، ست ۱۰۴

* برق ۸۴) نقاط تکین و نوع آن را برای $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$

۱)

۲)

۳)

۴) ✓

$z=0$ نقطه تکین غیرتنها

$$\sin\frac{1}{z}=0 \to \frac{1}{z}=n\pi \to z=\frac{1}{n\pi} \to$$ قطب ساده

صفحه ۲۶۹، تست ۸۳

* ریاضی محض ۹۱) تابع f با ضابطه $f(z) = z^2\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right) - \cos\left(\frac{1}{z}\right)\right)$

۱) در $z=0$ تکین برداشتنی دارد

۲) در $z=0$ قطب دارد

۳) ✓ در $z=0$ تکین اساسی دارد

۴) در همسایگی محذوف (deleted) صفر کراندار است

گفتیم اگر z_0 نقطه ناپیوستگی رفع شدنی است تعداد محاسبه مشتق تعریف است
حالا هم اگه صورت تحلیلی، مشتق تحلیلی ← از سط مک لورن هم می شه!

اگر z_0 نقطه تکین حذف شدنی تابع $f(z)$ باشد. درصورتیکه تابع را در
این نقطه پیوسته کنیم برای محاسبه مشتقات مراتب بالاتر می توان از
سط مک لورن استفاده کرد به اینصورت که ضریب جمله z^n را

بدست می آوریم و از رابطه $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$، مشتق مرتبه

n در صفر بدست می آید

معلوم

اصلاح سوال

(فوادر ۸۴   مشتق n ام

۱۷۹

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{ez-e^{z}}{(z-1)^{2}} & , \; z\neq 1\\[2ex] -\dfrac{e}{2} & , \; z=1\end{cases}$$ را

در نقطه $z=1$ بدست آورید؟

۱)

۲)

۳) $f^{(n)}(1)=\dfrac{-e}{(n+1)(n+2)}$ ✓

۴)

$$z-1=t \rightarrow z=t+1 \rightarrow f=\frac{e(t+1)-e^{t+1}}{t^{2}}$$

$$=e\,\frac{t+1-e^{t}}{t^{2}}=e\,\frac{t+1-1-t-\frac{t^{2}}{2!}-\frac{t^{3}}{3!}-\cdots}{t^{2}}$$

$$=-e\left(\frac{1}{2!}+\frac{t}{3!}+\frac{t^{2}}{4!}+\cdots\right)$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Rightarrow \frac{-e}{(n+2)!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Rightarrow f^{(n)}(0)=\frac{-e}{(n+2)(n+1)}$$

ص ۳۱۰   ص ۲۵۸، س ۲٤

* برق ۱۹۱

۱) ✓   ۲)

۳)   ۴)

$$f(x)=\frac{1+z^2+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\frac{z^8}{4!}+\cdots-1}{z^2}$$

$$=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{3!}+\frac{z^6}{4!}+\cdots$$

$$a_{2k}=\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}\Rightarrow\frac{1}{(k+1)!}=\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}$$

$$\Rightarrow f^{(2k)}(0)=2k(2k-1)\cdots(k+2)$$

* دوشنبه - ۸ / ۷ / ۹۲ - ریاضی مهندسی - جلسه‌ی دوازدهم

مانده : در بسط لوران $f(z)$ در همسایگی نقطه تکین منفرد z_0 ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ را مانده می‌نامند.

*مثال) در بسط لوران $f(z)=\frac{1}{1-z}$ در ناحیه‌ی $|z|>1$، ضریب $\frac{1}{z}$ را بدست آورید.

$$f(z)=\frac{1}{-z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$-1=$ ضریب $\frac{1}{z}$

$0=$ مانده در $z=0$

① اگر z_0 نقطه حذف شدنی باشد، مانده در z_0 همواره برابر صفر است چون اصلاً جمله اصلی ندارد.

② اگر z_0 نقطه ویژه اساسی باشد، مانده در آن همواره از بسط لوران بدست می‌آید.

۳) اگر z_0 قطب باشد به ۲ روش زیر می‌توان مانده را در z_0 بدست آورد

الف) فرمول

$$a = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left[(z-z_0)^n f(z) \right]^{(n-1)}$$

$n \leftarrow$ مرتبه قطب

$n \leftarrow$ مرتبه ریشه مخرج

ب) استفاده از سری لوران

* مثال) مانده تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z^6}$ در $z=0$ بدست آورید.

مرتبه آخرج

مرتبه اصوب

روش اول: $n = 5$ (مرتبه قطب) $\Rightarrow a_{-1} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{4!} \left[\frac{\sin z}{z} \right]^{(4)} \rightsquigarrow$ طولانی

روش دوم: $n = 6$ (مرتبه ریشه مخرج) $\Rightarrow a_{-1} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{5!} \left[\sin z \right]^{(5)} = \frac{\sin \frac{5\pi}{2}}{5!} = \frac{1}{5!}$

$$\begin{cases} W = \sin z \Rightarrow W^{(n)} = \sin\left(z + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow a_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n!} \\ W = \cos z \Rightarrow W^{(n)} = \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow a_n = \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n!} \end{cases}$$

روش سوم : سطلوران $a_{-1} =$ مانده $=$ ضریب $\frac{1}{z} = \frac{1}{5!}$

هر وقت قطب ساده بود ← روش اول n مرتبه قطب
در غیر اینصورت ← n مرتبه ریشه مخرج

یا

اختلاف مرتبه قطب و مرتبه ریشه مخرج زیاد ← مرتبه قطب $= n$
در غیر اینصورت ← $n =$ مرتبه ریشه مخرج

سئوال : چه موقع از فرمول استفاده کنیم و چه موقع سطلوران؟

اولویت با فرمول است،
اگر فرمول ها و ... در دسترس نباشد ← سطلوران

* مثال) مانده تابع $f(z) = \frac{tg^{-1} z}{z^6}$ در $z=0$ را بدست آورید.

روش اول : $n=6$ ریشه مرتبه مخرج $\rightarrow a_{-1} = \frac{1}{5!} \lim_{z\to 0} [tg^{-1} z]^{(5)} \rightarrow$ طولانی

روش دوم : سطلوران $\frac{z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots}{z^6} \rightarrow$ مانده $= \frac{1}{5}$

* مثال) مانده $f(z)=\sin(z+\frac{1}{z})$ در $z=0$ بدست آورید.

بسط لوران $\longrightarrow$ $z=0$ ویژه اساسی

$$f(z)=\sin z\cos(\frac{1}{z})+\cos z\sin(\frac{1}{z})$$

$$f(z)=(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots)(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\cdots)$$

$$+(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots)(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\cdots)$$

جمله z در چی ضرب شد $\frac{1}{z}$ ایجاد $\leftarrow$ $\frac{1}{z^2}$ $\leftarrow$ ضریب $\leftarrow$ $-\frac{1}{2!}$

جمله z^3 « « « « $\leftarrow$ $\frac{1}{z^4}$ $\leftarrow$ « $\leftarrow$ $\frac{1}{3!}\frac{1}{4!}$

مانده = ضریب $\frac{1}{z}$

$$=-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!4!}-\frac{1}{5!6!}\cdots+1+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{4!\times 5!}+\cdots$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$$

* برق ۸۴ مانده تابع در $f(z) = z\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$ در نقطه $z=1$ چقدر است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

$z=1$ ویژه اساسی $\rightarrow$ بسط لوران $\rightarrow z-1=t \rightarrow z=t+1$

$$f = (t+1)\sin\left(\frac{t+1}{t}\right) = (t+1)\sin\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

$$= (t+1)\left(\sin 1 \cos\frac{1}{t} + \cos 1 \sin\frac{1}{t}\right)$$

مانده = ضریب $\frac{1}{t}$ = $-\frac{1}{2}\sin 1 + \cos 1$

ضریب $\frac{1}{t} \mapsto$ در بسط $\cos t \rightarrow$ ضریب $t^2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

ضریب $\frac{1}{t^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$

ص ۲۶۱ تست ۳۶ ص ۳۲۳

* مکانیک ۸۳)

۱) ۲) ۳) ۴) ✓

$$a_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n!} \Longrightarrow$$ بجای n قرار میدهیم 2n

$$= \frac{\cos n\pi}{2n!} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

* برق ۸۳ ص ۱۵۷ تست ۱۵

در تابع مختلط $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ ، نوع ویژگی (تکینی) تابع در نقطه $z=0$ چیست و مانده تابع در این نقطه ویژه (تکین) چقدر است؟

۱) قطب ساده و صفر ۲) قطب ساده و $\frac{1}{2}$

۳) نقطه تکین اساسی (قطب مرتبه بینهایت) و $-\frac{1}{6}$ ۴) ✓ نقطه تکین اساسی (قطب مرتبه بینهایت) و $\frac{1}{6}$

$z=0$ ویژه اساسی

جملات سطح منفی مثبت ⟸ طلب هم مثبت ← ۴ ✓

z^2 در $\frac{1}{z}$ ضرب، $\frac{1}{z}$ را پیدا ← ضریب $\frac{1}{z^3} = \frac{1}{3!}$ ← $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

۱۸۳

ص ۲۶۲، است ۵۱

ریاضی محض ۸۴، ریاضی محض ۸۹، مکانیک ۲ ۹۱

مانده تابع $f(z)= e^{z}\, sh(\frac{1}{z})$ حول $z=0$ کدام است؟

۱) $-sh1$ ✗

۲) $sh1$ ✗

۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$ ✓

۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ ✗

$$1+\frac{1}{2!\times 3!}+\cdots$$

$$\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots\right)$$

$$\text{مانده}=1+\frac{1}{2!\times 3!}$$

بول رکا فیوتر که کمانک ریاضی محض ۸۴ هم درو حل کنم!

ص ۲۷۹، است ۱۲۸

* هسته‌ای ۸۴)

تابع $f(z)=\frac{shz}{\sin z}$ را در نظر می‌گیریم، مانده

این تابع در نقطه $z=0$ کدام است؟

۱) -1 ۲) i ۳) 1 ۴) صفر ✓

خلاصه مانده: اول مرحله: نوع نقطه

$z=$ ریشه مخرج که مخرج ۲ درجه یک دوبیت دو مرتبه یک از حذف شود ← مانده = صفر

ص ۳۲۶

* مهر ۸۴)

$$f(z)=\frac{\operatorname{sh} z}{1-\operatorname{ch} z}$$

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -3 ۴) -2 ✓

مخرج ← ریشه مرتبه ۲
صورت ← ریشه مرتبه ۱
} ← قطب ساده

برحسب ترم اول فرمول:

از z قطب باشد

$$\boxed{\text{قطب ساده} \to n=1 \to a_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)}$$

$$a_{-1}=\lim z\,\frac{\sin z}{1-\operatorname{ch} z}=-2$$

$$\sin z \to z,\quad 1-\operatorname{ch} z \to -\frac{1}{2}z^2$$

* حد تابع $f(z)$ وقتی $z\to 0$ میل می‌کند، هم ارز کمترین توان z در بسط مک لورن $f(z)$ است، به شرط آنکه کمترین توان عدد ثابت نباشد

۱۸۴

$$\ln(1+z) \sim z \quad (z \to 0)$$

$$\ln(1+z) - z \sim -\frac{z^2}{2} \quad (z \to 0)$$

$$e^z - 1 - z \sim \frac{z^2}{2!}$$

$$\sin z + \operatorname{sh} z - 2z \sim \frac{2z^5}{5!}$$

$$z\cos z - \sin z \sim z^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

۹۶ سه ۱۲۷۲ ص   ۳۲۷ ص

*

۴) ✓   ۳) ✗   ۲) ✗   ۱) ✗

$z=0$ ویژه اساسی

$$\left(1+z+z^2+z^3+z^4+\dots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\dots\right)$$

$$\text{مانده} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$S = e - 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \to e = 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots}$$

صفحه ۱۵۵ تست ۱

*برق ۱۳۸۱

$$f(z)=\frac{\sin z \nearrow 1}{z^2 \searrow 2}$$

✓ (۱

(۲

(۳

(۴

*تنها نقطه ای که مانده در آن همواره مخالف صفر است، قطب ساده است

*اگر تابع $f(z)$ نسبت به $z-z_0$ زوج باشد مانده در z_0 همواره برابر صفر است

*مثال) مانده تابع $f(z)=\frac{e^{z^2}}{(1-\cos z)^2}$ را در $z=0$ بدست آورید

$a_{-1}=0$ ← چون تابع زوج است

*کامپیوتر ۱۷۹ مهر ۹۲ ص ۳۲۶ (۱

$e^{zt}\operatorname{tg}(z)$ در قطب $z=\frac{3\pi}{2}$

(۱

(۲

(۳

✓ (۴

$$e^{zt}\frac{\sin z}{\cos z}$$

$\cos$ مشتق $\rightarrow \sin$ $\xrightarrow{\text{در } \frac{3\pi}{2} \text{ مخرج}}$

قطب ساده است

$$\rightsquigarrow a_{-1}=\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\left(z-\frac{3\pi}{2}\right)\frac{e^{zt}\sin z}{\cos z}$$

$$\overset{H}{=}\frac{e^{\frac{3\pi}{2}t}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=-e^{\frac{3\pi}{2}t}$$

* اگر z_0 قطب ساده تابع $\frac{p(z)}{q(z)}$ باشد و $p(z_0)\neq 0$
آنگاه مانده در z_0 برابر است با: $\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

اثبات: $a_{-1}=\lim (z-z_0)\frac{p(z)}{q(z)}\overset{H}{=}\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

جزوه باما

ص ۳۲۳ ص ۲۶ است ۴۷

*مکانیک ۸۵)

۱) ✓

۲)

۳)

۴)

مرتبه مخرج = ۳ } مرتبه صورت ۲ } ← قطب ساده

z^2 صفر بر $\frac{1}{z^3}$ ← $\frac{1}{z}$ ایجاد ← ضریب $\frac{1}{z}$ =

*ریاضی محض ۸۹) ص ۳۳۱

$$f(z)=\frac{1}{z(1+z-e^{z})}$$

۱) ۱

۲) ∝

۳)

۴)

z=0 ← قطب مرتبه ۳ اداخ

$$a_{-1} = \frac{1}{2!}\left[z^3 \frac{1}{z(1+z-e^z)}\right]'' \to \text{طولانی}$$

$$z \to 0$$

هرگاه مخرج بسط مکلورنش، تعداد جملات زیاد باشد:

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \quad b_0 \neq$$

اگر $b_0 = 0$ باشد از کمترین درجه بسط مکلورن مخرج فاکتور میگیریم

$$a_0 = b_0 c_0$$

$$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1$$

$$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2$$

$$a_3 = b_3 c_0 + b_2 c_1 + b_1 c_2 + b_0 c_3$$

$$a_4 = b_4 c_0 + b_3 c_1 + b_2 c_2 + b_1 c_3 + b_0 c_4$$

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_0^2}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$c_2 = \frac{1}{b_0^3}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$C_3 = -\frac{1}{b_0^4}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$C_k = \frac{(-1)^k}{b_0^{k+1}}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_k \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_k \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{k-1} \\ & \vdots & & \end{vmatrix}$$

* مثال: مانده تابع $f(z)=\frac{\cot g z}{z^4}$ در $z=0$ را بدست آورید.

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^4 \sin z} = \frac{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots}{z^4\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}$$

$$=\frac{1}{z^5}\left(\frac{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots}{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}\cdots}\right)$$

$$=\frac{1}{z^5}\left(c_0+c_1 z+c_2 z^2+\cdots\right)$$

مانده $=$ ضریب $\frac{1}{z} = C_4 = -\frac{1}{45}$

۱۸۷

$$a_0 = b_0 c_0 \to 1 = 1 \times c_0 \to c_0 = 1$$

$$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 \to -\frac{1}{2} = -\frac{1}{3!} \times 1 + 0 + 1 \times c_2$$

$$\Longrightarrow c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

$$a_4 = b_4 c_0 + b_3 c_1 + b_2 c_2 + b_1 c_3 + b_0 c_4$$

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{5!} \times 1 + 0 + \left(-\frac{1}{3!}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + 0 + c_4$$

$$c_4 = \frac{1}{24} - \frac{1}{120} - \frac{1}{18} = -\frac{1}{45}$$

$$\cot z = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{45} z^4 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 + \cdots$$

$$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \underset{\to \frac{2}{15}}{Q} z^5$$

$$a_5 = b_5 c_0 + b_4 c_1 + b_3 c_2 + b_2 c_3 + b_1 c_4 + b_0 c_5$$

$$\frac{1}{5!} = 0 + \frac{1}{4!} \times 1 + 0 + \left(-\frac{1}{2!}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 0 + c_5$$

$$C_5 = \frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6}$$

$$C_5 = \frac{2}{15}$$

ص ۳۳۱ ، ص ۲۶۷ ، سؤال ۷۲

* ریاضی محض ۸۹

۲) α

۱) α

۳) ✓

۴)

$$a_{-1} = \frac{1}{2!}\left[z^3 \frac{1}{z(1+z-e^z)}\right]'' \to$$ طولانی

$$f = \frac{1}{z^3}\left(C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots\right)$$

مانده $= C_2$

$$C_2 = \frac{1}{\left(\frac{-1}{2}\right)^3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3!} & -\frac{1}{4!} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3!} \end{vmatrix} = -8\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{48}\right) + \frac{1}{6}$$

ضریب z^2 ، ضریب z^3 ، ضریب z^4

$$C_2 = -\frac{1}{18}$$

ex ۲۸۸

$$\frac{\qquad\qquad}{\underbrace{\frac{4}{2!}}_{b_3} z^3 + \underbrace{\frac{2}{3!}}_{b_4} z^4 + \underbrace{\frac{3}{5!}}_{b_5} z^5 + \cdots} = \frac{1}{z^3}\,\frac{\qquad\qquad}{\underbrace{\frac{4}{2!}}_{b_0} + \underbrace{\frac{2}{3!}}_{b_1} z + \underbrace{\frac{3}{5!}}_{b_2} z^2}$$

*ریاضی محض (۹۲) مانده‌ی تابع $f(z) = \dfrac{e^{-z} - 1}{\sinh z - \sin z}$ در $z=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$ ✓

مانده $= C_2$

$$a_2 = b_2 C_0 + b_1 C_1 + b_0 C_2 \Rightarrow \frac{1}{2} = 0 + 0 + \frac{2}{3!} \times C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

انتگرال مختلط

$\int_C f(z)\,dz$

مسیر C باز

- $f(z)$ تحلیلی است ← محاسبه انتگرال به مسیر بستگی ندارد ← مانند توابع حقیقی انتگرال را محاسبه می‌کنیم

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$$

z_2 نقطه انتهای مسیر

z_1 نقطه ابتدای مسیر

- $f(z)$ تحلیلی نیست ← باید روی مسیر حرکت کنیم

مسیر C بسته

$\oint_C f(z)\,dz$

- $f(z)$ درون ناحیه C تحلیلی است ← $\oint_C f(z)\,dz=0$

- $f(z)$ در C تحلیلی نیست اما نقاط غیر تحلیلی از نوع تکین منفرد هستند ← با استفاده از قضیه مانده‌ها انتگرال را محاسبه می‌کنیم (ص ۹۵)

- $f(z)$ در C تحلیلی نیست و نقاط غیرتحلیلی به جز تکین منفرد در C دارد ← باید روی مسیر C حرکت کنیم

* برای حرکت روی مسیر مطابق زیر عمل می‌کنیم:

① معادله مسیر یا مسیرها را می‌نویسیم

② معادلات مسیر را در عبارت مقابل انتگرال جایگذاری می‌کنیم

③ پس از جایگذاری مرحله ② عبارت مقابل انتگرال بر حسب یک متغیر بدست می‌آید. در جهت مشخص شده حدود انتگرال را می‌نویسیم و مانند انتگرال‌های حقیقی انتگرال را محاسبه می‌کنیم

ص ۳۳۶

*برق ۷۱)

۱)

۲)

۳)

۴)

* استفاده از ساختار مجموعه منطقی ⟨ بود ← بسته / نبود ← باز

$z_1 = x_1 + iy_1$

$$\begin{cases} t = 0 \to A \,|\, {}^{0}_{0} \\ t = 2\pi \to B \,|\, {}^{2a\pi}_{0} \end{cases} \to \text{مسیر باز}$$

$f(z)$ تحلیلی است

← به مسیر بستگی ندارد!

$$\int_0^{2a\pi} (z^4 + 2z^2 + 1)\,dz = \frac{z^5}{5} + \frac{2}{3}z^3 + z \Big|_0^{2a\pi} = \cdots$$

تشخیص مسیر باز و بسته ← پیچیدگی ندارد!

۲

۳ تحلیلی بودن $f(z)$ ← با یک نگاه! (چون تابعی برحسب z تنها است) ← پیچیدگی ندارد!

فرض ۳ تحلیلی باشد ← انتگرال روی مسیر ← معمولاً پیچیدگی ایجاد می‌کند

ص ۳۳۸ ✓

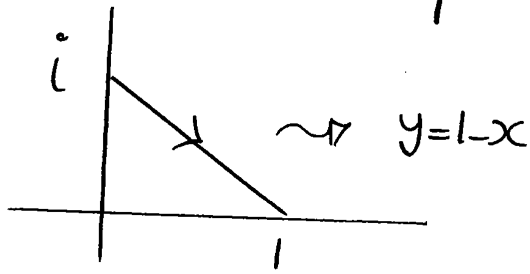
*مکانیک ۱۷۹

۱)

$\frac{2}{3}(1+i)$ ۲) ✓

۳)

۴)



$$\int (x^2+y^2)(dx-i\,dy)=\int_0^1 \left(x^2+(1-x)^2\right)(dx+i\,dx)$$

$$=(1+i)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}(1-x)^3\right)\Big|_0^1=(1+i)\left(\frac{2}{3}\right)$$

کجا طراح می‌تونه پیچیدگی ایجاد کنه؟

✓ مسیر بازه

✓ f(z) انتگرالی [illegible]

فرض: غیرتحلیلی ← مسیر می‌نویسیم

✓ مختلط‌ها انتظار دارند خط دایره بنویسیم

نه! [illegible] خط دایره [illegible]

✓ معادله مسیر داده ← جایگذاری در عبارت مقابل انتگرال

✓ حل انتگرال حقیقی ← پیچیده نمایش دهند

ص ۳۴۱

۱۹۰

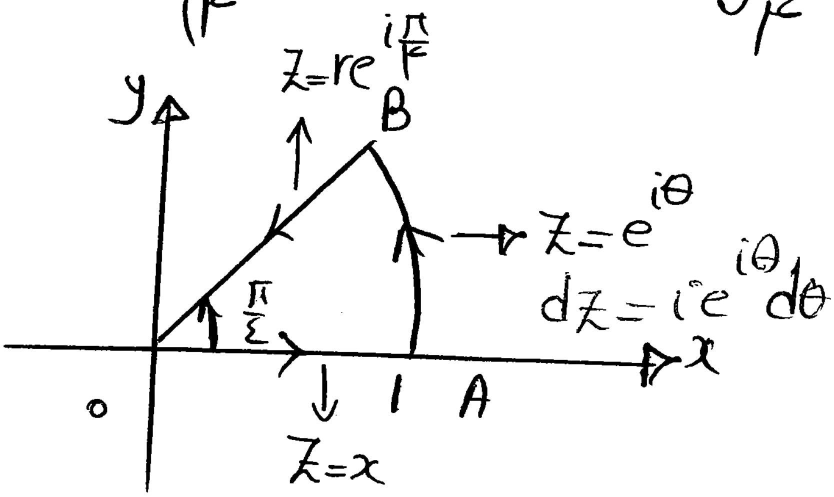
* برق ۷۷)

۱)

۳) ✓ $i\frac{\pi}{4}$

۲)

۴)



معادله‌ی خطی که از مبدأ می‌گذرد و با محور حقیقی در جهت مثلثاتی زاویه α می‌سازد برابر است با $z=re^{i\alpha}$.

$$\int_0^1 x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-i\theta}\, i e^{i\theta}\,d\theta+\int_1^0 r e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}}\,dr$$

$$=\frac{1}{2}+i\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{i\pi}{4}$$

روش دوم: $\oint_C \bar{z}\,dz=2i\iint_D dy\,dx=2i\times\frac{1}{8}\pi\times 1=\frac{i\pi}{4}$

$$\oint_C f(z,\bar z)\,dz = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,dy\,dx$$

D ← ناحیه محصور شده توسط مسیر C

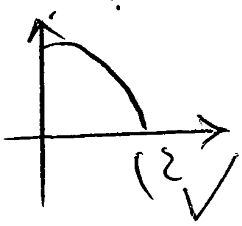
$$= i \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) dy\,dx$$

$$\oint f(z,\bar z)\,d\bar z = -2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial z}\,dy\,dx$$

ص ۵۶۷ تست ۱۶

* کامپیوتر ۹۲) حاصل انتگرال زیر روی مسیر بسته ربع دایره C نشان داده شده از دایره که برابر است با $I = \oint_C (\operatorname{Re} z)\,dz$

$$\begin{cases} x = \dfrac{z+\bar z}{2} \\ y = \dfrac{z-\bar z}{2i} \end{cases}$$



۱)

۲)

۳)

۴) ✓

$$I = \oint \frac{1}{2}(z+\bar z)\,dz$$

$$= 2i \iint \frac{1}{2}\,dy\,dx = i \times \frac{1}{4}\pi$$

حلقه فوق العاده
۱۹۱

* پنج شنبه - ۹۲/۷/۱۱ - جلسه‌ی سیزدهم - ریاضی مهندسی

جلسه‌ی اول مشتقات جزئی

میزان اهمیت: *

***معادلات با مشتقات جزئی**

- معادلات مرتبه اول (*)
- معادلات مرتبه دوم
  - تشخیص نوع معادله (*)
  - حل معادله (*)
  - روش دالامبر معادله موج (**)
- معادله موج و حرارت
  - در مختصات دکارتی (***)
  - در مختصات قطبی
  - در مختصات کروی
- معادله لاپلاس
  - در مختصات دکارتی (***)
  - در مختصات قطبی (***)
  - در مختصات کروی (*)
- حل معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از تبدیل لاپلاس یا تبدیل فوریه یا سری فوریه (*)
- حل معادله لاپلاس با استفاده از نگاشت همدیس

* معرفی معادله موج

منبع نیروی خارجی

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t) \qquad 0<x<L,\ t>0$$

شرایط مرزی:

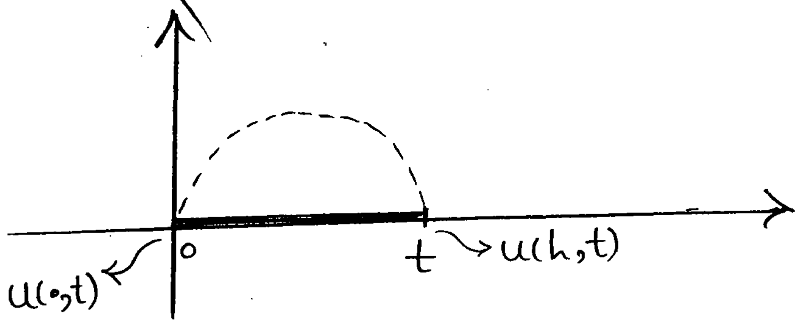
$$\begin{cases} u(0,t) = p(t) \\ u(L,t) = q(t) \end{cases}$$

$h(x,t)=0 \rightarrow$ معادله همگن

$h(x,t)\neq 0 \rightarrow$ معادله ناهمگن

شرایط اولیه:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) & \leftarrow \text{مکان اولیه} \\ u_t(x,0) = g(x) & \leftarrow \text{سرعت اولیه} \end{cases}$$



$u(x,t) =$ ارتعاش مکان x در زمان t

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \underbrace{\alpha u}_{\text{ناشی از نیروی بازگردان}} + \underbrace{\beta u_t}_{\text{مقاومت محیط (نیروی اصطکاک محیط)}} + h(x,t)$$

مرز کلی $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a u_x(0,t) + b u(0,t) = p(t) \\ a' u_x(L,t) + b' u(L,t) = q(t) \end{cases}$$

۱۹۲

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

ص ۴۳۶، ست ۴۱

* برق ۹۱)

۱)

۲)

۳)

۴) ✓

* معرفی شرایط مرزی معادله موج :

① شرایط مرزی کنترل شده

$$\begin{cases} u(0,t) = p(t) \\ u(h,t) = q(t) \end{cases}$$

حالت خاص : اگر مرزها ثابت شده باشند یا در مرزها مانع سخت داشته باشیم یا در مرزها گره تشکیل شود و یا در مرزها دامنه ی ارتعاش صفر باشد داریم :

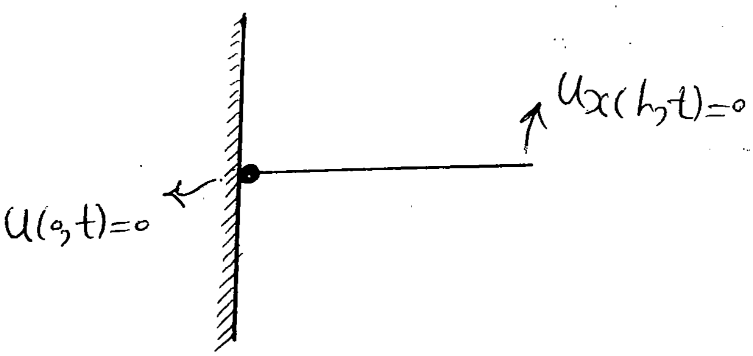
$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(h,t) = 0 \end{cases}$$

② نیروی وارد بر مرزها معلوم باشد

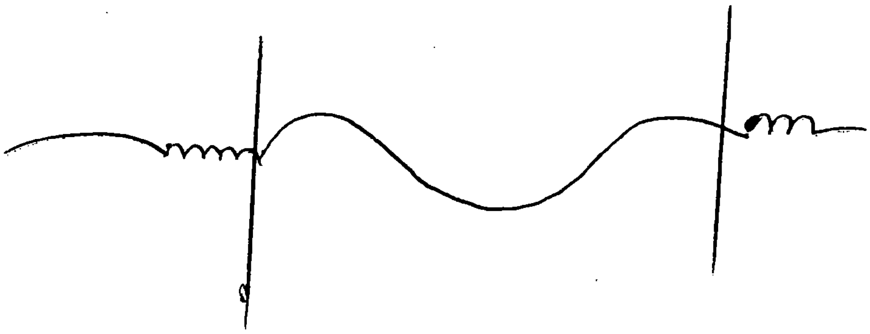
$$\begin{cases} u_x(0,t)=p(t) \\ u_x(h,t)=q(t) \end{cases}$$

* حالت خاص : اگر در مرزها مانع نرم باشد یا در مرزها شکم تشکیل شود یا در مرزها دامنه‌ی ارتعاش ماکزیمم باشد داریم :

$$\begin{cases} u_x(l,t)=0 \\ u_x(h,t)=0 \end{cases}$$



مرزها به جسم الاستیک متصل باشند



$$F = k\Delta x \rightsquigarrow u_x(0,t) = \alpha\big(u(0,t) - p_1(t)\big)$$

$$u_x(h,t) = \beta\big(u(h,t) - q_1(t)\big)$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) - \alpha u(0,t) = p(t) \\ u_x(h,t) - \beta u(h,t) = q(t) \end{cases}$$

* معرفی معادله حرارت :

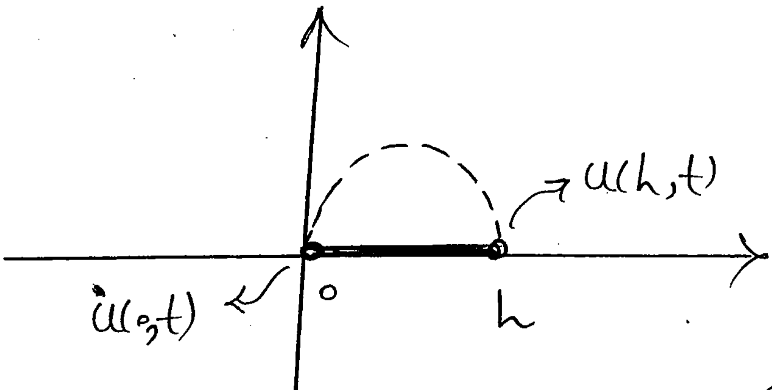
منبع حرارت داخلی

$$u_t = c^2 u_{xx} + \underset{\uparrow}{h(x,t)} \qquad 0<x<h,\ t>0$$

حرارت شرایط مرزی

$$\begin{cases} u(0,t) = p(t) \\ u(h,t) = q(t) \end{cases}$$

شرط اولیه ← $u(x,0) = f(x)$ → توزیع اولیه دما



دمای مکان x در زمان t : $u(x,t)$

فرم کلی

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \alpha u + \beta u_x + h(x,t)$$

αu ← ناشی از تبادل گرمایی با محیط بیرون است

βu_x ← جریان های همرفتی آلوده کننده

معرفی شرایط مرزی در معادله حرارت :

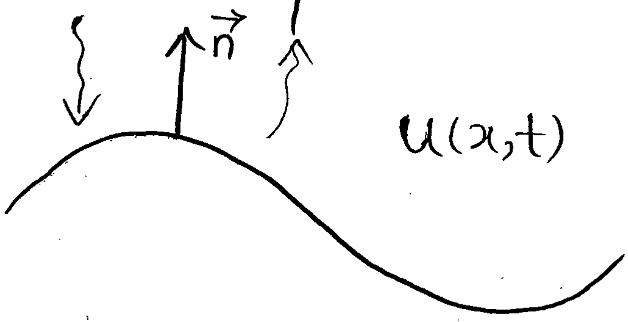
① شرایط مرزی کنترل شده

$$\begin{cases} u(0,t) = p(t) \\ u(h,t) = q(t) \end{cases}$$

حالت خاص اگر دو سر میله در مخلوط آب و یخ قرار داشته باشد

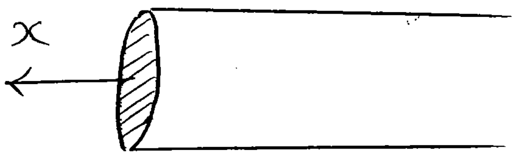
$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(h,t) = 0 \end{cases}$$

۲) شار گرمایی در مرزها معلوم باشد



$\vec{n}$: بردار عمود بر سطح

$$\text{شار گرمایی} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial \vec{n}}$$



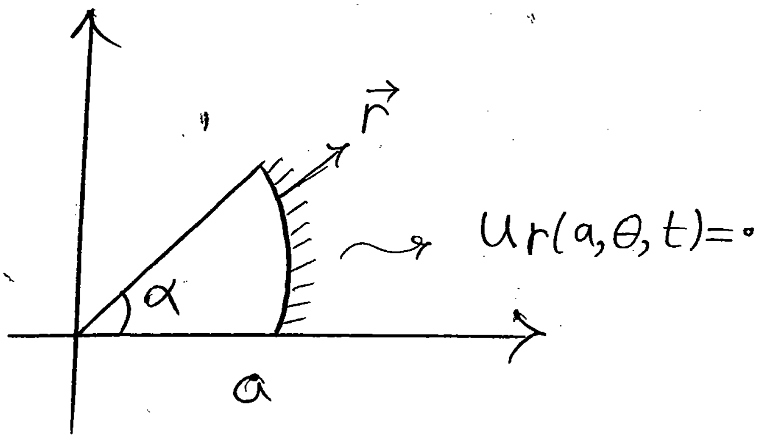
$$\begin{cases} u_x(0,t)=p(t) \\ u_x(h,t)=q(t) \end{cases}$$

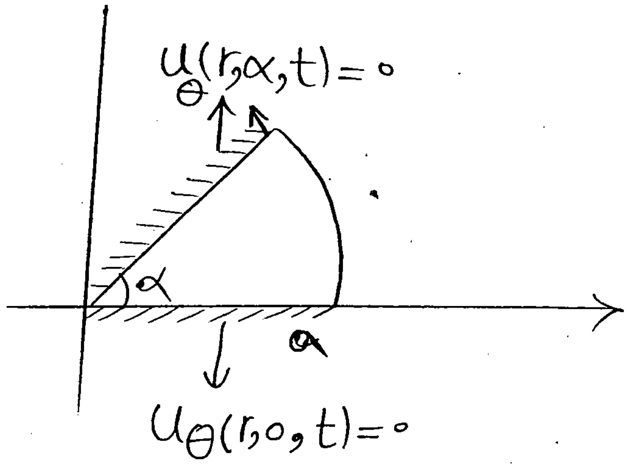
حالت خاص: اگر مرزها عایق بندی شده باشند

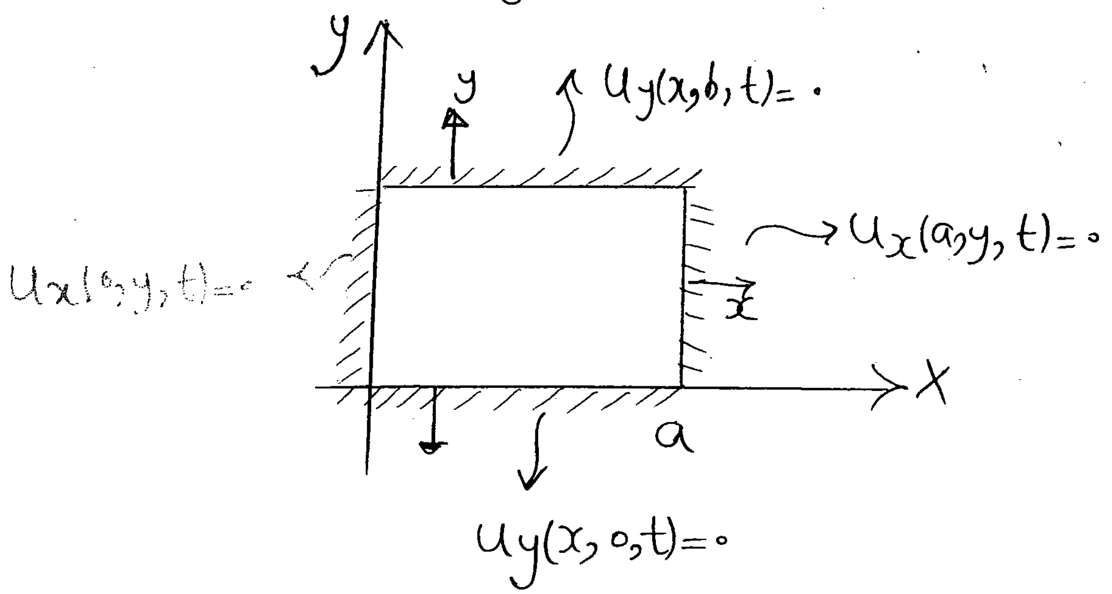
(تبادل گرمایی در مرزها وجود نداشته باشد)

$$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(h,t)=0 \end{cases}$$

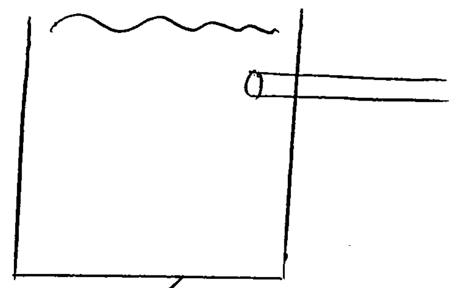
*مثال) شرایط مرزی را در نواحی عایق بندی شده بنویسید







۳) مرزها در محیط گرمایی ثانویه قرار داشته باشند



شار گرمایی $= \alpha \Delta \theta$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \alpha\big(u(0,t) - p_1(t)\big) \\ u_x(h,t) = \beta\big(u(h,t) - q_1(t)\big) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) - \alpha u(0,t) = p(t) \\ u_x(h,t) - \beta u(h,t) = q(t) \end{cases}$$

* حذف شرایط اولیه ✕

در معادله نوسانی از شرایط اولیه برای بدست آوردن ضرایب ثابت استفاده کردیم
اینجا هم شرایط اولیه برای بدست آوردن محاسبه ضرایب است
پس در قدم اول شرایط اولیه حذف، چون دنبال جواب عمومی هستیم

* هر موقع معادله موج داریم که شرایط مرزی صفر نبود باید تغییر متغیر دهیم که این شرایط مرزی را صفر کند

صفر کردن شرایط مرزی

برای این منظور سعی می‌کنیم با تغییر متغیر مناسب، معادله داده شده را به معادله با شرایط مرزی صفر تبدیل کنیم مطابق زیر.

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

می‌خواهیم تابع $W(x,t)$ را طوری محاسبه نماییم که شرایط مرزی $v(x,t)$ صفر شود یعنی

$$\begin{cases} v(0,t)=0 \\ v(L,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,t)=\cancel{v(0,t)}^{\,0}+w(0,t) \\ u(L,t)=\cancel{v(L,t)}^{\,0}+w(L,t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(0,t)=w(0,t) \\ u(L,t)=w(L,t) \end{cases}$$

$$u(x,t)=v(x,t)+\underbrace{w(x,t)}_{\text{معلوم}}$$

در معادله موج $\rightarrow \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t)$

$$\rightarrow \quad v_{tt} + w_{tt} = c^2 v_{xx} + c^2 w_{xx} + h(x,t)$$

$$\rightarrow \quad v_{tt} = c^2 v_{xx} + \underbrace{h(x,t) - w_{tt} + c^2 w_{xx}}_{H(x,t)}$$

موج ①

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} + H(x,t) \\ v(0,t) = 0 \\ v(h,t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = f(x) - w(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - w_t(x,0) = g(x) - w_t(x,0) = g_1(x)$$

حرارت ②

$$\begin{cases} v_t = c^2 v_{xx} + H(x,t) \\ v(0,t) = 0 \\ v(h,t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = f(x) - w(x,0) = f_1(x) \end{cases}$$

* مثال) برای معادلات موج و حرارت با شرایط مرزی داده شده تابع $w(x,t)$ را طوری بدست آورید که این معادلات به معادلات با شرایط مرزی صفر تبدیل شوند.

① $\begin{cases} u(0,t)=p(t) \\ u(h,t)=q(t) \end{cases}$

$W(x,t)=Ax+B$

$\begin{cases} W(0,t)=p(t) \to B=p(t) \\ W(h,t)=q(t) \to q(t)=Ah+p(t) \end{cases}$

$A=\dfrac{q(t)-p(t)}{h}$

$\Rightarrow W(x,t)=\dfrac{q(t)+p(t)}{h}+p(t)$

② $\begin{cases} u_x(0,t)=p(t) \\ u(h,t)=q(t) \end{cases}$

$W(x,t)=Ax+B$

$W_x(0,t)=p(t) \Rightarrow A=p(t)$

$W(h,t)=q(t) \to q(t)=p(t)h+B$

$B=q(t)-p(t)$

$\Rightarrow W=p(t)x+q(t)-p(t)h$

۱۹۷

۳

$$\begin{cases} u_x(0,t)=p(t) \\ u_x(h,t)=q(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_x(x,t)=Ax+B \\ W_x(0,t)=p(t) \longrightarrow B=p(t) \\ W_x(h,t)=q(t) \longrightarrow q(t)=Ah+p(t) \end{cases}$$

$$\longrightarrow A=\frac{q(t)-p(t)}{h}$$

$$W_x(x,t)=\frac{q(t)-p(t)}{h}x+p(t)$$

$$\longrightarrow W(x,t)=\frac{q(t)-p(t)}{2h}x^2+p(t)x$$

* تمرین اندیس u را برای w بنویسیم!

تمرین صفحه قبل

ص ۱۴۵۷

* برق (۷۲

$$u(x,t)=v(x,t)+\underbrace{a(t)x+b(t)}_{-tx+2t}$$

(۱

(۲

(۳

(۴ ✓

0,2t
1,t

معادله موج با شرایط مرزی ناصفر $\xrightarrow{\text{تبدیل به}}$ معادله موج با شرایط مرزی صفر

از راه شیء عرض از مبدأ

معادله خطی که از این دو نقطه عبور می‌کند

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

$$u(0,t)=v(0,t)+w(0,t) \to \begin{cases} 2t=0+b(t) \\ b(t)=2t \end{cases}$$

$$u(1,t)=v(1,t)+w(1,t) \to \begin{cases} t=0+a(t)+2t \\ a(t)=-t \end{cases}$$

$$u(x,0)=v(x,0)+w(x,0) \to \begin{cases} x=f_1(x)+0 \\ f_1(x)=x \end{cases}$$

$$u_t(x,0)=v_t(x,0)+w_t(x,0) \to \begin{cases} 2=f_2(x)-x+2 \\ f_2(x)=x \end{cases}$$

ص ۴۵۸

* برق ۷۳)

دکتری مکانیک ۹۲

۱) ×　　　　۲) ✓✓

۳) ×　　　　۴) ×

شرایط مرزی مخالف صفر $\xrightarrow{\text{تبدیل}}$ شرایط مرزی صفر

معادله خط گذرا از دو نقطه [illegible]!

$$W(x,t)=\frac{bt-at}{\pi}x+at$$

روش دوم: چون W خط ← ۳ حذف ×

گزینه ۲ ← شرط در گزینه ها جایگذاری

$x=0$ ← باید بشه at ← ۱ نمی‌شه ← غ ×

۲ می‌شه ← ✓✓

۴ نمی‌شه ← غ ×

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} F(t)\ x\ (\text{تابع ویژه})$$

تغییرات آن ناشی از تغییرات شرایط مرزی که تغییرات آن تابعی از تغییرات معادله است

تابع ویژه : همان پایه متعامدی است که توابع $H(x,t)$ و $g(x), f(x)$
برحسب آن بسط داده می‌شود

فرم کلی تابع ویژه در معادلات موج و حرارت در مختصات دکارتی آن
بصورت زیر است :

$$\text{تابع ویژه} = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \quad \text{و} \quad \lambda \geq 0$$

مقدار ویژه

اگر شرایط مرزی از نوع یک و دو در $x=0$ داشته باشیم در تابع ویژه
محدودیت ایجاد می‌شود درغیراینصورت تابع ویژه کلی‌ترین
فرم است.

* شرط مرزی در $x=h$ محدودیت در مقدار ویژه ایجاد می‌کند

$$\text{تابع ویژه} = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

۱۹۹
ص

*مثال) تابع ویژه و مقادیر ویژه برای شرایط داده شده بدست آورید

(۱)
$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(h,t)=0 \end{cases}$$

$\longrightarrow 0=A+0 \longrightarrow A=0 \Rightarrow$ تابع ویژه $= \sin\lambda x$

$\longrightarrow 0=\underset{\neq 0}{B}\sin\lambda h \longrightarrow \sin\lambda h=0 \to \lambda h=n\pi$

چون نمی‌شه هم A صفر باشه هم B!

$\lambda=\frac{n\pi}{h}$

(۲)
$$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \longrightarrow 0=0+B\lambda \longrightarrow B=0 \Rightarrow \cos\lambda x = \text{تابع ویژه} \\ u_x(h,t)=0 \longrightarrow \sin\lambda h=0 \longrightarrow \lambda h=n\pi \longrightarrow \lambda=\frac{n\pi}{h} \end{cases}$$

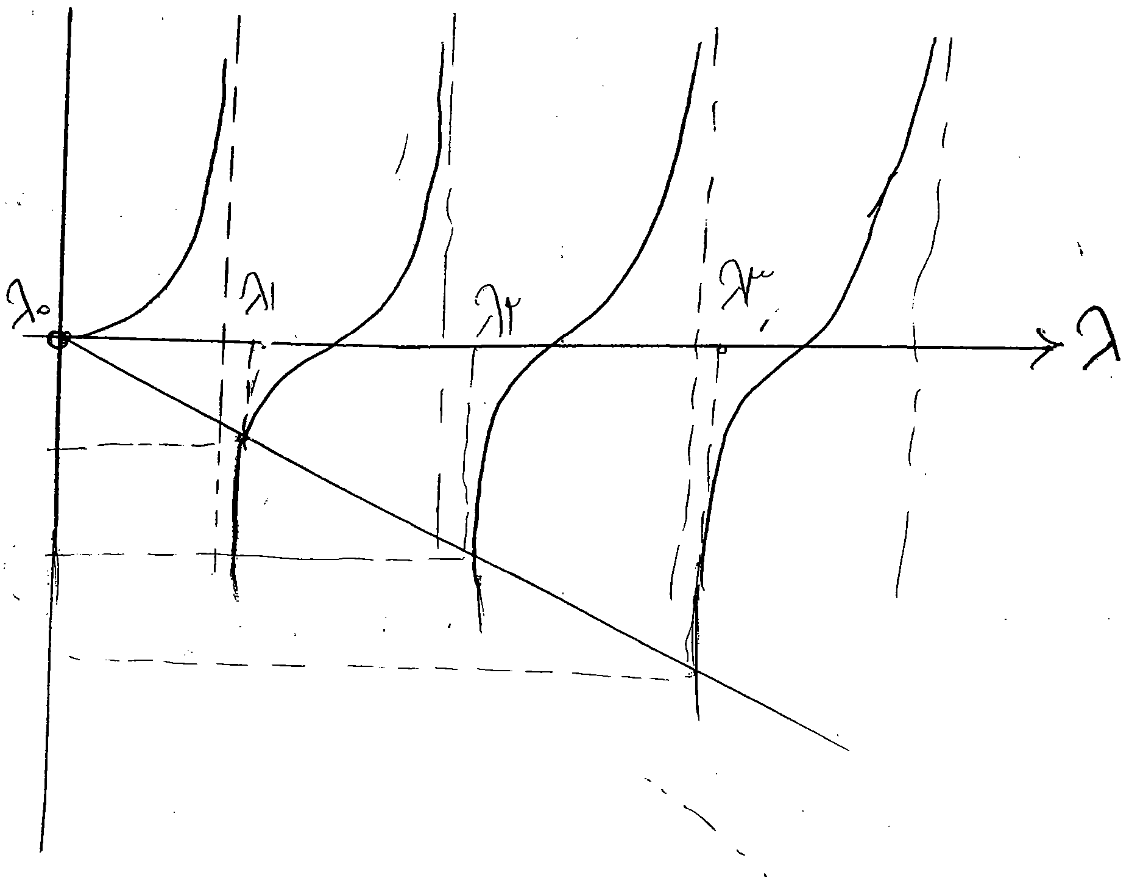
شرط مرزی دوم را روی تابع ویژه اعمال می‌کنیم.

(۳)
$$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \longrightarrow \cos\lambda x = \text{تابع ویژه} \\ u(h,t)=0 \longrightarrow \cos\lambda h=0 \Rightarrow \lambda h=(2n-1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda=\frac{(2n-1)\pi}{2h}$

(۴)
$$\begin{cases} u(0,t)=0 \longrightarrow \sin\lambda x \\ u(h,t)+u_x(h,t)=0 \end{cases}$$

$$\sin\lambda h+\lambda\cos\lambda h=0 \to \operatorname{tg}\lambda h=-\lambda$$



$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + H(x,t)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} F(t) \sin \lambda x, \quad \lambda = \frac{n\pi}{h}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\underbrace{F''(t) + c^2 \lambda^2 F(t)}_{B_n} \Big) \sin \lambda x = H(x,t) \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$H(x,t) = 0 \Rightarrow F''(t) + \lambda^2 c^2 F(t) = 0 \Rightarrow F_h(t) = A\cos \lambda ct + B \sin \lambda ct$$

(برای معادلات موج همگن $F(t) \rightarrow F(t) = A\cos \lambda ct + B\sin \lambda ct$) حفظ

۲۰۹

$H(x,t) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad B_n = F''(t) + \lambda^2 c^2 f(t)$

$$= \frac{2}{h}\int_0^h H(x,t)\sin\lambda x\,dx = M(t)$$

$$F''(t) + \lambda^2 c^2 f(t) = M(t)$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_h = A\cos\lambda ct + B\sin\lambda ct \\ F_p = N(t) \end{cases}$$

$$F(t) = F_h + F_p = A\cos\lambda ct + B\sin\lambda ct + N(t)$$

$$\boxed{V(x,t) = \sum (A\cos\lambda ct + B\sin\lambda ct + N(t))\sin\lambda x \qquad \lambda = \frac{n\pi}{h}}$$

جواب عمومی

با اعمال شرایط اولیه ضرایب مجهول را بدست می‌آوریم

$$V(x,0) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A + N(0))\sin\lambda x$$

$$\Rightarrow A + N(0) = \frac{2}{h}\int_0^h f_1(x)\sin\lambda x\,dx \Rightarrow A = \dots$$

$$V_t(x,0) = g_1(x) = \sum (B\lambda c + N'(0))\sin\lambda x$$

$$\Rightarrow B\lambda c + N'(0) = \frac{2}{h}\int_0^h g_1(x)\sin\lambda x\,dx \Rightarrow B = \dots$$

معادله حرارت $\rightarrow v_t = c^2 v_{xx} + H(x,t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(F'(t)+\lambda^2c^2F(t)\right)\sin\lambda x = H(x,t)\begin{cases}=0\\ \neq 0\end{cases}$$

$$H(x,t)=0 \rightarrow F'(t)+\lambda^2c^2F(t)=0 \rightarrow F(t)=Ae^{-\lambda^2c^2t}$$

(برای معادله ناهمگن $F(t) \rightarrow F(t)=Ae^{-\lambda^2c^2t}$) غلط

$$H(x,t)\neq 0 \rightarrow F'(t)+\lambda^2c^2F(t)=\frac{2}{L}\int_0^L H(x,t)\sin\lambda x\,dx = M(t)$$

$$F'(t)+\lambda^2c^2F(t)=M(t) \rightarrow \begin{cases} F_h = Ae^{-\lambda^2c^2t} \\ F_p = N(t)\end{cases}$$

$$F=F_h+F_p=Ae^{-\lambda^2c^2t}+N(t)$$

جواب عمومی

$$\boxed{v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(Ae^{-\lambda^2c^2t}+N(t)\right)\sin\lambda x,\quad \lambda=\frac{n\pi}{L}}$$

!!اعمال شرط اولیه ضریب مجهول بدست می‌آید

$$v(x,0)=f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A+N(0)\right)\sin\lambda x \rightarrow A+N(0)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\lambda x\,dx \rightarrow A_s\ldots$$

ص ۴۳۶

* سوال ۸۱)

$$U_x(0,t)=0 \quad و \quad u(h,t)=0$$

تابع ویژه $=\cos\lambda x$

$$\cos\lambda h=0 \rightarrow \lambda h=(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

۱)

۲) ✓

۳)

۴)

* مطالب ۸۳ ص ۴۴۹ تست ۴۸

۱)

۲)

۳) ✓

۴)

کسینوس = حسته ← تابع ویژه

$$\underbrace{u(x,t)}=\underbrace{v(x,t)}+\underbrace{W(x,t)}_{\text{معادله خط}}$$

$$\begin{cases} T(0,t)=0 \rightarrow \sin\lambda x \\ T_x(h,t)=0 \rightarrow \cos\lambda h=0 \rightarrow \lambda h=(2n-1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

*برای محاسبه جواب معادله‌ی موج و حرارت دالامبر مطابق زیر عمل می‌کنیم:

① تابع مشتق و مقدار مشتق را بدست می‌آوریم

② تابع $f(t)$ را بدست می‌آوریم

③ ضرایب را محاسبه می‌کنیم

ص ۴۳۸

*کامپیوتر ۱۸)

$\cos \lambda x \rightarrow$ اول غ
K

$\sin \lambda\pi = \circ \rightarrow \lambda = n \rightarrow$ غ ۴

$U_x(\circ, t) = \circ$, $U_x(\pi, t) = \circ$

۱) ×
۲) ✓
۳) ×
۴) ×

$$v(x,t) = \sum_{n=\circ}^{\infty} A e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x , \lambda = n$$

۲۰۲

صـ ۴۴۹، سـ ۸۰

*نانوفولار ۱۱)

$$\begin{cases} \\ u_x(0,t)=0\,,\ u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

$\cos\lambda x$ ↓ ۱و۲ غ

$\cos\lambda\pi=0 \rightarrow \lambda=\frac{2n-1}{2}$ ← ۴غ

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✓

۴) ✗

صـ ۴۴۰

*برق ۸۹

$$u_t-c^2u_{xx}+hu=hu_0\ ,\ t>0$$

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u(-\pi,t)=u(\pi,t) & ; t\geq 0 \\ u_x(-\pi,t)=u_x(\pi,t) & ; t\geq 0 \end{cases}$$

۱) ✗ ۲) ✓

۳) ✗ ۴)

اگر شرط مرزی همگن نداشته باشیم ← تابع و مشتق ← طبق ترتیب حالت ← ۱و۳ حذف

بین ۲ و ۴ ← اختلاف در صد این ۴ است ← که از همه شروع شده ← ۲

*برق ۹۰) معادله میله‌ای که سطح جانبی و دو سر آن کاملاً عایق است

$U(x,0)=f(x) \rightarrow \begin{cases} U_x(0,t)=0 \rightarrow C_1 \lambda_2 \\ U_x(L,t)=0 \rightarrow \sin\lambda L=0 \end{cases}$

$u_t=c^2u_{xx}$ $\Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{L}$

کدام گزینه برای $U(x,t)$ صحیح است

۱) ✓ ۲) ✗

۳) ✗ ۴) ✗

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\lambda^2c^2t}\cos\lambda x,\quad \lambda=\frac{n\pi}{L}$$

جلد دوم صفحه ۴۴۷

حل اقتصاد ۹۰) فرض کنید b_n ضریب جمله n ام سری سینوسی تابع x^3 باشد جواب

u $\sin\lambda x$

۱) ۲)

۳) ✓ ۴)

۲و۳

* حل معادله‌ی موج و حرارت در میله‌ی نیمه محدود و نامحدود :

دقت: میله‌ی نیمه محدود و نامحدود ← شرط مرزی در L نداریم

یعنی محدودیتی برای مقدار ویژه ایجاد نمی‌شه

یعنی λ بطور پیوسته از ۰ تا ∞ تغییر می‌کند $\sum$ تبدیل به $\int$ می‌شه!

$$u(x,t)=\int_0^{\infty} F(t)\,X(\text{تابع ویژه})\,d\lambda$$

میله‌ی نامحدود ← نه محدودیتی در تابع ویژه داریم نه محدودیتی در مقدار ویژه !

ص ۴۶۹

* برق ۸۵)

عایق شده است

↓

$u_x(0,t)=0$

↓

$\cos \lambda x$

۲۷) ✓ ۱) ×

۴) × ۱۲)

$$u(x,t)=\int_0^\infty Ae^{-\lambda^2c^2t}\cos\lambda x\,d\lambda$$

ص ۴۴۴

* کامپیوتر ۹۰)

$u_x(0,t)=0$

$=0 \quad \rightarrow \cos\lambda x$

۱) ✗   ۲) ✗

۳) ✗   ۴) ✓

* محاسبه ی جواب حالت پایدار

در جواب حالت پایدار تغییرات u به زمان وابسته نیست یعنی

u_t و u_{tt} صفر هستند بنابراین برای محاسبه ی جواب حالت

پایدار کافی است در معادلات داده شده ، u_t و u_{tt} را

صفر در نظر بگیریم و سپس معادله را حل کنیم و در انتها با اعمال شرایط

مرزی ، ضرایب مجهول را بدست می آوریم

ص ۴۲۲

* مکانیک ۸۳

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

۱) ۲) ۳)✓ ۴)✗

$$u_{xx}=0 \to u_x = A \to u = Ax+B$$

ص ۴۴۴ ، ست ۳۴

* برق ۸۸

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} = 1$$

۱) ۲) $-\frac{1}{8}$✓ ۳) ۴)

$$u_{xx}=1 \to u_x = x+A \to u = \frac{1}{2}x^2+Ax+B$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \to B=0 \\ x=1 \to 0 = \frac{1}{2}+A+A = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad u=\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$u(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{8}-\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

در معادله‌ی موج و حرارت به فرم زیر

موج
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x) , & 0<x<L , t>0 \\ u(0,t)=a , \quad u(L,t)=b \\ u(x,0)=f(x) , \quad u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

حرارت
$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + h(x) , & 0<x<L , t>0 \\ u(0,t)=a , \quad u(L,t)=b \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

همواره با تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+\phi(x)$ به معادله موج یا حرارت همگن با شرایط مرزی صفر (شرایط مرزی همگن) تبدیل می‌شوند به شرط آنکه $\phi(x)$ جواب حالت پایدار معادلات فوق در نظر گرفته شود.

۲۰۵

ص ۴۶۶

* برق ۸۶)

معادله دیفرانسیل زیر با شرایط داده شده مفروض است

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\sin x}{2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}^{\,0}$$

۲) ✗

۱) ✓

۴) ✗

۳) ✗

$$u_{xx} = \sin\frac{x}{2} \rightarrow u_x = -2\cos\frac{x}{2} + A \rightarrow u = -4\sin\frac{x}{2} + Ax + B$$

ص ۴۶۷ ص ۲۱ ست ۵۳

* مکانیک ۸۶)

$$\begin{cases} \cancel{u_t}^{\,0} - c^2 u_{xx} = Ne^{-\alpha x} \\ \\ \end{cases}$$

۲) ✓

۱) ✗

۴) ✗

۳) ✗

$$u_{xx} = -\frac{N}{c^2} e^{-\alpha x} \rightarrow u_x = \frac{N}{\alpha c^2} e^{-\alpha x} + A \rightarrow u = -\frac{N}{\alpha^2 c^2} e^{-\alpha x} + Ax + B$$

* اگر تابع $H(x,t)$ یا $f(x)$ و $g(x)$ برحسب تابع ویژه داده شوند، تعداد جملات $u(x,t)$ محدود و دقیقاً برابر تعداد جملات داده شده است.

ص ۴۵۴

* برق ۸۷

$$\cos\lambda x \leftarrow \begin{cases} u_x(0,t)=0 \ , \ u_x(2,t)=0 \rightarrow \sin 2\lambda=0 \rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{2} \\ u(x,0)=4\cos\pi x-2\cos 3\pi x \end{cases}$$

۱) ✗

۲) ✓

۳) ✗

۴) ✗

۳ که کلاً غلط!

$u(x,0)$ برحسب تابع ویژه داده شده است!

$\lambda\pi$ و $3\pi\lambda$ داریم ← باید دو جمله برحسب همینا ایجاد باشه ⟨ ۴ ← بی‌نهایت ← غ ، ۱ ← ۳تا ← غ

حل تشریحی:

$$u(x,t)=\sum Ae^{-\lambda^2 t}\cos\lambda x$$

$$u(x,t)=A_1e^{-\pi^2 t}\cos\pi x+A_2e^{-9\pi^2 t}\cos 3\pi x$$

به ازای $\lambda\pi$ و $3\pi\lambda$ فقط دو جمله باید به وجود بیاد

فقط گزینه ۲ این فرمت را دارد.

$$A_1\cos\pi x+A_2\cos 3\pi x=4\cos\pi x-2\cos 3\pi x \qquad A_1=4 ,\ A_2=-2$$

۲۰۶

ص ۴۳۴، س ۳۴

* برق ۸۹)

$u(\frac{\pi}{2},0)$

۱) ✗✗ $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ ۲) ✗ $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

۳) ✗ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ ۴) ✓✓ $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

۱ فرمش غلط ✗۱

تقیه خودمون درسته ــ عدد بذاری

$u(\frac{\pi}{2},0)=1$

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x \quad \lambda=1 \quad \lambda=3$$

$$u(x,t)=A_1 e^{-c^2t}\sin x+A_2 e^{-9c^2t}\sin 3x$$

$$A_1 \to \frac{3}{4} \qquad A_2 \to -\frac{1}{4}$$

ص ۴۲۹، س ۲۱

$u(0,t)=0 \to \sin\lambda x$

$u(L,t)=0$

* برق ۸، برق ۹۲) درجه حرارت $u(x,t)$ میله‌ای به طول π (در دو انتها) محلوط با سطح صفر درجه قرار گرفته ودمای اولیه آن $u(x,0)=\sin x$ است در معادله $u_t-u_{xx}=0$ صدق کند کدام است؟

۱) ✗ $e^{-t}\sin 2x$ ۲) ✓ $e^{-t}\sin x$ ۳) ✗ $e^{t}\sin x$ ۴) ✗ $e^{2t}\sin x$

فرم غلط

جواب‌ها دامنه‌ها درسته ۱، ۴، ۳ ــ فرمشون هم غلط

$$\sum A e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x \longrightarrow u(x,t) = A_1 e^{-t} \sin x$$

$$t_0 \longrightarrow \boxed{A_1 = 1}$$

~~اگر تابع $H(x,t)$ یا $f(x)$, $g(x)$ برحسب~~

ص ۴۴۷ ، ت ۷۶

* [illegible] ۹۰)

$y(0,t) = 0$ و $y(2,t) = 0$

$\downarrow$ $\sin \lambda x$

$\downarrow$ $\sin 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{2}$

۱) ✗

۲) ✓

۳) $\cos(\cancel{2n}+1)\pi t$ (n)

۴) ✗

حافظه در یک شرایط عدم صداقت حساب به فرم آنالیتیکال باشد فقط قسمت [illegible] ۲ و ۳
فرم کلیاتش [illegible] جواب در لازمه ی [illegible] بنویس!

فرم ← کلی ترین حالت

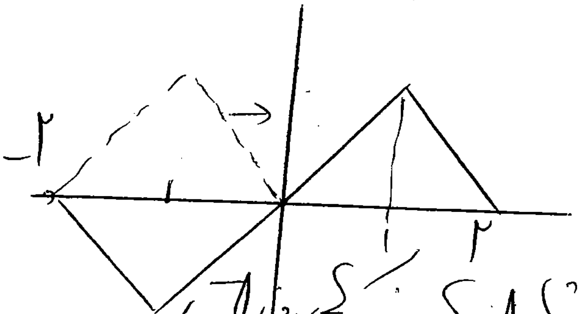
$$u(x,t)=\sum A\cos n\pi t+\sin\frac{n\pi}{2}x$$

از اینجا به بعد ← سوال سری فوریه

از شرایط اولیه استفاده میکنیم :

$$u(x,0)=f(x)=\sum A\sin\frac{n\pi}{2}x$$

A از بسط فوریه سینوسی تابع $f(x)$ بدست میاد



فقط ۲ طول کردن فوریه سینوسی داراست

* تمرین ۱۷۰ ص ۴۵۵

$$u(0,t)=0$$
$$\downarrow$$
$$\sin\lambda x$$ ← ۱و۲ حذف

۱) ✗
۲) ✗
۳) ✓
۴) ✗

۳، ۴ ← فرم کلی آن   تفاوت در ضرایب ← یک عدد است ← عدد نداری

ابتدا سری فوریه‌ی جواب را می‌نویسیم:

$$u(x,t)=\sum A\cos(2n-1)t\sin(2n-1)x$$

$$u(x,0)=1=\sum A\sin(2n-1)x$$

$$A=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\sin(2n-1)x\,dx=\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n-1)}$$

اگر دقت کرده باشید این مسئله هم مشابه محاسبات سری فوریه است.

ص ۴۳۶

(* بدون حل)

۱) ۲) ✓

۳) ۴)

$$\sum\left(A'_n(t)+\lambda^2c^2A_n(t)\right)\sin\lambda x=q(x,t)$$

تشخیص بدی ۴

۲۰۸

۱

* ریاضی مهندسی – ۱۵ / ۷ / ۹۲ – دوشنبه – جلسه‌ی

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i$$ (مجموع مانده‌های $f(z)$ در نقاط تکین منفرد آن که داخل ناحیه C قرار دارند)

(۱) نقاط تکین $f(z)$ را بدست می‌آورید

(۲) از نقاط بدست آمده در قسمت ۱، آن‌هایی که در داخل ناحیه قرار دارند را مشخص کنید → اصل مانده

(۳) مانده را در نقاط مشخص شده در قسمت ۲ بدست آوریم

(۴) حاصل انتگرال برابر است با مجموع مانده‌های بدست آمده در قسمت ۳ ضربدر $2\pi i$

* برگ (۷۵)

$$I = \oint \frac{1}{z-1}\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$$

$z=1$ ✓ → قطب ساده → $a_{-1} = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z-1}\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sin(1)$

$z=0$ ✓ → اساسی → لوران → $-(1+z+z^2+z^3 \cdots)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} \cdots\right)$

ضریب $\frac{1}{z}$، مانده $= -\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots\right) = -\sin 1 \rightarrow I = 2\pi i(a_{-1}+b_1) = 2\pi i(0) = 0$

ص ۳۵۳

* برق ۷۶)

۱)　　　　　　۲)　　　　　　۳✓)　　　　　　۴)

$$|z| = e^{Re(w)} \Longrightarrow |z| = e$$

$z=1 \rightarrow$ ویژه اساسی $\rightarrow$ بسط لوران $\rightarrow z-1=t$

$$\rightarrow f = \sin\left(\frac{t+1}{t}\right) = \sin\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

$f = \sin 1 \cos\frac{1}{t} + \cos 1 \sin\frac{1}{t} \rightarrow a_{-1} =$ مانده $=$ ضریب $\frac{1}{t} = \cos 1$

روند : نقاط تکین مقر $\rightarrow$ مشخص کنیم که داخل کدام خارج $\rightarrow$ اون که داخلند $\rightarrow$ مانده $\rightarrow$ $2\pi i \times$ مانده

ص ۳۴۶

* مکانیک ۸۴)

۱)　　　　　　۲)　　　　　　۳)　　　　　　۴✓)

$$1-\cos z = 0 \rightarrow \cos z = 1 \rightarrow z = 2k\pi \rightarrow z = 0 \checkmark$$

$\frac{1}{z^2}$ باید در z ضرب شه که $\frac{1}{z}$ ایجاد کند $\leftarrow$ مانده $= c_1$

$$f(x) = \frac{1}{z^2}\left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots\right) \rightarrow \text{مانده} = c_1$$

۲

a_1 ضریب z در e^z → $a_1 = 1$

b_1: " " z^3 در $\sin z$ → 0

$$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1 \rightarrow 1 = 0 + \frac{1}{2} c_1 \rightarrow c_1 = 2$$

ص ۳۶۰

* مکانیک ۸۳

۱)   ۲)   ۳) خارج $|2+1| = |7| > 4$ ۴) ✓ $z = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$z = 0 \rightarrow \times$

$z = z_0 \rightarrow \checkmark$

z داخل چون اگر خارج باشد انتگرال صفر و این گزینه صفر نیست

حالا اگر توی گزینه‌ها صفر نبود → در نهایت $z = 2$ بود که $z_0 = 2$ داخل $\rightarrow z_0$ داخل!

$$\rightarrow a_{-1} = \frac{e^{z_0}}{z_0} \rightarrow f(z_0) = 2\pi i \frac{e^{z_0}}{z_0}$$

z چه نوع نقطه‌ای → قطب ساده → محاسبه مانده ساده

$$f'(z_0) = 2\pi i \frac{z_0 e^{z_0} - e^{z_0}}{z_0^2} \rightarrow f'(2) = 2\pi i \frac{e^2}{4}$$

ص ۱۵۳

* برق ۷۸

$2\pi i a_{-1} \leftarrow \pi j e^{j} \operatorname{sh}\pi$

↓

مانده در $z = j$

$\pi j e^{-j} \operatorname{sh}\pi$

$2\pi i b_{-1} \leftarrow$

↓

مانده در $-j$

۱)   ۲) ✓   ۳)   ۴)

$$I = 2\pi i (a_{-1} + b_{-1}) = \pi j \operatorname{sh}\pi \, (\underbrace{e^{j} + e^{-j}}_{2\cos 1})$$

* مثال در $\oint \frac{e^{z}}{z^{3}(z^{2}+1)^{2}(z-1)}\,dz$ اگر C دایره‌ی $|z|=\frac{1}{2}$

باشد، حاصل انتگرال برابر α است، اگر $C=|z-j|=\frac{1}{2}$

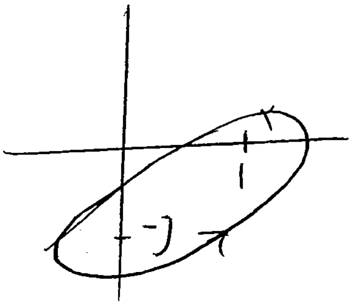
باشد، حاصل انتگرال برابر β است، اگر C مسیر زیر باشد

$z=0 \to a_{-1}$

$z=1 \to b_{-1}$

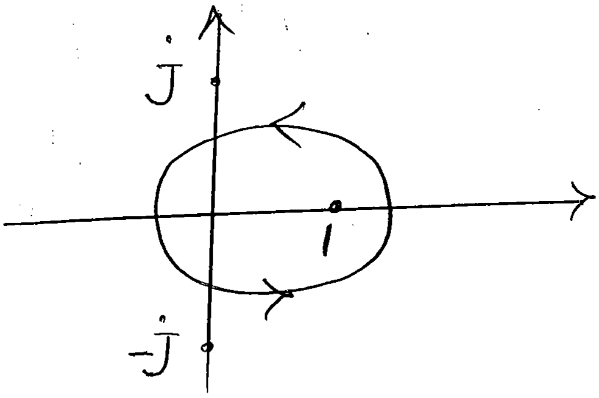
$z=j \to c_{-1}$

$z=-j \to d_{-1}$



حاصل انتگرال برابر γ است، در صورتی

که C مسیر زیر باشد حاصل انتگرال را بدست آورید.



$$I=2\pi i(a_{-1}+b_{-1})=\alpha+2\pi i\times\frac{e}{4}$$

۲۱۰ ۳ صـ۳۵۱

* برق ۷۵) مطلوبست محاسبه‌ی $\oint_C \frac{dz}{ch^2\pi z + sh^2 \pi z}$ که در آن $\frac{C}{}$ دایره $|z|=2n$ و $n=1,2,3,\dots,m$ (m عدد معلوم و مثبت صحیح)

۱) 0 ✓ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) πi ۴) $2\pi i$

$$ch^2\pi z + sh^2 \pi z = 0 \rightarrow \cos^2(i\pi z) - \sin^2(i\pi z) = 0$$

$$\rightarrow \cos(2i\pi z) = 0 \rightarrow 2i\pi z = (2k-1)\frac{\pi}{2} \rightarrow z = \frac{2k-1}{4} i \rightarrow$$ قطب ساده

وقتی گزینه‌ها به دایره ربطی ندارند ← ساده‌ترین را در نظر می‌گیریم

$$|z| = 2$$

$z = \frac{2k-1}{4} i$ قطب ساده $\rightarrow a_{-1} = \lim_{z \to \frac{2k-1}{4} i} \left(z - \frac{2k-1}{4} i\right) \frac{1}{\cos 2i\pi z}$

$$\stackrel{H}{=} \frac{1}{+2\pi i \sin(2k-1)\frac{\pi}{2}} = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i}$$

$$I = \cancel{2\pi i} \sum \frac{(-1)^{k+1}}{\cancel{2\pi i}} = \sum (-1)^{k+1}$$

اگه توی گزینه‌ها -1 هم بود باید بشمریم ببینیم چند قطب داخل است!

۸ تا داخل است ← چون زوج است ← جمع صفر!

* اگر در $\oint_C f(z)dz$ مسیر C، $|z|=r$ باشد با جایگزینی های زیر می توان انتگرال را از قضیه مانده ها حل کرد.

① $|z| \to ? \quad \to \quad |z|=r$

② $\bar{z} \to ? \quad \to \quad z\bar{z}=r^2 \quad \to \quad \bar{z}=\dfrac{r^2}{z}$

③ $x \to ? \quad \to \quad x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}=\dfrac{z+\frac{r^2}{z}}{2}$

④ $y \to ? \quad \to \quad y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=\dfrac{z-\frac{r^2}{z}}{2i}$

⑤ $|dz| \to ? \quad \to \quad z=re^{i\theta} \quad \to \quad dz=rie^{i\theta}d\theta \quad \to \quad |dz|=rd\theta$

$\boxed{d\theta=\dfrac{dz}{iz}}$

$\boxed{|dz|=r\dfrac{dz}{iz}}$

⑥ $d\bar{z} \to ? \quad \to \quad \bar{z}=re^{-i\theta} \quad \to \quad d\bar{z}=-rie^{-i\theta}d\theta$

$d\bar{z}=\dfrac{-r^2 i}{re^{i\theta}}\,\dfrac{dz}{iz} \quad \to \quad \boxed{d\bar{z}=\dfrac{-r^2}{z^2}dz}$

۲۱۱

۴

ص ۳۶۴

* کامپیوتر ۷۴)

$$I=\oint_C \left[\frac{z+|z|}{z}+\frac{e^{z}}{z^{3}}\right]dz$$

$$\underbrace{\qquad}_{I_1}\qquad\underbrace{\qquad}_{I_2}$$

۴)　　۳) ✓　　۲)　　۱)

$$\begin{cases} I_1=\oint \dfrac{\frac{1}{z}+1}{z}\,dz=2\pi i \\ I_2=2\pi i\times\frac{1}{2}=\pi i \end{cases} \Rightarrow I=3\pi i$$

ص ۳۶۵

* برق ۸۱)

$$I=\oint \frac{\sin z}{1-\alpha z}\,dz$$

۴) ✓　　۳)　　۲)　　۱)

$$I=\int \frac{\sin z}{1-\frac{\alpha}{z}}\,dz=\oint \frac{z\sin z}{z-\alpha}\,dz=2\pi i\alpha\sin\alpha$$

ص ۳۴۲　، س ۷۴

* کامپیوتر ۸۱)

۴) ✓　　۳)　　۲)　　۱)

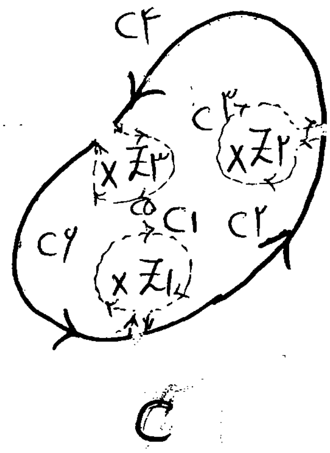
$$\oint\left(z-\frac{z+\frac{4}{z}}{2}\right)dz=2\pi i(-2)$$

ص ۳۴۹، تست ۱۲۲

* ریاضی محض ۱۴۰۱ مقدار انتگرال $\int_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\, dz$ (در جهت مثلثاتی) کدام است؟

۱) $2\pi i$ ✓ ۲) ۳) ۴)

$$\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i$$



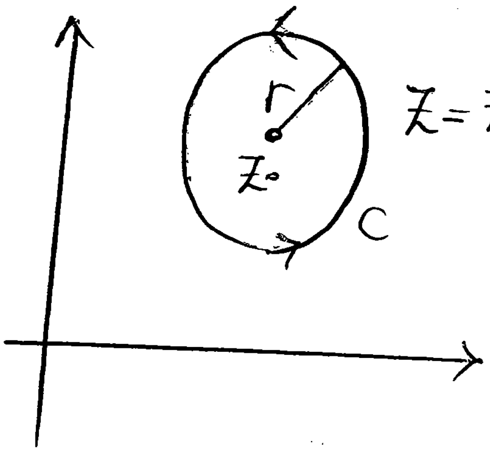
$$\oint_C f(z)\,dz = ?$$

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz + \int_{C_5} f(z)dz + \int_{C_6} f(z)dz$$

$\int_{C_1} \to -2\pi i a_{-1}$, $\int_{C_3} \to -2\pi i b_{-1}$, $\int_{C_5} \to -2\pi i c_{-1}$

مسیر را ادامه می‌دهیم (نقاط z_1, z_2, z_3 را از مسیر خارج کنیم)

$$\underbrace{\int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz + \int_{C_6} f(z)dz}_{\oint_C f(z)dz} = 2\pi i(a_{-1}+b_{-1}+c_{-1})$$

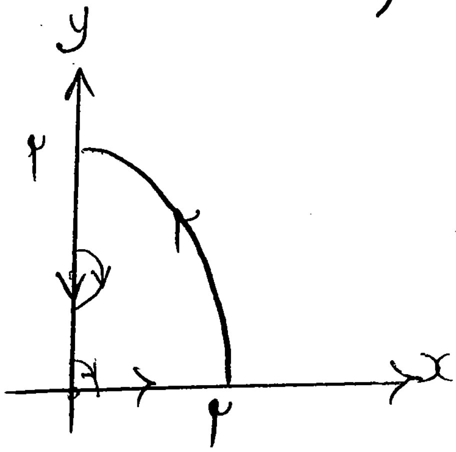


$$z = z_0 + re^{i\theta}$$

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = \int \frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta = \int_0^{2\pi} i\,d\theta = 2\pi i$$

① اگر در $\oint_C f(z)dz$ ، نقطه تکین منفرد z_0 روی مسیر C باشد بطوریکه بتوان با دوران θ آن را از مرز خارج کرد، در محاسبه انتگرال مانده z_0 در $i\theta$ ضرب می‌شود.

* مثال) حاصل $\oint_C \frac{dz}{z(z^2+1)}$ روی مرز داده شده را بدست آورید.



$z=0$ ✓ $\rightarrow a_{-1}=1$

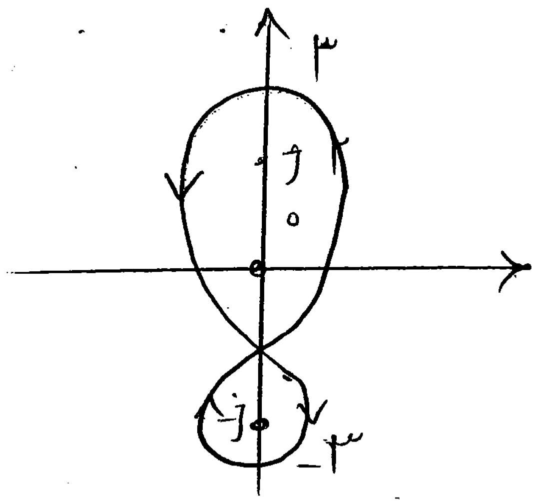
$z=j$ ✓ $\rightarrow b_{-1}=-\frac{1}{2}$

$z=-j$ ×

$$I=\frac{\pi}{2}ia_{-1}+\pi i b_{-1}=0$$

* اگر در $\oint_C f(z)dz$ نقطه تکین منفرد z_0 خلاف جهت مثلثاتی دور زده شود، در محاسبه‌ی انتگرال مانده z_0 در $-2\pi i$ ضرب می‌شود.

* مثال) حاصل $\int \frac{dz}{z(z^2+1)}$ روی مسیر داده شده را بدست آورید.



$z=0$ ✓ $\rightarrow a_{-1}=1$

$z=j$ ✓ $\rightarrow b_{-1}=-\frac{1}{2}$

$z=-j$ ✓ $\rightarrow c_{-1}=-\frac{1}{2}$

$I=2\pi i a_{-1}+2\pi i b_{-1}-2\pi i c_{-1}=2\pi i$

صـ ۳۶۸

جهت حرکت عقربه ساعت

*هوافضا ۸۹

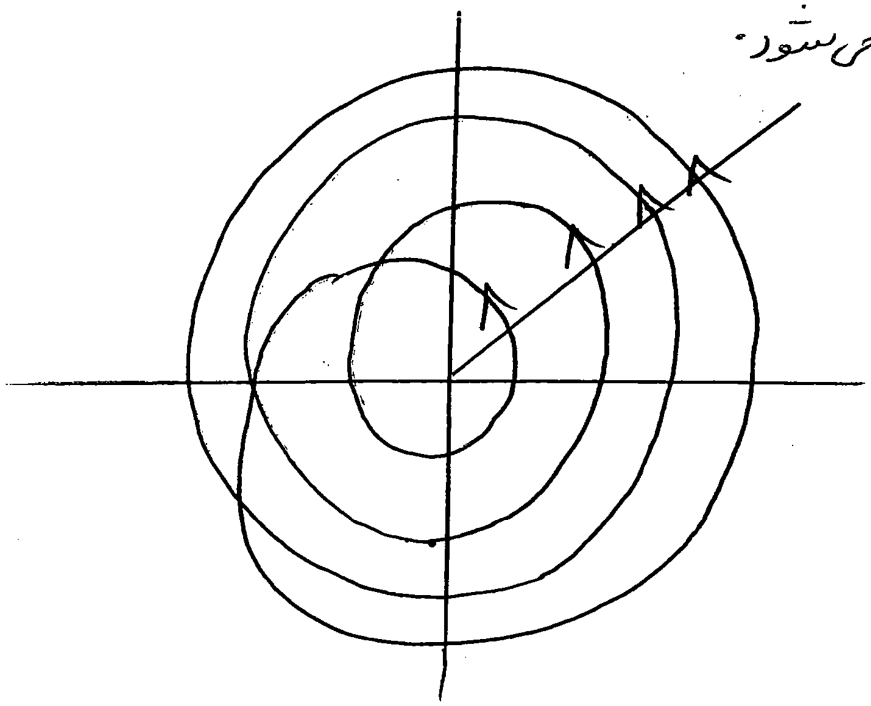
۱) $-\pi i\,sh1$ ۲) ۳) ۴)

$z=i \rightarrow a_{-1}=\lim_{z\to j}(z-j)\dfrac{\sin z}{(z-j)(z+j)}=\dfrac{\sin j}{2j}$

$I=-2\pi i a_{-1}=-2\pi i\dfrac{\sin j}{2j}=-\pi\sin j=-\pi j\,sh1$

۳) اگر در $\oint_C f(z)dz$ نقطه‌ی تکین منفرد z_0 توسط مسیر C
n بار در جهت مثلثاتی دور زده شود در محاسبه انتگرال مانده z_0 در $2\pi i$ n

ضرب می‌شود.



$$I = 2\pi i \times \underbrace{4}_{\text{تعداد دور}} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\text{مانده}}$$

* برق ۸۵) ص ۳۶۷

۱) $-2\pi i$ ۲) 0 ۳) $2\pi i$ ۴) $4\pi i$ ✓

$\theta = 0 \rightarrow r = 3 \rightarrow (3,0)$

$\downarrow$

$(3, 2k\pi)$

$$3 = 3 - \sin^2\frac{\theta}{4} \rightarrow \sin^2\frac{\theta}{4} = 0 \rightarrow \frac{\theta}{4} = k\pi$$

$$\rightarrow \theta = 4k\pi \rightarrow \theta = 4\pi \rightarrow n = 2$$

$$I = 2\pi i \times 2 \times 1 = 4\pi i$$

سوال : $r = 3 - \sin^2\frac{\theta}{5}$

$$3 = 3 - \sin^2\frac{\theta}{5} \rightarrow \sin^2\frac{\theta}{5} = 0 \rightarrow \theta = 5k\pi$$

$$k=1 \rightarrow 5\pi \times$$

$$k=2 \rightarrow 10\pi \rightarrow n=5$$

ص ۳۲۸ ، س ۱۱۴

* ریاضی محض ۸۹)

۱)　　۲)　　۳)　　۴) ✓

$$a_{-1} = \lim (z-z_0)\frac{1}{2\pi i}\frac{z f'(z)}{f(z)} \overset{H}{=} \frac{1}{2\pi i}\frac{z_0 f'(z_0)}{f'(z_0)} = \frac{z_0}{2\pi i}$$

$$I = 2\pi i a_{-1} = z_0$$

سال ۸۵

*مکانیک ۹۰)

۴)   ۳)   ۲) ✓   ۱)

$z=0$ ✓ $\rightarrow a_{-1}=\ln(-2) \rightarrow I=2\pi i \ln(-2)$

$=2\pi i(\ln 2+i\pi)$

ص ۵۹۷ س ۱۵

*دکترای مکانیک ۹۲)

$$f(z)=\frac{\log(1+z^2)}{(3z-i)^2}$$

۱) ✗

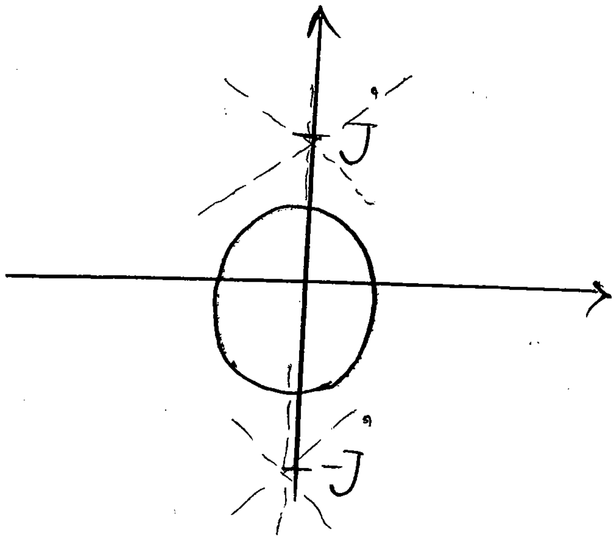
۲)

۳) ✓

۴) ✗

ریشه‌های $f(z)=0$ نقاط شاخه‌اند $\ln(f(z)) \rightarrow$

$1+z^2=0 \rightarrow z=\mp j$



$$a_{-1} = \lim_{z \to \frac{i}{3}} \left[\left(z - \frac{i}{3}\right)^2 \frac{\ln(1+z^2)}{9\left(z-\frac{i}{3}\right)^2} \right]' = \frac{2z}{9(1+z^2)}$$

$$= \frac{2}{9} \frac{\frac{i}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{i}{12}$$

$$I = 2\pi i a_{-1} = -\frac{\pi}{6}$$

[illegible] ۹۰*

* مانده در ∞ :

برای محاسبه‌ی مانده در ∞ کافی است مانده $\dfrac{-f(\frac{1}{z})}{z^2}$ در $z=0$ بدست آوریم

* مثال) مانده تابع $f(z)=\dfrac{\cos(\frac{1}{z})}{z-1}$ را در ∞ بدست آورید

$$\frac{-f(\frac{1}{z})}{z^2}=\frac{-\cos z}{z^2(\frac{1}{z}-1)}=\frac{-\cos z}{z(1-z)}$$

$$a_{-1}=\lim_{z\to 0} z\,\frac{-\cos z}{z(1-z)}=-1$$

مجموع مانده های $f(z)$ همواره برابر صفر است (با احتساب مانده در ∞)

(نقاط غیرتحلیلی $f(z)$ فقط تکین منفرد باشند)

$\oint_c f(z)\,dz=2\pi i$ (مجموع مانده‌های $f(z)$ در نقاط تکین منفرد آن که داخل ناحیه c قرار دارند) $=-2\pi i$ (مجموع مانده‌های $f(z)$ در نقاط تکین منفرد آن که خارج ناحیه c قرار دارند (با احتساب مانده در ∞))

(نقاط غیرتحلیلی $f(z)$ تکین منفرد باشند)

ص ۳۴۹

* برق ۸۵)

۱) ✓

$$\frac{-f(\frac{1}{z})}{z^2} = \frac{-\sin z}{z^2(\frac{1}{z}-1)} = \frac{-\sin z}{z(z-1)} \xrightarrow[\text{حذف شدنی}]{z=0} a_{-1}=0 \to I=0$$

ص ۳۶۲

* مخابرات ۹۰)

۴) ۳) ✓ ۰ ۲) ۱)

$$\begin{cases} z=0 \;\checkmark \to a_{-1}=0 \\ z=\frac{\pi}{2}j \;\checkmark \to b_{-1}=0 \\ z=-\frac{\pi}{2}j \;\checkmark \to c_{-1}=0 \end{cases}$$

* اگر $f(z)$ زوج باشد مانده در ∞ همواره برابر صفر است.

ص ۳۲۳ س ۱۴

* کامپیوتر ۹۰)

۴) ۳) صفر ✓ ۲) ۱)

$z\sin z=0 \to z=k\pi \to z=0$ ✓

ص ۳۳ س ۳۶

* هوافضا ۹۰)

$$\oint \frac{e^z + z^2\sin z}{z^3}$$

زوج

۴) ۳) ۲) ۱) ✓

$2\pi i \times \frac{1}{2} = \pi i$

ص ۳۴۹

* برق ۹۱)

۱)　　۲)　　۱۳　　۴) $3\pi i$ ✓

$z=0$ ✓ $\rightarrow a_{-1}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}\times 2\pi i = 3\pi i$

ص ۳۲۴ تست ۱۵

* کامپیوتر ۹۱)

۱)　　۲)　　۳)　　۴) $2\pi i(1-e^{-1})$

$z=0$ ✓ $\rightarrow a_{-1}=1$

$z=-1$ ✓ $\rightarrow b_{-1}=-e^{-1}$

ص ۵۶۵ تست ۶

* برق ۹۲)

$$\oint_C \frac{dz}{(z^n+1)} \quad (n>1 \text{ عدد طبیعی})$$

۱)　　۲)　　۳) 0 ✓✓　　۴)

① $\int \frac{dz}{z^2+1}$ 　 $z^2+1=0$

$z=j \rightarrow a_{-1}=\frac{1}{2j}$

$z=-j \rightarrow b_{-1}=-\frac{1}{2j}$

روش دوم: $z^n+1=0 \rightarrow z^n=-1 \rightarrow z=(-1)^{\frac{1}{n}}$

$$\frac{-f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} = -\frac{1}{z^2\left(\frac{1}{z^n}+1\right)} = -\frac{z^{n-2}}{z^n+1}$$

تحلیلی

$$\rightsquigarrow \quad a_{-1}=0 \rightsquigarrow I=0$$

ص ۵۲۸، تست ۱۷

* کامپیوتر ۹۲

$z=1$ ✓ → ویژه اساسی → سطلوران → $z-1=t$

$$\to f=(t^2+2t+\cancel{1}-\cancel{1})e^{\frac{1}{t}}$$

$$\text{مانده} = \frac{1}{t}\ \text{ضریب} = \frac{1}{3!}+1=\frac{7}{6} \to I=2\pi i\left(\frac{7}{6}\right)=\frac{7\pi i}{3}$$

ص ۵۲۵، تست ۵۸

* ریاضی محض ۹۲

اکلام

↑

مشتق‌پذیر

۱) $-2\pi i$ ۲) ✓   ۳)   ۴)

$$|e^z f(z)|\le 1 \to e^z f(z)=c \to f(z)=ce^{-z},\ f(0)=1\to c=1$$

$$f(z)=e^{-z}$$

۲۱۷

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{-z}}{z^2}\,dz = -2\pi i$$

$\int_{-\pi}^{\pi}$

* محاسبه‌ی انتگرال های معین با استفاده از انتگرال های مختلط

گروه ① : محاسبه‌ی انتگرال های به فرم $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, \cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$

$$z = e^{i\theta} \to \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \to \cos\theta = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

$$\to \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \to \sin\theta = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$$

$$\to dz = ie^{i\theta}\,d\theta \to d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, \cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \oint_{C:|z|=1} f\left(z, \frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} \to I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$$

۱۷ ، ص ۳۳

* برق ۷۶

۴) ۳) ۲) ✓ ۱)

$$I=\oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{2\left(a+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)}=\frac{1}{i}\oint \frac{dz}{z^2+2az+1}$$

$$z^2+2az+1=0 \rightarrow \begin{cases} z=-a+\sqrt{a^2-1} \ \checkmark \\ z=-a-\sqrt{a^2-1} \ \times \end{cases}$$

$$\checkmark \rightarrow a_{-1}=\underset{z\to -a+\sqrt{a^2-1}}{\mathrm{Res}}\left(z+a-\sqrt{a^2-1}\right)\frac{1}{i(z^2+2az+1)}\overset{H}{=}\frac{1}{2i\sqrt{a^2-1}}$$

$$\times \rightarrow$$

$$I=2\pi i\, a_{-1}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

ص ۳۷۴

*کامپیوتر ۷۷)

$\frac{2\pi}{n!}$ (۴ ✓ (۳ (۲ (۱

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta+i\sin\theta}\, e^{-in\theta}\, d\theta=\oint_{C:|z|=1} e^{z} z^{-n}\frac{dz}{iz}=\oint_C \frac{1}{i}\frac{e^{z}}{z^{n+1}}dz$$

$$=\frac{1}{i}\times 2\pi i\times\frac{1}{n!}$$

ص ۳۷۵

* ریاضی مهندسی (۹۱)

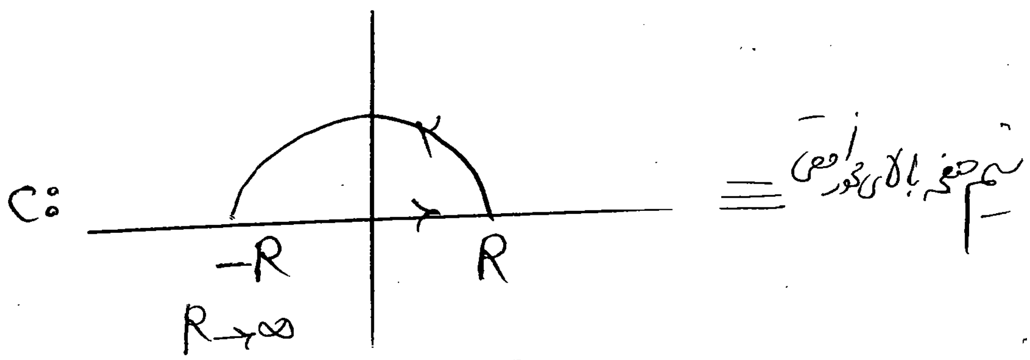
۱) ۲) ۳) 2π ۴)

$$I=\oint \sin(e^{z})\frac{dz}{iz}$$

$z=0$ ✓ → قطب ساده → $a_{-1}=\lim_{z\to 0} z\frac{\sin(e^{z})}{iz}=\frac{\sin 1}{i}$

گروه ② محاسبه‌ی انتگرال هایی به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}dx$ که در آن p و q توابع چندجمله‌ای هستند

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}dx=\oint_{c}\frac{p(z)}{q(z)}dz$$



* مثال) حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}$ را بدست آورید

$$I=\oint_{c}\frac{dz}{1+z^{2}}$$

$$1+z^3=0 \rightarrow z=(-1)^{\frac{1}{3}}=(1)^{\frac{2k\pi+\pi}{3}} \begin{cases} k=0 & \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \checkmark \\ k=1 & \operatorname{cis}\pi=-1 \checkmark \\ k=2 & \operatorname{cis}\frac{5\pi}{3} \times \end{cases}$$

$$a_{-1}=\lim_{z\to \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}\left(z-\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}\right)\times\frac{1}{1+z^3}=\frac{1}{3\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$b_{-1}=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{1}{1+z^3}=\frac{1}{3}$$

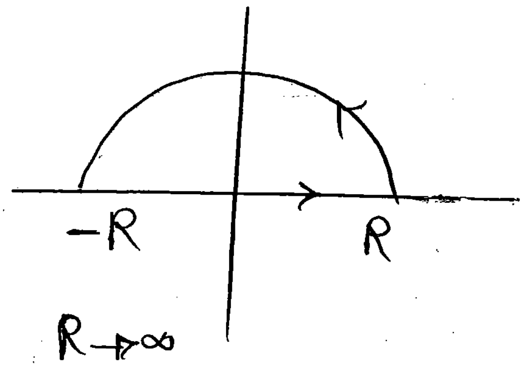
$$I=2\pi i\, a_{-1}+\pi i\, b_{-1}=\frac{2\pi i}{3}\left(\operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)+\pi i\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2\pi i}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\pi i}{3}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

* گروه ۳) محاسبه‌ی انتگرال‌های به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{q(x)}\times\begin{bmatrix}\sin mx\\ \text{L}\\ \cos mx\end{bmatrix}dx$

الف) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x,\cos mx)}{q(x)}dx=\operatorname{Re}\left\{\oint_C\frac{P(z,e^{imz})}{q(z)}dz\right\}$

ب) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x,\sin mx)}{q(x)}dx=\operatorname{Im}\left\{\oint_C\frac{P(z,e^{imz})}{q(z)}dz\right\}$

C: 

$\equiv$ نیم صفحه بالای محور افقی

*مثال: حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x(x-1)}\,dx$ را بدست آورید.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x(x-1)}\,dx = Re\left\{\oint \frac{1-e^{2iz}}{2z(z-1)}\,dz\right\}$$

حذف شدنی

$z=0$ ✓ $\rightarrow a_{-1}=0$

$z=1$ ✓ $\rightarrow$ قطب ساده $\rightarrow b_{-1}=\frac{1-e^{2i}}{2}$

$$I=Re\left\{\pi i a_{-1}+\pi i b_{-1}\right\}=Re\left\{\frac{\pi i}{2}(1-\cos 2-i\sin 2)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\sin 2$$

ص ۳۷۹

* برق ۸۲

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$$

۱)　　۲)　　$\pi(1-\frac{1}{e})$ (۳ ✓　　۴)

$$I=\mathrm{Im}\left\{\oint_C \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz\right\}$$

$z=0$ ✓ $\to a_{-1}=1$

$z=j$ ✓ $\to b_{-1}=\frac{e^{-1}}{-2}$

$z=-j$ ✗

$$I=\mathrm{Im}\{\pi i a_{-1}+2\pi i b_{-1}\}=\pi-\pi e^{-1}$$

* برق ۷۵) انتگرال غیرعادی $I=\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{\pi}e^{-x}$　　۲) $\frac{\pi}{2}e^{-x}$ ✓　　۳) πe^{-x}　　۴) واگراست

* انتگرال فوریه تابع $F(x)=\frac{x}{1+x^2}$ را بدست آورید

* تبدیل فوریه تابع $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ را بدست آورید

* تبدیل فوریه تابع $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ را بدست آورید

* اگر $B(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^2}$ و $A(\omega)=0$ باشد $f(x)$ را بدست آورید

۲۲۵

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega$$

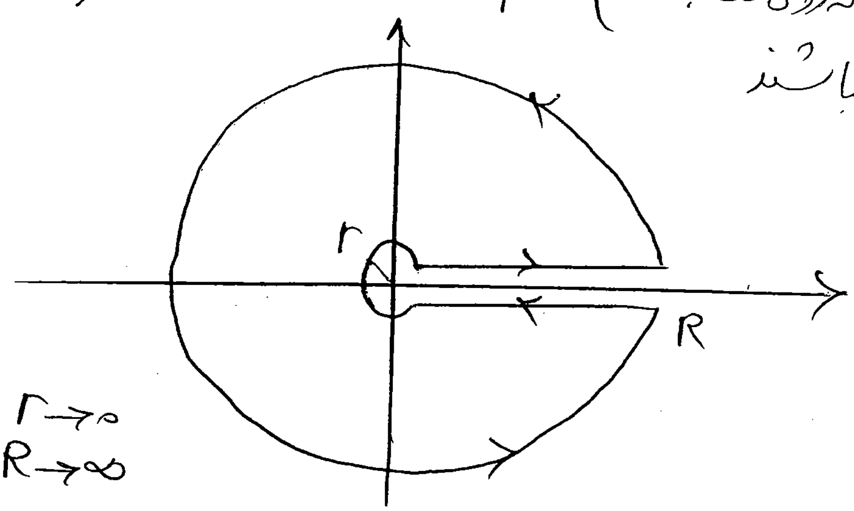
$$I=\mathrm{Im}\left\{\oint\frac{z e^{jxz}}{2(1+z^2)}\,dz\right\}$$

$$z^2+1=0\quad\begin{cases} z=j \ \checkmark \\ z=-j \ \times\end{cases}\Rightarrow a_{-1}=\frac{e^{-x}}{4}$$

$$I=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\,\frac{e^{-\pi}}{4}\right\}=\frac{\pi}{2}e^{-x}$$

* گروه ۴: محاسبه‌ی انتگرال‌ها به فرم $\int_0^\infty x^q f(x)\,dx$ با شرط $|q|<1$

$$\int_0^\infty x^q f(x)\,dx=\frac{-\pi}{\sin q\pi}\left\{\text{مجموع مانده‌های } f(z)(-z)^q \text{ در نقاط تکین آن که روی محور حقیقی مثبت نباشند}\right\}$$



$r\to 0$

$R\to\infty$

ص ۳۹۷

* برق ۹۰)

۴) $\qquad$ ۳) $\dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}$ ✓ $\qquad$ ۲) $\qquad$ ۱)

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x} = \frac{-\pi}{\sin(-a\pi)}\left(1\right) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

$$\frac{(-z)^{-a}}{z+1} \rightarrow a_{-1} = 1$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi \ln a}{2a}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^q}{a^2+x^2} = \frac{-\pi}{\sin q\pi}$$

$$\frac{(-z)^q}{a^2+z^2} \Rightarrow \begin{cases} z = aj \rightarrow a_{-1} = \dfrac{(-aj)^q}{2aj} = \dfrac{a^q e^{-j\frac{\pi}{2}q}}{2aj} \\ z = -aj \rightarrow b_{-1} = \dfrac{(aj)^q}{-2aj} = \dfrac{a^q e^{j\frac{\pi}{2}q}}{-2aj} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^q}{a^2+x^2}\,dx = \frac{-\pi}{\sin q\pi}\left(\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}q} - e^{j\frac{\pi}{2}q}}{2aj}\right) = \frac{\pi a^q}{a \underbrace{\sin q\pi}_{2\sin\frac{q\pi}{2}\cos\frac{q\pi}{2}}} \sin\left(\cancel{\frac{q\pi}{2}}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^q}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\,\frac{x^q}{\cos\frac{q\pi}{2}}$$

مشتق نسبت به q $\Rightarrow$ $$\int_0^\infty \frac{x^q \ln x}{a^2+x^2}\,dx =$$

$$\frac{\pi}{2a}\;\frac{a^q \ln a \times \left(\cos\frac{q\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{q\pi}{2}\right)\times a^q}{\cos^2\frac{q\pi}{2}}\Bigg|_{a=0}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\ln a$$

⑤ گروه پنجم: روش کلی محاسبه‌ی انتگرال های معین با استفاده از انتگرال مختلط:

① انتخاب $f(z)$ مناسب ← به جز گروه های ۱، ۲، ۳، ۴، انتخاب بر عهده طراح سؤال است

② انتخاب مسیر مناسب ← 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃

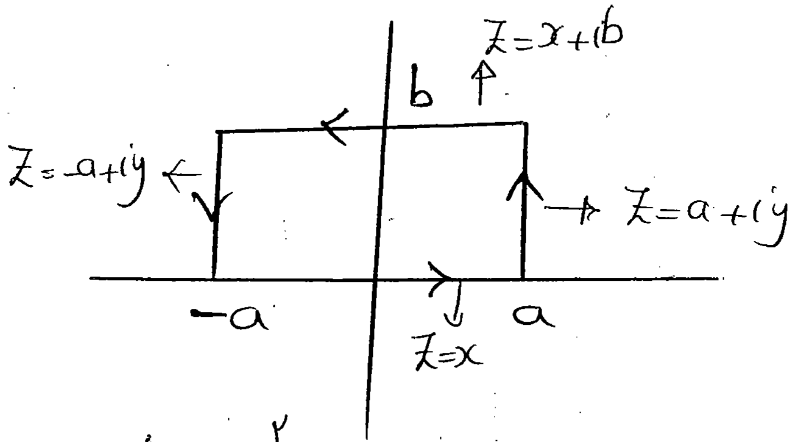
③ محاسبه $\oint_C f(z)dz$

④ حرکت روی مسیر C

ص ۳۸۵

* مهندسی هسته‌ای ۸۴)

۱) ✓   ۲) X   ۳) X   ۴) X



$$\oint e^{-z^2}dz=0$$

$$\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx+\cancel{\int_{0}^{b} e^{-(a+iy)^2}i\,dy}^{\,0}+\int_{a}^{-a} e^{-(x+ib)^2}dx$$

$a \to \infty$

$$+\cancel{\int_{b}^{0} e^{-(-a+iy)^2}i\,dy}^{\,0}=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx+\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-x^2-2ibx+b^2}dx=0$$

$$\sqrt{\pi}-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(\cos 2bx-i\sin bx)dx=0$$

۲۲۲

$$\sqrt{\pi} = e^{b^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx - i\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin 2bx\,dx}\right)$$

$$\sqrt{\pi} = 2e^{b^2}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

$$f(x) < g(x) \nrightarrow \int f(x) < \int g(x)$$

$$-1 < \cos x < 1 \rightarrow$$ تابع را صعودی نمی‌کند

حاصل از $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ کمتر شد!

جزوه باما

حلسه‌ی فوق العاده ۲۲۳

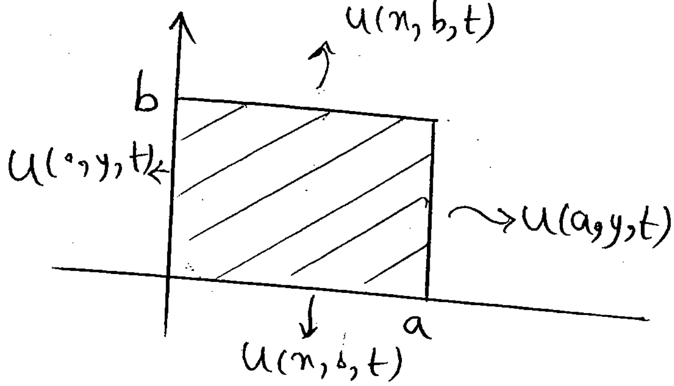
* ریاضی مهندسی - شنبه - ۹۲/۷/۲۰ - جلسه‌ی

*جلسه‌ی دوم مشتقات جزئی

معادله موج و حرارت در فضای دو بعدی

$$u_{tt} = c^2(u_{xx}, u_{yy}) \qquad 0<x<a,\ 0<y<b$$

$$\begin{cases} u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \end{cases}$$



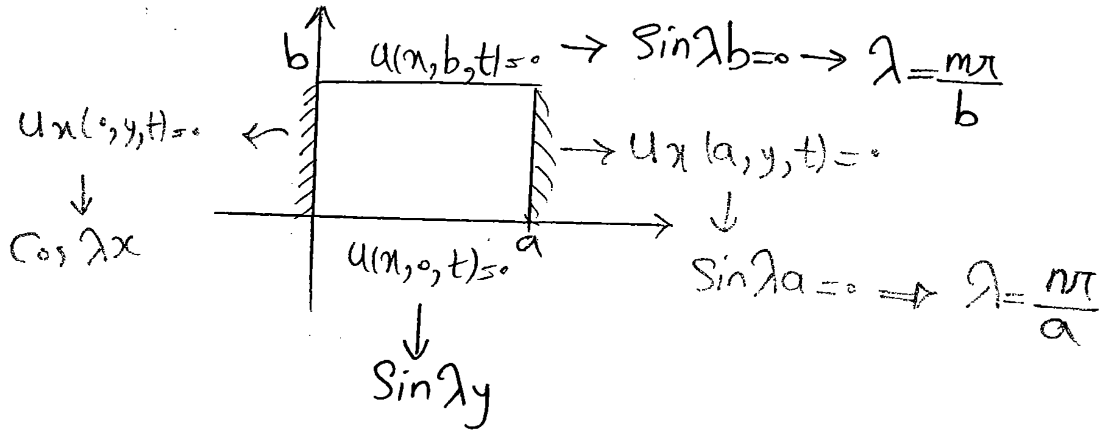
$u(x,y) = \sum\sum F(t) x$ (تابع ویژه برحسب x) (تابع ویژه برحسب y)

$F(t) \to A\cos\lambda ct + B\sin\lambda ct$، تابع ویژه برحسب x $\to \lambda_1$، تابع ویژه برحسب y $\to \lambda_2$

$$\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

*مثال) پاسخ معادله حرارت با شرایط مرزی داده شده بدست آورید.

$$\begin{cases} u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \qquad 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(x,y,0) = f(x,y) \end{cases}$$



$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\lambda^2 c^2 t}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\right)y$$

$$\lambda=\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

$$u(x,y,0)=f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$A=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dy\,dx$$

صفحه ۱۴ ۳۰

* برق ۹۰) اگر تابع $f(x,y)$ در ناحیه $0<x<a$ و $0<y<b$ به صورت سری

۱) ✗
چون $\frac{2}{a}$ نداره

۲) ✓

۳) ✗
چون $\frac{2}{a}$ نداره

۴) ✗
$\frac{x}{a}$ اینجا $\frac{y}{b}$ هست

* کامپیوتر ۸۶، کامپیوتر ۹۲) بدست آوردن جواب معادله حرارت

۱) ✗
۲) ✗
۳) ✗
۴) ✓

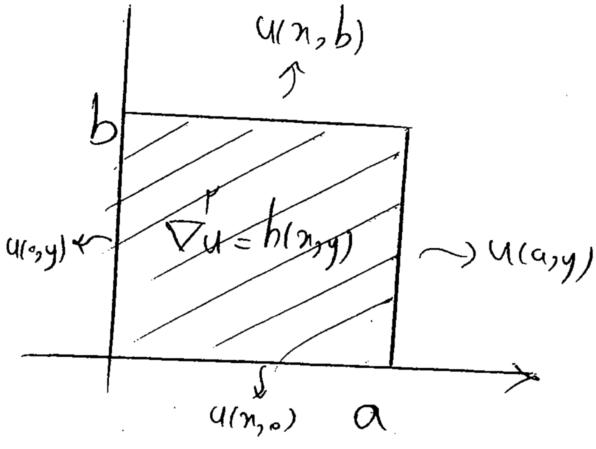
$$\begin{cases} u(0,y,t)=0 \rightarrow \sin\lambda x \\ u(a,y,t)=0 \rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_y(x,0,t)=0 \rightarrow \cos\lambda y \\ u_y(x,a,t)=0 \rightarrow \sin\lambda a=0 \rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{a} \end{cases}$$

همانطور دیده می‌شه λ از صفر شروع می‌شه! مگر اینکه در صفر تعریف نشده باشد

* معادله لاپلاس در مختصات دکارتی (حالت پایدار معادله موج و حرارت دو بعدی)

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=h(x,y) & 0<x<a\ ,\ 0<y<b \\ u(x,0)=f_1(x) \\ u(x,b)=f_2(x) \\ u(0,y)=f_3(y) \\ u(a,y)=f_4(y) \end{cases}$$



که باید مشخص بدیم کدوم دو شرط نقش شرط مرزی و کدام دو شرط نقش شرط اولیه را بازی می‌کند
دو شرطی که نقش اولیه می‌کنند باید در یک راستا باشند
معادله موج گفتیم اگر شرایط مرزی صفر باشه ← اولین کار: شرایط مرزی صفر
انجام اولین کار یعنی انجام ندادیم ⇐ شرایط مرزی صفر
برای صفر کردن شرایط مرزی یک تغییر متغیر تعریف کنیم

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$$

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = h(x,y) \\ v(x,b) = f_1(x) \\ v(x,b) = f_2(x) \\ v(0,y) = 0 \rightarrow \sin\lambda x \\ v(a,y) = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{n\pi}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 \\ w(x,0) = 0 \rightarrow \sin\lambda y \\ w(x,b) = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{n\pi}{b} \\ w(0,y) = f_3(y) \\ w(a,y) = f_4(y) \end{cases}$$

اولی در راستای x هست شرط صفر ← شرایط مرزی
دومی در راستای y دو تا شرط صفر ← شرایط مرزی

* همیشه راستایی که دو شرط صفر ← مرزی، دو شرط دیگه اولیه

$$\begin{cases} v(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F(y)\sin\lambda x \,, \quad \lambda = \dfrac{n\pi}{a} \\ w(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F(x)\sin\lambda y \,, \quad \lambda = \dfrac{n\pi}{b} \end{cases}$$

$$v_{xx} + v_{yy} = h(x,y)$$

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F(y) \sin \lambda x \quad , \quad \lambda = \frac{n\pi}{a}$$

$$\sum \left(F''(y) - \lambda^2 F(y) \right) \sin \lambda x = h(x,y) \left\langle \begin{array}{l} = 0 \\ \neq 0 \end{array} \right.$$

$$h(x,y) = 0 \Rightarrow F''(y) - \lambda^2 F(y) = 0 \Rightarrow s^2 - \lambda^2 = 0$$

$$s = \mp \lambda$$

حل

$$\boxed{F(y) = Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y}}$$

حل

$$\boxed{F(y) = A ch \lambda y + B sh \lambda y}$$

$$h(x,y) \neq 0 \Rightarrow F''(y) - \lambda^2 F(y) = \frac{2}{a} \int_0^a h(x,y) \sin \lambda x \, dx = M(y)$$

$$F''(y) - \lambda^2 F(y) = M(y) \Rightarrow \begin{cases} F_h = A ch \lambda y + B sh \lambda y \\ F_p = N(y) \end{cases}$$

$$F = F_h + F_p = A ch \lambda y + B sh \lambda y + N(y)$$

$$v(x,y) = \sum \left(A ch \lambda y + B sh \lambda y + N(y) \right) \sin \lambda x dx \quad , \quad \lambda = \frac{n\pi}{a}$$

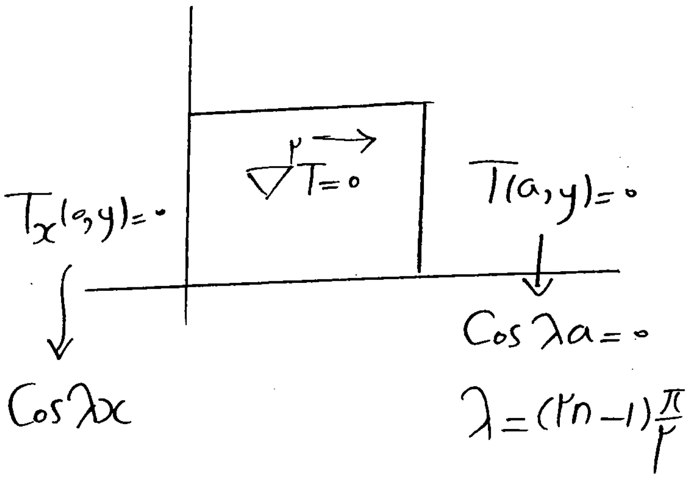
با اعمال شرایط باقی مانده (شرایطی که نقش شرط اولیه را دارند) ضرایب مجهول

را بدست می آوریم

$$\begin{cases} v(x,0)=f_1(x)=\sum (A+N(0))\sin\lambda x \Rightarrow A+N(0)=\frac{2}{a}\int_0^a f_1(x)\sin\lambda x\,dx \\ \qquad \rightarrow A=\dots \\ v(x,b)=f_2(x)=\sum (A\,ch\lambda b+B\,sh\lambda b+N(b))\,sh\lambda x \Rightarrow \dots \Rightarrow B=\dots \end{cases}$$

ص ۴۲۶ ، تست ۴۹ ، مطلب دوم   ص ۴۱۵ مثال

*مکانیک ۸۵)



۱) ✓

۲)

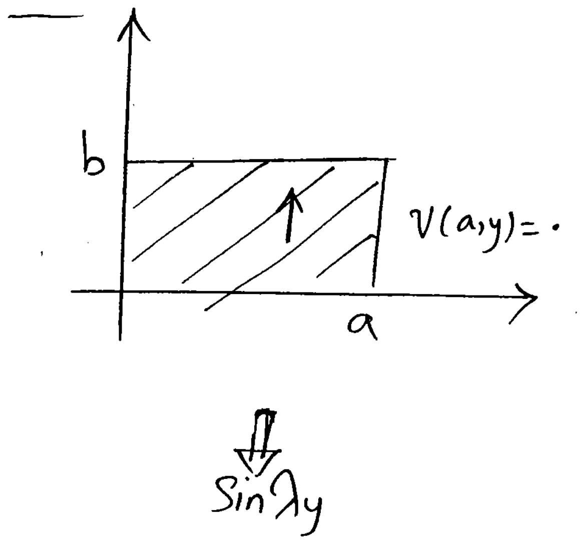
۳)

۴)

۲۲۶

ص ۴۸۶

* برق ۸۵



۱) ✗
۲) ✗
۳) ✗
۴) ✓

ملاحظه a دو طرف هم سانغ شرایط اولیه!
دقت b، a می‌توانند جابجا شوند که شرایط مرزی صفر!
چون شرایط مرزی خلاف صفر، a دو طرف خلاف صفر!

* $u(x,y)$ در ∞ همواره برابر صفر است مگر آنکه قبلاً در صورت داده شده باشد

* اگر متغیر در راستایی که نقش شرایط مرزی دارند محدود شود، برای مقادیر ویژه محدودیتی ایجاد نمی‌شود و در نتیجه $\sum$ به $\int_0^\infty$ تبدیل می‌شوند

* اگر متغیر در راستایی که نقش شرایط اولیه دارند محدود باشد بهتر است

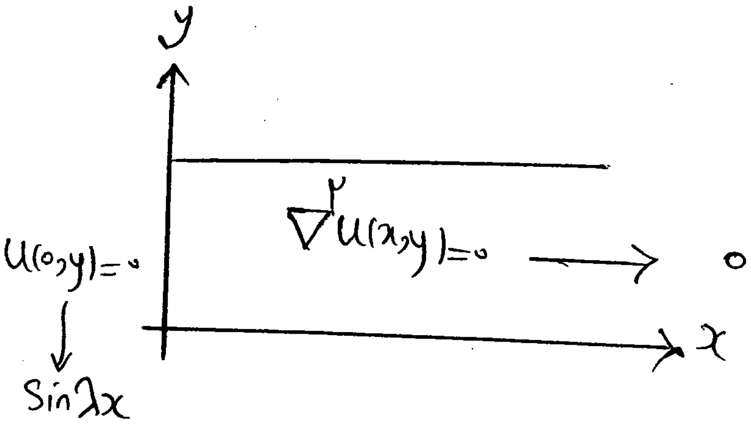
از $F(y)$ نمایی استفاده کنیم و شرط همگرایی u در ∞ باید ضریب

$e^{\lambda y}$ صفر شود در نتیجه $F(y)=e^{-\lambda y}$.

و اگر مرز در این راستا محدود باشد بهتر است از فرم هیپربولیکی جواب استفاده شود

ص ۴۸۸

* برق ۷۷)



$$u(x,y)=\int_0^{\infty} A\,ch\,\lambda y\ \sin\lambda x\,d\lambda$$

۱) ×

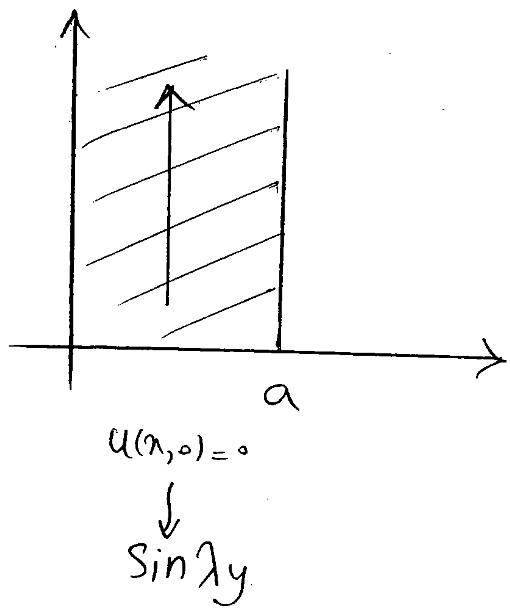
۲) ×

۳) ✓

۴) ×

$$\left[\begin{array}{l} u(x,y)=\int_0^{\infty}(A\,ch\,\lambda y+\cancel{B\,sh\,\lambda y})\sin\lambda x\,d\lambda \quad (B=0) \\ u_y(x,0)=0 \Rightarrow \int_0^{\infty} B\lambda\sin\lambda x\,d\lambda=0 \Rightarrow B=0 \end{array}\right.$$

* کامپیوتر ۸۵)



۱)

۲)

۳) ✓

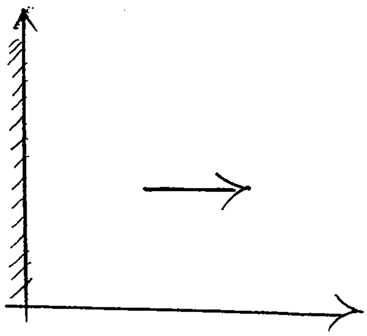
۴)

۲۲۷

ص ۴۸۹

* کامپیوتر ۸۹

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|=0 \rightarrow \cos\lambda x$$

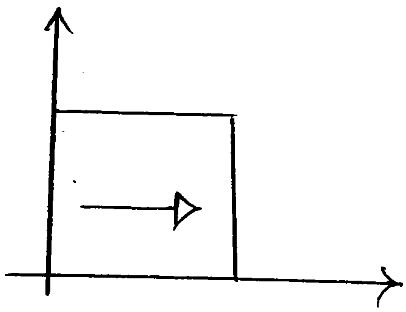


۱) ✓
۲) ✗
۳) ✗
۴) ✗

$$u(x,y)=\int_0^\infty A e^{-\lambda y}\cos\lambda x \, d\lambda$$

ص ۴۶۵ است

* برق ۹۰



$\lambda=\frac{2n\pi}{a}$ ← ۲ غ و ۱ درست!

$\uparrow$

$\lambda a=2n\pi$

$\uparrow$

$\cos\lambda a=1$

$\uparrow$

$$T=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$$

$x=0 \rightarrow \quad A+0=A\cos\lambda a+B\sin\lambda a$

یکی از شرط‌ها کردن تابع ویژه بیاید ← مقدار ویژه بدست بیاید

* چون شرایط مرزی در راستای x همگن است تابع ویژه در راستای x داریم

همگن باشد ← محدودیت داریم

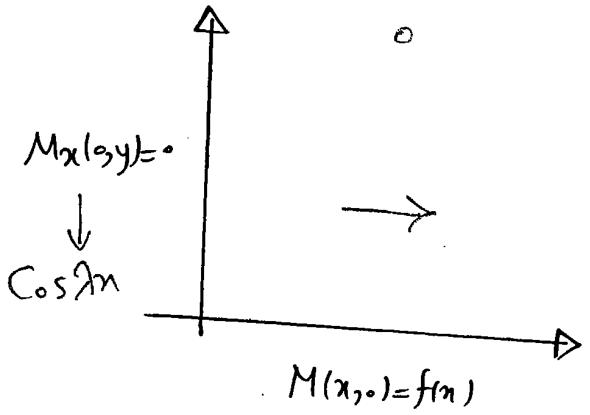
همگن نباشد ← محدودیت نداریم

* در این سؤال در جهت x محدودیت نداریم ← ۲ و ۳ غلط

تابع ویژه کلی‌ترین حالت است.

ص ۴۴۵ تست ۶۶

* کامپیوتر ۹۰)



۲) ✓

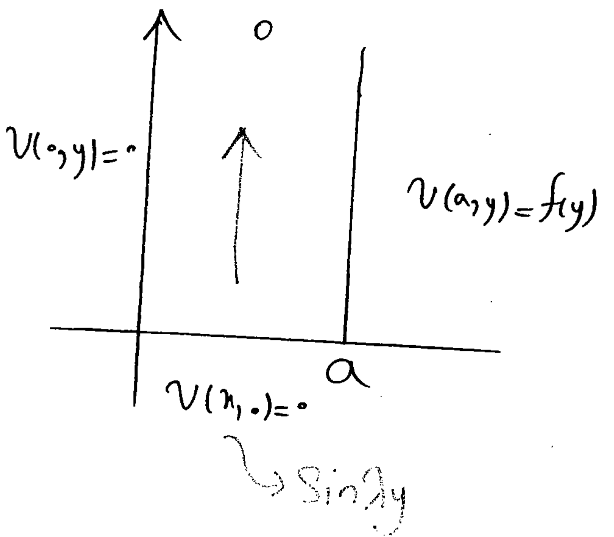
۴) ✗

۱) ✗

۳) ✗

ص ۴۴۵ تست ۶۷

* کامپیوتر ۹۱)



۲) ✗

۱) ✓

۴) ✗

۳) ✗

راه اول ① $v(x,y)=\int_0^{\infty}(A\,ch\lambda x+B\,sh\lambda x)\sin\lambda y\,d\lambda$

$v(0,y)=0 \longrightarrow A=0$

راه دوم ② از شبیه‌سازی با شکل دیده استفاده می‌کنیم

۲۲۸
ای سوم ③ حک کردن شرط $x=0$ گذرنده

ص ۴۲۵، تست ۳۶
*برق ۸۹)

۱) ✗ ← چون تابع هم زوج نداره

۲) ✗ ← چون $f(x)$ $(y=0)$ زوج است ← اما اشکال خورده!

۳) ✓✓✓

۴) ✗

پس بین ۳ و ۴ ← دقت!

در انتگرال فوریه هایپربولیک ها نمیشه ← ۴ غ ✓۳

* وقتی فرم گزینه ها فرق می‌کنه تا جایی که اونایی که فرمشون فرق داره رد یا تایید کنید

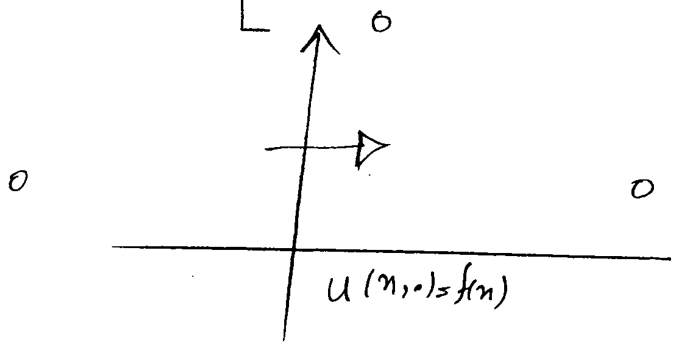
پس اینجا جای ۱ و ۲ رو باید درست کنید

گزینه ۳ و ۴ باقی فرمشون یکیه ← فقط تفاوت در ضریب!

$$v(x,y)=\int_0^\infty A e^{-ky}\cos kx\,dk \rightsquigarrow$$

$$u(x,0)=f(x)=\int_0^\infty A\cos kx\,dk \to A=\frac{2}{\pi}\int_0^1 1\cos kx\,dk$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\sin k}{k}$$



* روش کولاک شدنی

راستشو نقش شرایط مرزی

$$u(x,y)=\int_0^{\infty}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)e^{-\lambda y}d\lambda$$

! فقط A داریم ← $B=0$ ← $f(x)$ زوج

ص ۴۲۷، س ۷۶

* برق ۸۶

$$u(0,y)=u(a,y)=0 \quad \sin\lambda x \quad \lambda=\frac{n\pi}{a}$$

۱) ✓ ۲) × تعداد جملات کم محدود

۳) × تعداد جملات نامحدود ۴) ×

بین ۲ و ۴ ← ۲ از فرمش غلط

اگه λx ← باید $\sinh\lambda y$ داشته باشیم، ولی توی ۴) $\sinh \frac{\pi y}{2a}$ است، پس غ

* برق ۹۱ ص ۴۳۶، س ۳۹

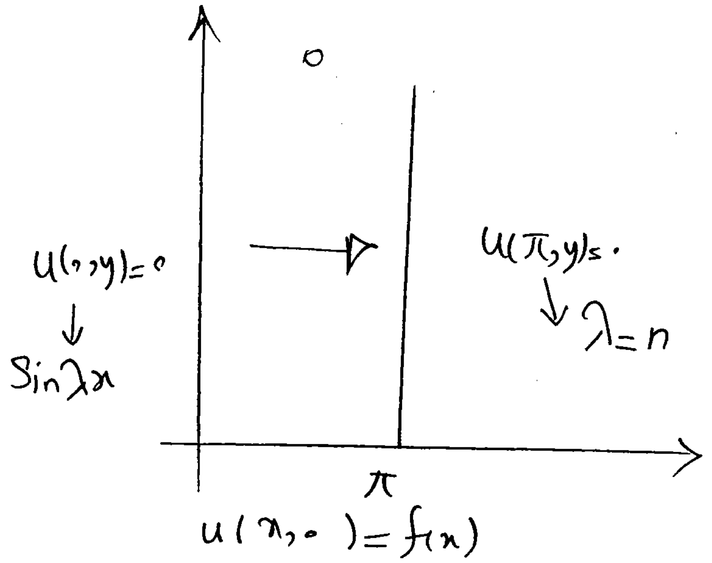
۱) × $\sin \pi x$ داریم باید e^{y} باشه

۲) × $\sin \pi x \to e^{y}$

۳) ✓

۴) × $\sin \pi x \to$ باید e^{-2y}

چون تعداد جملات محدود
اولا یا ۲ و ۴ چون غلط حذف
از فرمش غلط ← حذف ۲ و ۴
۳ ← درست



$$u(x,0)=\sin 2x-\sin 4x$$

$$u(x,y)=\sum A e^{-\lambda y}\sin \lambda x$$

$$u(x,y)=\underset{1}{\cancel{A_2}}\, e^{-2y}\sin 2x+\underset{-1}{\cancel{A_4}}\, e^{-4y}\sin 4x$$

Second Section

* معادله لاپلاس در مختصات قطبی

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} F(r)\times($$ ترکیب دوتره

$$F(r)=A r^{+\lambda}+B r^{-\lambda}$$

$$A\cos\lambda\theta+B\sin\lambda\theta$$

① مرز دایره‌ای کامل :

تابع دوره‌ای $= A\cos\lambda\theta + B\sin\lambda\theta \rightarrow \boxed{\lambda = n}$

الف) داخل دایره $(r<a)$

شرط همگرایی در مرکز دایره $\rightarrow B=0 \rightarrow u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A\cos n\theta + B\sin n\theta)$

$$u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A\cos n\theta + B\sin n\theta)$$

ب) خارج دایره $(r \geq a)$

شرط همگرایی در $r=\infty$ $\rightarrow A=0 \sim F(r) = r^{-\lambda}$

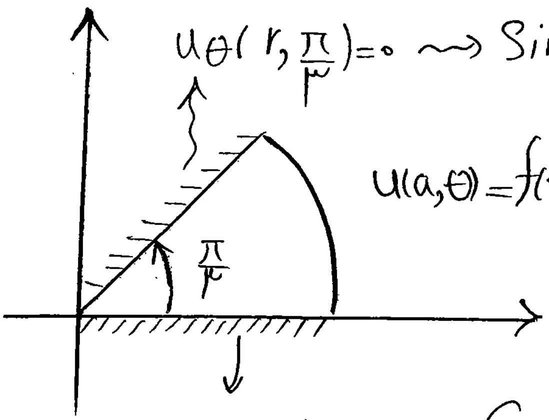
$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} (A\cos n\theta + B\sin n\theta)$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A\cos n\theta + B\sin n\theta)$$

با اعمال شرط $u(a,\theta) = f(\theta)$ ، ضرایب مجهول از بسط فوریه $f(\theta)$ بدست می‌آیند.

۲) ناحیه قسمتی از دایره که باشد:

$u_\theta(r,\frac{\pi}{3})=0 \rightsquigarrow \sin\lambda\frac{\pi}{3}=0 \to \frac{\lambda\pi}{3}=n\pi \Rightarrow \lambda=3n$



$u(a,\theta)=f(\theta)$

$\theta_\theta(r,0)=0 \rightsquigarrow \cos\lambda\theta$

شرط همگرایی در $r=0$ $\Rightarrow B=0 \to F(r)=r^\lambda$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} A r^\lambda \cos\lambda\theta, \quad \lambda=3n$$

* برق ۸۸ (ص ۴۹۸ حل‌المسائل

عایق‌بندی
$\downarrow$
$u_\theta(r,0)=0$
$\downarrow$
$\cos\lambda\theta$

$T(r,\pi)=0$
$\downarrow$
$\cos\lambda\pi=0$

$\lambda\pi=(2n-1)\frac{\pi}{2}$

۱)
۲)
۳)
۴)

چرا ۴ را انتخاب نکردیم؟ چون λ منفی نمی‌تونه باشه!

۴: اصلاً ← λ منفی ← پس غ است!

ص ۴۹۸

سری ۷۲)

$$u(1,\theta)=\begin{cases}0 & 0<\theta<\pi\\ 1 & \pi<\theta<2\pi\end{cases}$$

۱) ✓   ۲) ✗

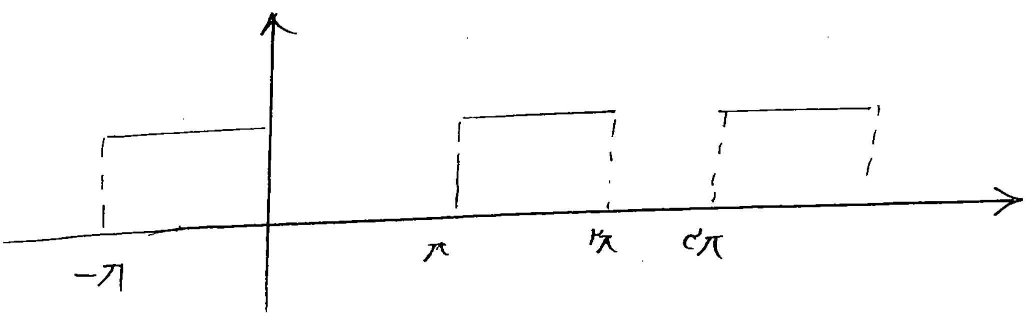
۳) ✗   ۴) ✗

۲، ۳، ۴ چرا غ؟

۳، ۴ چون n طاق دارد ← حذف

چون تابع در π ناپیوسته ← سری همگرا $\frac{c}{n}$

۲ چرا حذف؟ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ پس a_n نمی‌تواند ۱ باشد ← ۲ هم غ



a_n قطعاً صفر است!

۲۳۱

صص ۴۲۹، تست ۲۲ ـ حلبندم

* برق ۸۲

فرض درست
۱۲ ×
۱۴ ✓✓

فرض غلط
۱۱ ×
۱۳ ×

فرض درست ← λ ها باید ۲=λ باشند ← ۱=λ غ

$\frac{r^4}{16}\sin 2\phi$ (۵

فرض غلط

r^2 باید باشد ← ۲ غ

بین ۲ و ۴ ← ۲ غ

$u(r,0)=0 \rightarrow \sin\lambda\theta$

$$\sum r^{\lambda}\sin\lambda\theta$$

$$u(r,\theta)=\underset{\frac{1}{4}}{\cancel{A_1}}\, r^2\sin 2\theta \qquad 4A_1=1,\quad A_1=\frac{1}{4}$$

اگر در معادلهٔ لاپلاس تغییرات u به θ بستگی نداشته باشد یعنی ($u_{\theta\theta}=0$) معادله لاپلاس به معادله کشی اویلر تبدیل می‌شود $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r=0$ و جواب عمومی آن بصورت $u=\ln r+B$ است.

$D^2-D+D=0 \rightarrow D=0$ ریشه مضاعف

$$u=A\cancel{z}+B$$
$\ln r$

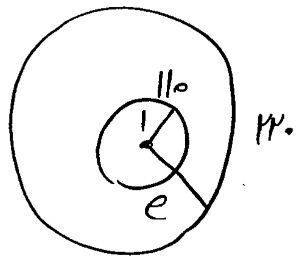
دایره کامل → ۲) اگر مقدار u روی مرز دایره ثابت باشد

قسمتی از دایره → مقدار u روی کمان های دایره ثابت و روی شعاع ها عایق بندی شده باشد

⟸ تغییرات u به θ بستگی ندارد

* مطابق ۷۰) ص ۵۰۰

تغییرات u به θ بستگی ندارد



$u = A\ln r + B$

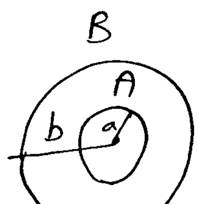
۱) ✓

۲) ✗ ترم غلط

۳) ✗ ترم غلط

۴)

* برق ۸۴) ص ۴۲۰ ۲۴



$u = c\ln r + D$

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✓

۴) ✗

۳۳۲

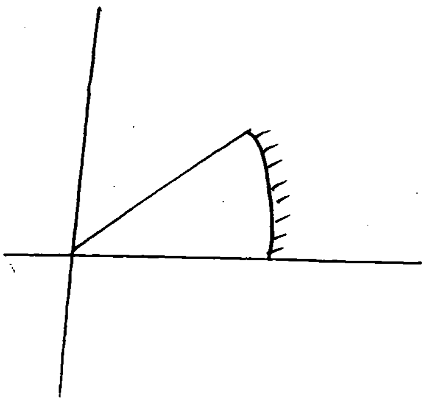
* اگر در معادله لاپلاس تغییرات u به r بستگی نداشته باشد یعنی u_r و u_{rr} صفر باشد معادله لاپلاس به معادله $u_{\theta\theta}=0$ تبدیل می‌شود و جواب عمومی آن $u=A\theta+B$ است.

* ناحیه
  - شعاع محدود ← روی شعاع‌ها مقدار u ثابت باشد / روی مرز $r=a$ عایق‌بندی شده باشد
  - شعاع نامحدود ← روی شعاع‌ها مقدار u ثابت باشد

← تغییرات u به r بستگی ندارد

ص ۵۰۳

* هسته‌ای ۸۳)



$u=A\theta+B$

۱) ×
۲) ✓
۳) ×
۴) ×

ص ۴۲۲ تست ۴

* برق ۷۱)

$u=A\theta+B=A\,tg^{-1}(\frac{y}{x})+B$

۱,۲ ← حکم ترین شرایط

$\theta=0 \to T_0$

$\theta=\frac{\pi}{2} \to 0$

$\frac{\pi}{2} \to$ ع

$\theta=0 \to T_0$

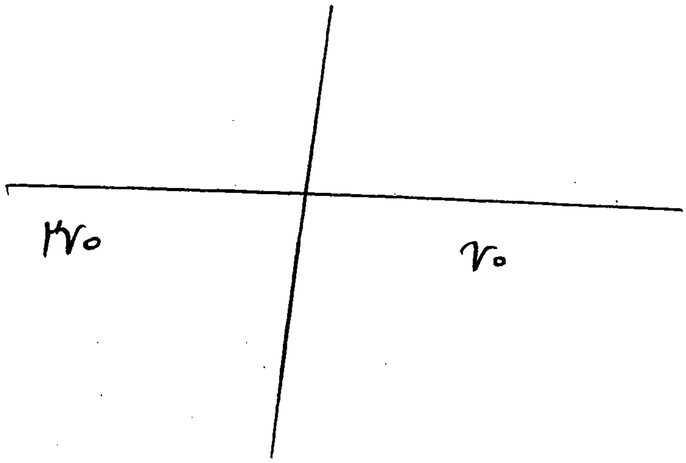
$\theta=0 \to T_0$

$\frac{\pi}{2} \to 0$

۱) ×
۲) ✓
۳) ×
۴) ×

ص ۴۲۶ ، تست ۳۰

* برق ۹۱)



۴) ✓ ۳) ۲) ۱)

بجای θها محدوده مقدار r هم ثابت است
در محدوده تغییرات θ به r بستگی ندارد $\Leftarrow$

$$r = A\theta + B$$

$$\theta = 0 \rightarrow B = r_0$$

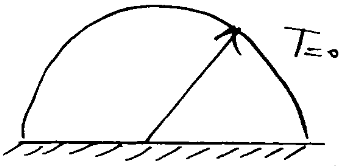
$$\theta = \pi \rightarrow 2r_0 = A\pi + r_0 \rightarrow A = \frac{r_0}{\pi}$$

$$r = \frac{r_0}{\pi}\theta + r_0 \rightarrow \Delta r = \frac{r_0}{\pi}\Delta\theta = \frac{r_0}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{r_0}{12}$$

* مقدار $u(r,\theta)$ در $r=0$ همواره برابر است با مقدار متوسط $f(\theta)$

$$\left(u(a,\theta) = f(\theta)\right)$$

* برق ۸۳) ص ۴۲۹ ، تست ۲۳



۴) $\frac{3T_0}{4}$ ✓ ۳) ۲) ۱)

$$T = \frac{\int_0^{\pi} f(\theta)\,d\theta}{\pi} = \frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} T_0\,d\theta}{\pi} = \frac{3}{4}T_0$$

ص ۴۴۱، تست ۵۵

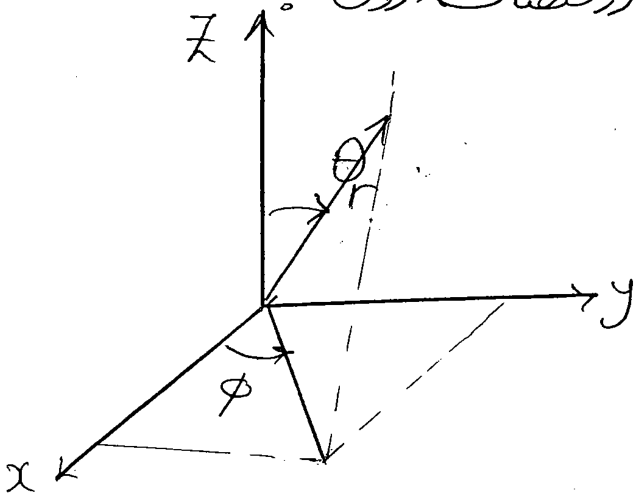
* مکانیک ۱۹

۱)　　۲)　　۳)　　۴) ✓

$$u = \frac{\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi}{2\pi} = \frac{\int_0^{\pi} (-\pi \sin\phi)\,d\phi + \int_{\pi}^{2\pi} \pi \cos\phi\,d\phi}{2\pi}$$

$$= \frac{\pi \cos\phi \Big|_0^{\pi} + 0}{2\pi} = -1$$

* معادله لاپلاس در مختصات کروی :



با فرض تقارن نسبت به ϕ یعنی $u_{\phi\phi}=0$ جواب معادله لاپلاس در فضای کروی مطابق زیر است :

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F(r) \times \text{تابع زاویه}$$

$F(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}$　　　$P_n(\cos\theta)$ ← مقدار ویژه

الف) خارج کره $(r \geq a)$

شرط همگرایی در $r=\infty$ $\Rightarrow A=0 \rightarrow F(r)=Br^{-(n+1)}$

$$U(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} B r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

ب) داخل کره $(r \leq a)$

شرط همگرایی در $r=0$ $\Rightarrow B=0 \rightarrow F(r)=Ar^{n}$

$$U(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} A r^{n} P_n(\cos\theta)$$

* با اعمال شرط $U(a,\theta)=f(\theta)$ ضرایب مجهول از بسط ترالفر $f(\theta)$ بدست می‌آیند

* فرمول رودریگس

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$$

حفظ

** $$\begin{cases} P_0(x)=1 \longrightarrow P_0(\cos\theta)=1 \\ P_1(x)=x \longrightarrow P_1(\cos\theta)=\cos\theta \\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \longrightarrow P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1) \\ \vdots \end{cases}$$

۲ تعامد جواب‌های معادله لژاندر

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & , m\neq n\\[4pt] \dfrac{2}{2n+1} & , m=n\end{cases}$$

$$\|P_n(x)\|^2=\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}$$

۳ $f(x)$ را می‌توان برحسب جواب‌های معادله لژاندر مطابق زیر بسط داد:

$$\begin{cases} f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)\\[6pt] a_n=\dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx\end{cases}$$

* مثال: بسط لژاندر تابع $F(x)=5x+7$ ، $-1<x<1$ را بدست آورید.

$$f(x)=5P_1(x)+7P_0(x)$$

* مثال) در بسط لژاندر تابع $f(x)=\begin{cases}e^x & , 0<x<1\\ 0 & , -1<x<0\end{cases}$ ضریب $P_1(x)$ را بدست آورید.

$$a_1=\frac{3}{2}\int_0^1 e^x P_1(x)\,dx=\frac{3}{2}\int_0^1 xe^x\,dx=\frac{3}{2}(xe^x-e^x)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$$

ص ۴۲۸، س ۱۷

* برق ۸۹

$$u(r,\theta)=\sum A\, r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

۱) ✗

۲) ✗

۳) ✗

۴) ✓✓

$$\begin{cases} v_0 P_0(\cos\theta) - v_0 P_1(\cos\theta) \\ v = A_0 r^{-1} + A_1 r^{-2} \cos\theta \end{cases} \Rightarrow A_0 a^{-1} + A_1 a^{-2}\cos\theta = v_0 - v_0\cos\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = a v_0 \\ A_1 = -a^2 v_0 \end{cases}$$

ص ۴۴۱، س ۵۶

* کامپیوتر ۷۸

$$u(1,\theta)=1+1+\cos\theta=2+\cos\theta$$

۱) ✓✓

۲) ✗

۳) ✗

۴) ✗

۴) غلط

ضریب باید r باشد نه r^2 !

۲۳۵

$$u = A_0 + A_1 r\cos\theta$$

$$r=1 \Longrightarrow A_0 + A_1\cos\theta = 2 + \cos\theta$$

$$\begin{cases} A_0 = 2 \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

ص ۴۲۱ تست ۲۹

* برق ۸۶)

۱) ✗

۲) ✗ رفتار جمله باید مثل ... باشد در بی‌نهایت

۳) ✗

۴) ✓

جمله دوم ٥ رفتارش $r\cos\theta$ ✓

جمله دوم ٥ هم رفتار $r\cos\theta$ ✓

بین ۳ و ۴ ← ۱ ام غلط!

$n=1$ ← توانه حتماً باید ۲ ام باشد!

* حل برخی معادلات مشتقات جزئی

* حل دالامبر معادله موج

① مسئله نامحدود :

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

(*)
حفظ

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct) \right) + \frac{1}{2c}\left(G(x+ct) - G(x-ct) \right)$$

$$\boxed{G(x) = \int g(x)\,dx}$$

* مثال: مقدار $u(x,t)$ را برای معادله موج که شرایط داده شده بدست آورید.

$$\rightarrow c^2 = 4 \rightarrow c = 2$$

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u(x,0) = e^x \\ u_t(x,0) = \cos x \rightarrow G(x) = \sin x \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{x+2t} + e^{x-2t} \right) + \frac{1}{4}\left(\sin(x+2t) - \sin(x-2t) \right)$$

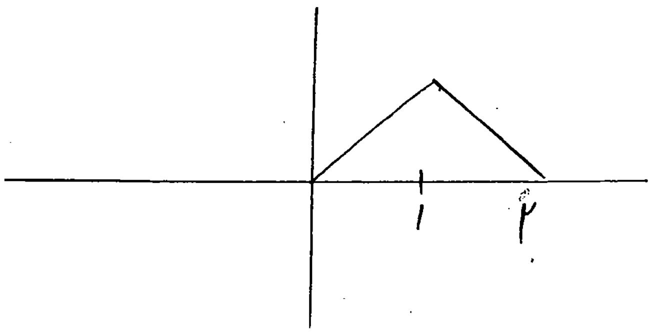
* مسئله نیمه محدود :

الف)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad x>0, t>0 \\ u(0,t) = p(t) \\ u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$u(x,t)=\begin{cases} (*) & , x>ct \\ \frac{1}{2}\left(f(x+ct)-f(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\left(G(x+ct)-G(ct-x)\right)+p\left(t-\frac{x}{c}\right) & , x<ct \end{cases}$$

غلط



$f(-\frac{1}{2})$

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} & , x>0, t>0 \\ u_x(0,t)=q(t) \\ u(x,0)=f(x), \; u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

$$u(x,t)=\begin{cases} (*) & , x>ct \\ \frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\left(G(x+ct)+G(ct-x)-c\int^{t-\frac{x}{c}} q(\lambda)\,d\lambda\right) & , x<ct \end{cases}$$

غلط

صحیح است

(* جواب u

۱۴ ×　　　۱۳ ✓　　　۱۲ ×　　　۱۱ ×

باید $x>at$ باشد ← ۲ غ

وقتی مسئله محدود داریم باید دو ضابطه داشته باشیم $x>ct$ ← پس تک ضابطه‌ای غ

۲۳۷

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & , x>at\\ \mu(t-\frac{x}{a}) & , x<at\end{cases}$$

* جزوه ۷۷) ص ۵۳۵ تست ۴

۱) ✗ ۲) ✗ ۳) ✗ ۴) ✓

۱و۲و۳ یک ضابطه‌ای ← غ

$$W(x,t)=\begin{cases}0 & , x>t\\ -\int_0^{t-x}\cos b\lambda\, d\lambda & , x<t\end{cases}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{b}\sin b(t-x)$$

* مثال) برای معادله‌ی موج داده شده جواب دالامبر را بنویسید.

$$\begin{cases}u_{tt}=9u_{xx} & , x>0, t>0\\ u(0,t)=0\\ u(x,0)=e^{-x} & , u_t(x,0)=0\end{cases}$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(e^{-(x+ct)}+e^{-(x-ct)}\right) & , x>3t\\ \frac{1}{2}\left(e^{-(x+3t)}-e^{-(3t-x)}\right) & , x<3t\end{cases}$$

② میله‌ی محدود :

الف) اگر شرایط مرزی بصورت $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(h,t)=0 \end{cases}$ باشند توابع f و g

نسبت به صفر و h به صورت فرد بسط داده می‌شوند.

اگر شرایط مرزی به صورت $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(h,t)=0 \end{cases}$ باشند توابع f و g نسبت

به صفر و h به صورت زوج بسط داده می‌شوند.

ب) اگر شرایط مرزی بصورت $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(h,t)=0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(h,t)=0 \end{cases}$ باشند

دوره تناوب بسط توابع $T=2h$ است.

اگر شرایط مرزی بصورت $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u(h,t)=0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_x(h,t)=0 \end{cases}$ باشند

دوره تناوب بسط توابع $T=4h$ است.

ج)

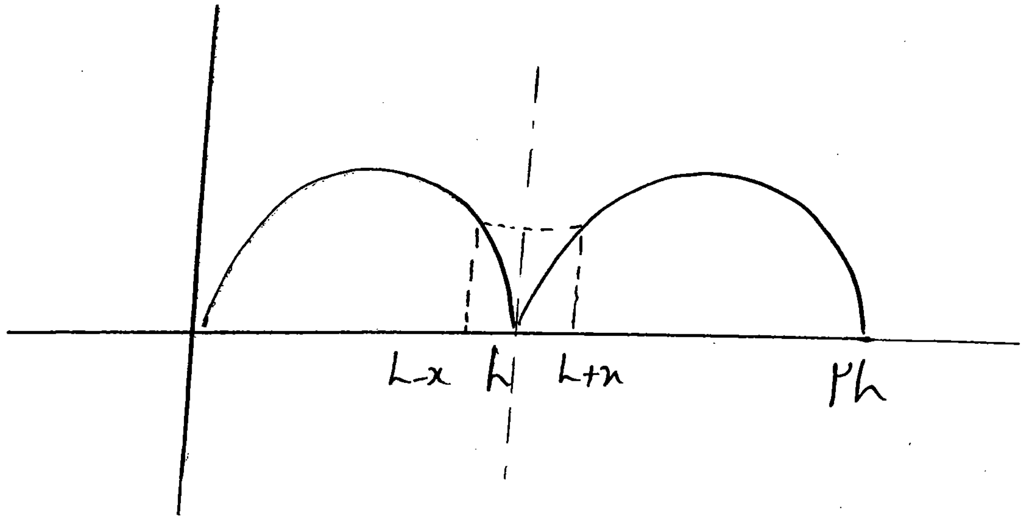
$f(x)$ زوج $\rightarrow f(+x)=f(-x)$

$f(x)$ فرد $\rightarrow f(x)=-f(-x)$

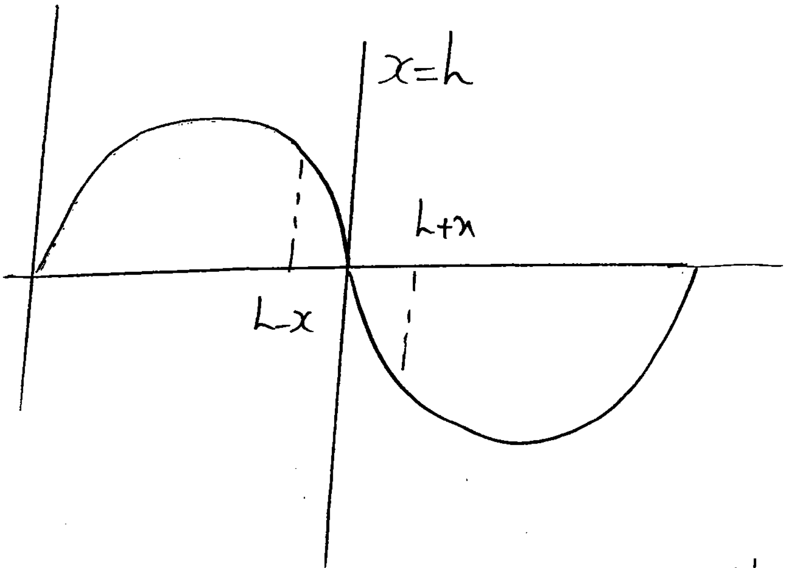
$f(x)$ نسبت به $x=h$ زوج $\rightarrow f(h+x)=f(h-x)$

$f(x)$ نسبت به $x=h$ فرد $\rightarrow f(h+x)=-f(h-x)$

زوج



فرد



تخمین دامنه

گوشه دارند ← دامنه هم‌شون فرق داره

اگر همه مقادیر n در یک نقطه بخواهند ← همشون دامنه

عموماً صفحه‌ی محدود ← طراح سوال نمی‌خواد خطا بده! چون اگه خطا بده باید توضیح

بده ← پس همیشه نقطه بده ←

* برای محاسبه‌ی مقدار $u(x,t)$ در یک نقطه مشخص که استفاده از روش دالامبر مطابق زیر عمل می‌کنیم :

① با استفاده از رابطه‌ی (*) جواب $u(x,t)$ را برحسب فرم کلی توابع F و G می‌نویسیم

② مقادیر x و t مشخص شده را در عبارت بدست آمده در قسمت ① قرار می‌دهیم

③ با حذف دوره‌ی تناوب از ورودی توابع F و G و استفاده از شرط مرزی و زوج توابع F و G، ورودی توابع F و G را به بازه‌ی تعریف توابع یعنی $[0,L]$ تبدیل می‌کنیم

④ پس از انجام مرحله ③، می‌توانیم از ضابطه‌های F و G داده شده در صورت سؤال استفاده کنیم و مقدار u را در نقطه داده شده بدست آوریم.

صـ ۵۴۴ مثال ۲

* مثال (۷۱

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0 \;,\; u_t(x,0)=x(1-x) \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \\ u_x(0,t)=u(1,t)=0 \quad t=0 \end{cases}$$

$G(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$

۱) ۲) ۳) ۴) $\frac{1}{8}$ ✓

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\Big(G(x+t)-G(x-t)\Big)$$

$$u\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\Big(G(1)-G(-\frac{1}{2})\Big)=\frac{1}{2}\Big(G(1)+G(\frac{1}{2})\Big)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{8}$$

$$u\left(6,\frac{1}{4}\right)\to u\left(6,\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\Big(G(\cancel{6}+\frac{1}{4})-G(\cancel{6}-\frac{1}{4})\Big)$$

$h=1 \Rightarrow 2L$ طول دوره تناوب

$\cancel{6} \leftarrow$ مضارب دوره تناوب حذف!

$$\frac{1}{2}\Big(G(\frac{9}{4})-G(\frac{7}{4})\Big)=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{G(-\frac{7}{4})}_{-G(\frac{7}{4})}-G(\frac{7}{4})\Big)=-G(\frac{7}{4})$$

$\frac{9}{4}-4=-\frac{7}{4}$

$\frac{9}{4}$ از $(-2,2)$ خارج ← با ۲L کم کردن منتقل می‌شود به $(-2,2)$

$-\frac{7}{4}$ خارج است ← منتقل می‌کنیم

نسبت به مبدا و نسبت به G فرد $G(-\frac{7}{4})=-G(\frac{7}{4})$

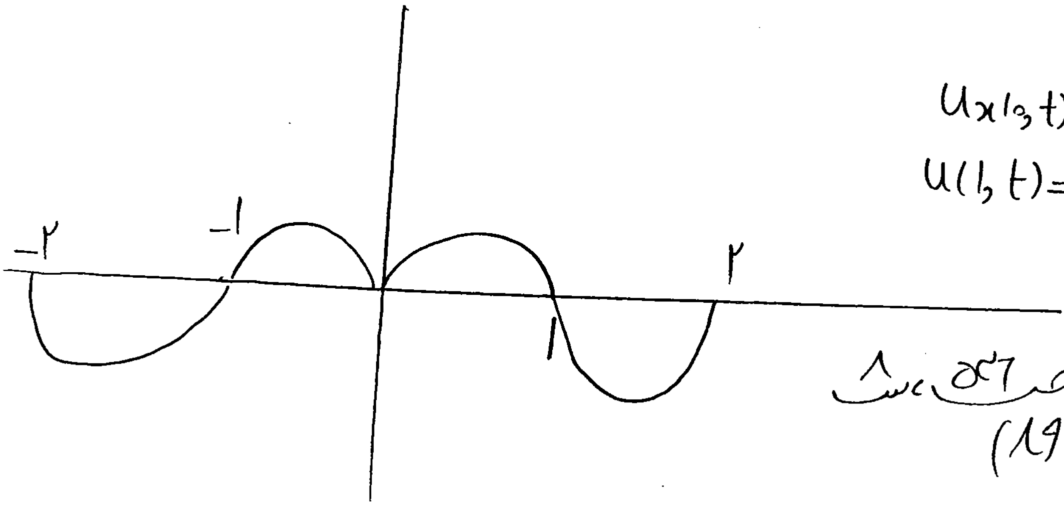
$G(\frac{7}{4})$ بین ۰ تا ۱ نیست اما از ۲ کمتر ← به صورت L به اضافه می‌نویسیم ($h=1$)

و نسبت به L زوج G ثابت است

$$-G(\frac{7}{4})=-G(1+\frac{3}{4})=-G(1-\frac{3}{4})=-G(\frac{1}{4})$$

$$=-\left(\frac{1}{2\times16}-\frac{1}{3\times64}\right)=-\dots$$

$G(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3},\quad 0\le x\le1$



$u_x(1,t)=0$

$u(1,t)=0$

ص ۵۴۶، ش

* مطلب ۱۹)

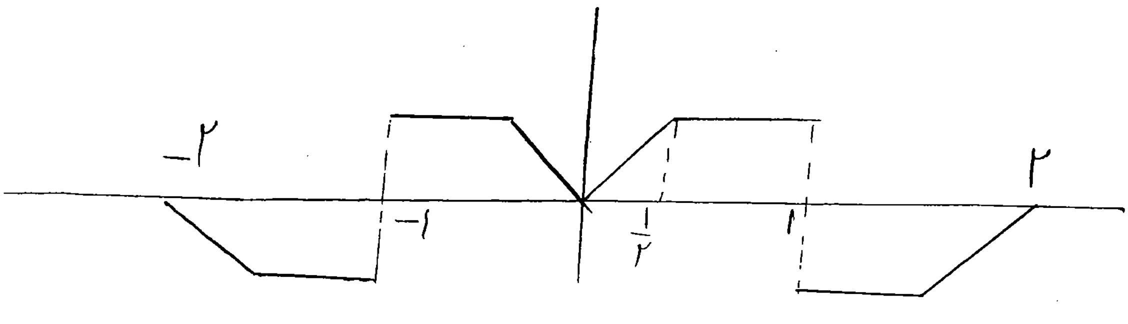
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)$$

$$u_t(x,t)=\frac{1}{2}\big(f'(x+t)-f'(x-t)\big)$$

$$u_t(5,\tfrac{1}{3})=\frac{1}{2}\big(f'(\tfrac{1}{3}+\underset{1}{\cancel{5}})-f'(\tfrac{1}{3}-\underset{1}{\cancel{5}})\big)$$

۱) 0 ✓ ۲) ۳) ۴)

$$u_t(5,\tfrac{1}{3})=\frac{1}{2}\big(f'(1-\tfrac{1}{3})-f'(-\tfrac{2}{3})\big)=\frac{1}{2}\big(f'(\tfrac{2}{3})+f'(\tfrac{2}{3})\big)=f'(\tfrac{2}{3})=0$$



۲۱۴

مکانیک ۸۴) صفحه ۵ ، ۷ $h=0 \xrightarrow{\text{بی‌نهایت}} f(n)$

۱) ✓ $f(n)$ $h\to 0$

۲) ✗ $2f(n)$

۳) ✗ $2f(n)$

۴) ✗ اصلاً $f(x)$ عوض شد!

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{f(x+t)+f(x-t)\right\}+\frac{1}{2}\left\{G(x+t)-G(x-t)\right\}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{f(x+h)+f(x-h)\right\}+\frac{1}{2}\left\{G(x+h)-G(x-h)\right\}=f(x+h)$$

$$f(x+h)=f(x+h-2h)=f(x-h)$$

$$G(x+h)=G(x+h-2h)=G(x-h)$$

* معادلات مرتبه اول :

فرم کلی معادلات مرتبه اول شبه خطی بصورت زیر است

$$p(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=r(x,y,z)$$

برای حل معادله دستگاه لاگرانژ را تشکیل میدهیم:

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q}=\frac{dz}{r}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\phi_1(x,y,z)=c_1 \leadsto u\\ \phi_2(x,y,z)=c_2 \leadsto v\end{cases}$$

$$\begin{cases}u=\phi(v)\\ v=\phi(u)\\ \phi(u,v)=0\end{cases}$$

جواب عمومی را به صورت یکی از فرم های مقابل میتوان نوشت

ص ۴۹۴ س ۵

* مسأله ۸۳)

مسئله ۱)

۲)

۴)

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x}$$

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{x} \Rightarrow x\,dx - z\,dz = 0$$

$$x^2 - z^2 = c_1 = u$$

$$\frac{dx+dz}{z+x}=\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln(z+x)=\ln y + \ln c_2$$

$$\boxed{\frac{x+z}{y}=c_2=v}$$

مکانیک ۸۵) ص ۴۹۷ س ۱۳

از ساده‌ترین عبارت در گزینه دیفرانسیل می‌گیریم

$$x+y+z=c_1 \rightarrow dx+dy+dz=0$$

۱) ✓ ×

۲) × ×

$$xy+yz+zx=c_1 \rightarrow x\,dx+y\,dy+z\,dz=0 \rightarrow x^2z^2-x^2y^2+y^2x^2-y^2z^2+z^2y^2-z^2x^2=0$$

۳) × ✓ — در گزینه ۳ $x^2+y^2+z^2$ ندارد حذف ۳ و حذف ۴) ×

۱۴ تست ادامه ۴۰ ← اساکه شد

$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$

$\rightsquigarrow xyz(x^2-y^2) \rightsquigarrow xyz(x^2-z^2)+xyz(y^2-x^2)=$

۱ درست است!

* معادلات مرتبه اول با ضرایب ثابت :

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=r(x,y) \rightsquigarrow z=z_h+z_p$$

$$Dz=\frac{\partial z}{\partial x},\quad D'z=\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0 \rightarrow \begin{cases} z_h=e^{-\frac{c}{a}x}\phi(ay-bx), & a\neq 0 \\ z_h=e^{-\frac{c}{b}y}\phi(ay-bx), & b\neq 0 \end{cases}$$

صفحه ۴۹۴ تست ۳

*مکانیک ۸۲)

$$u_h=e^{-\frac{c}{a}x}\phi(ay-bx)$$

$$u_x+2u_y-u=0$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases} \rightarrow u=e^{x}\phi(y-2x)$$

۱) ✓ ۲)

۳) ۴)

$y = c_1 x + x^2 \rightarrow y = x + x^2$

$x + 0 = x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{x}$$

* کنکور ۷۵)

۲) ✓

۴)

۱)

۳)

$$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases} \rightarrow u_x = \phi(y-2x)$$

* معادلات مرتبه دوم :

فرم کلی معادلات مرتبه دوم خطی مطابق زیر است

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{xy} + D(x,y)u_x$$
$$+ E(x,y)u_y + F(x,y)u = R(x,y)$$

- تشخیص نوع معادله :

$$\Delta = B^2 - 4AC \begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow \text{از نوع هذلولی گون} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{از نوع بیضی گون} \\ \Delta = 0 \rightarrow \text{از نوع سهمی گون} \end{cases}$$

* کامپیوتر ۸۳) ص ۵۱۵ س ۴

۱)

۲)

۳) ✓

۴)

$\Delta = 0 - 4xy$

* برق ۸۵) ص ۵۱۷ س ۱۱

$$\Delta = 4(y+1)^2 + 4(x^2-1) = \underset{>0}{4y^2} + \underset{>0}{8y} + \underset{>0}{4x^2} > 0$$

۱)

۲)

۳) ✓ هذلولوی گون

۴)

* مکانیک ۸۹) کدام عبارت در مورد معادله

$$(2xy-1)u_{xx} + (x+2y)u_{xy} + u_{yy} + x^2 u_x + y^2 u_y = 1$$

درست است؟

۱)　　۲)　　۳) ✓ هذلولوی گون　　۴)

$$\Delta = (x+2y)^2 - 4(2xy-1) = x^2 + 4y^2 + \underbrace{4xy - 8xy}_{-4xy} + 4$$

$$= (x-2y)^2 + 4 > 0$$

* تبدیل به فرم کانونی : برای تبدیل به فرم کانونی مطابق زیر عمل می‌کنیم

① معادله شاخصی را تشکیل می‌دهیم $Ar^2 - Br + C = 0$

② ریشه‌های معادله شاخصی را بدست می‌آوریم (r_1, r_2)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = r_1 \rightarrow \phi_1(x,y) = C_1 = r \\ \dfrac{dy}{dx} = r_2 \rightarrow \phi_2(x,y) = C_2 = S \end{cases}$$

با تغییر متغیر r به S معادله به فرم کانونی (استاندارد) تبدیل می‌شود

* معرفی فرم های کانونی

الف) فرم کانونی معادله هذلولی گون

$$U_{rs} = f(U_r, U_s, U, r, s)$$

ب) فرم کانونی معادله‌ی بیضی‌گون

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{r+s}{2} \\ \beta = \dfrac{r-s}{2i} \end{cases} \Rightarrow U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = f(U_\alpha, U_\beta, U, \alpha, \beta)$$

ج) فرم کانونی معادله سهمی گون

$$\frac{dy}{dx} = r_1 \rightarrow \phi_1(x,y) = c_1 = r$$

$S =$ دلخواه

$$u_{ss} = f(u_r, v_s, u, r, s)$$

ص ۵۱۶ س ۲

* همتای ۸۳)

* با کدام تغییر متغیر معادله داده شده به فرم کانونی تبدیل می‌شود؟

۱) ✓ $c_1 \rightarrow r$, $c_2 \rightarrow s$

۲) $c_1 \rightarrow r$, $c_2 \rightarrow s$

۳) $c_1 \rightarrow r$, $c_2 \rightarrow s$

۴) $c_1 \rightarrow r$, $c_2 \rightarrow s$

$$r^2 - 2r + \cos x = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \mp \sqrt{1-\cos x} \rightarrow y = x \mp \int\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx + c$$

$$y = x \mp 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + C$$

$$y - x + 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_1 = r$$

$$y - x - 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_2 = s$$

صفحه ۶۷۱ ، تست ۳

برق ۸۸

$u_{xx}-u_{yy}=0$

$\Delta=0+4>0 \to$ هذلولی گون

۱)

۲)

۳)

۴) ✓

$r^2-1=0 \to r=\pm 1 \to \frac{dy}{dx}=\pm 1 \to y=\pm x+c$

$$\to \begin{cases} y-x=c_1=r \\ y-x=c_2=s \end{cases}$$

* هوا فضا ۸۹)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

۱)

۲) ✓

۳)

۴)

$\Delta=0+4x^2>0 \to$ هذلولی گون

* حل معادله مرتبه دوم :

① معادله فقط شامل یک جمله دیفرانسیلی باشد، در این حالت با انتگرال گیری از طرفین معادله، جواب عمومی معادله بدست می آید، با این توجه که نسبت به هر متغیر انتگرال می گیریم، مقدار ثابت را تابعی برحسب متغیر دوم در نظر می گیریم

ص ۵۴۰، س ۲۹

برق ۸۲)

فرض غلط ← چون x^2 هست باید x^2 کنیم!

۱) ×

$y=0 \to x^2$ ✓
$x=1 \to \pm\cos y - 1$ × ← باید شامل $\cos y$ باشد
$y=0 \to x^2$ ✓

۲) ×

۳) × فرض غلط ← $x\cos y$ داره

۴) ✓

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}x^2y^2+f_1(x) \to \boxed{u(x,y)=\frac{1}{6}x^3y^2+F(x)+g(y)}$$

۴) جواب عمومی

بین ۲ و ۴ ← حکم کردن شرایط ↑

② اگر در یک معادله دیفرانسیل، مشتق فقط نسبت به یک متغیر وجود داشته باشد، متغیر دوم را ثابت فرض کرده و مانند یک معادله دیفرانسیل معمولی جواب عمومی معادله را بدست می‌آوریم. با این توجه که به جای پارامترهای ثابت، توابعی برحسب متغیر دوم درنظر بگیریم.

ص ۴۹۶، س ۱۵

* برق ۸۵)

۱) ✓

۲) ×

۳) ×

۴) ×

$$\frac{\partial u}{\partial y}+u\,\underbrace{tgx}_{a}=\underbrace{y\,tgx}_{a}$$

$$y'+p(x)y=q(x) \to y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\right]$$

$$\begin{cases} u = e^{-ay}\left(ye^{ay} - \frac{1}{a}e^{ay} + f(x)\right) \\ u = y - \cot g\, x + f(x)e^{-y\,tg\,x} \end{cases}$$

③ روش جداسازی متغیرها :

فرم کلی معادلات مرتبه دوم که به روش جداسازی متغیر قابل حل هستند مطابق زیر است :

$$A(x)u_{xx} + C(y)u_{yy} + D(x)u_x + E(y)u_y + (F(x) + G(y))u =$$

$$u = XY$$

$$\begin{cases} AX'' + DX' + FX = \lambda X \Rightarrow X = \dots \\ CY'' + EY' + GY = -\lambda Y \Rightarrow Y = \dots \end{cases}$$

* مکاتب ۸۷) ص ۴۲۹ تست ۵

۲) ✓ ۱)

۴) ۳)

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \rightarrow X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$X = \sin\lambda x$

$$\begin{cases} X(0)=0 \rightarrow A=0 \\ X(1)=0 \rightarrow \underset{\neq 0}{B}\sin\lambda=0 \rightarrow \sin\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=n\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T''-T=-\lambda^2 T \\ T(0)=0 \end{cases} \rightarrow T''+(\lambda^2-1)T=0$$

چون $\lambda=n\pi$ پس $\lambda^2\geq\pi^2$ ← $\lambda^2-1>0$

$$\Rightarrow T=A\cos\sqrt{\lambda^2-1}\,t+B\sin\sqrt{\lambda^2-1}\,t$$

$$T(0)=0 \rightarrow A=0 \rightarrow T=\sin\sqrt{(n\pi)^2-1}\,t$$

* معادلات مرتبه دوم با ضرایب ثابت

$$a u_{xx}+b u_{xy}+c u_{yy}=0$$

$$ar^2+br+c=0 \rightarrow r_1, r_2$$

$$u=\phi_1(y+r_1x)+\phi_2(y+r_2x)$$

$r_1=r_2=r$ ریشه مضاعف $\rightarrow u=(ax+b)\phi_1(y+rx)=x\phi_1(y+rx)+\phi_2(y+rx)$

$$u=(ay+b)\phi_1(y+rx)=y\phi_1(y+rx)+\phi_2(y+rx)$$

صـ ۵۲۱، تست ۳۰

* درس ۱۰)

۱)
۲)
۳) ✓
۴)

$$r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r+2) = 0 \quad \begin{cases} r = 1 \\ r = -2 \end{cases}$$

$$y = \phi_1(y+x) + \phi_2(y-2x)$$

صـ ۵۲۱، تست ۳۴

* درس ۷۷، سراسری ۹۲، نفت ۹۲)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \pm 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

۱) ✓
۲)
۳)
۴)

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

صـ ۵۱۷، تست ۱۵

* مکانیک ۸۶)

$$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$$

۱) ✓
۲)
۳)
۴)

۲۴۶

$$r^2 + r - 6 = 0 \longrightarrow (r-2)(r+3) = 0 \quad \begin{cases} r = 2 \\ r = -3 \end{cases}$$

$$u = \phi_1(y+2x) + \phi_2(y-3x)$$