سرفصل سیگنال‌ها و سیستم‌ها (تجزیه و تحلیل سیستم‌ها)

- مقدمه: تعریف سیگنال و سیستم و ارتباطشان و هدف درس
- دسته‌بندی سیگنال‌ها از منظرهای مختلف
- سیگنال پیوسته زمان و سیگنال گسسته زمان
- معرفی سیگنال‌های پایه و خواص آنها { پله واحد، ضربه واحد، نمائی مختلط }
- خواص شش‌گانه سیستم‌ها { حافظه‌داری، علّی بودن، پایداری، خطی بودن، تغییرناپذیری با زمان، وارون‌پذیری }
- تحلیل سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) در حوزه زمان:
  - پاسخ ضربه سیستم
  - انتگرال و جمع کانولوشن
  - خواص چهارگانه سیستم‌های LTI
- تحلیل سیستم‌های LTI پیوسته زمان در حوزه فرکانس:
  - سری و تبدیل فوریه پیوسته زمان
  - خواص ۱۴ گانه تبدیل فوریه
  - پاسخ فرکانسی سیستم
  - انواع فیلترهای ایده‌آل و غیرایده‌آل
  - مدولاسیون
  - نمونه برداری و قضیه نایکوئیست

- تحلیل سیستم های LTI پیوسته زمان به کمک تبدیل لاپلاس:
  - خواص نه گانه تبدیل لاپلاس
  - تابع تبدیل سیستم

- تحلیل سیستم های LTI گسسته زمان در حوزه فرکانس:
  - سری و تبدیل فوریه گسسته زمان
  - خواص ۱۵ گانه تبدیل فوریه گسسته زمان
  - پاسخ فرکانسی سیستم گسسته زمان

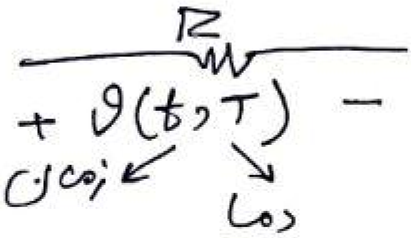
- تحلیل سیستم های LTI گسسته زمان به کمک تبدیل Z:
  - خواص تبدیل Z
  - تابع تبدیل سیستم گسسته زمان

مرجع درس

- سیگنال ها و سیستم ها - تالیف دکتر اپنهایم - ترجمه:
  - دکتر عارف (ویرایش اول)
  - دکتر هیبتی دار (ویرایش دوم)
  - محمود دیانی

مقدمه:

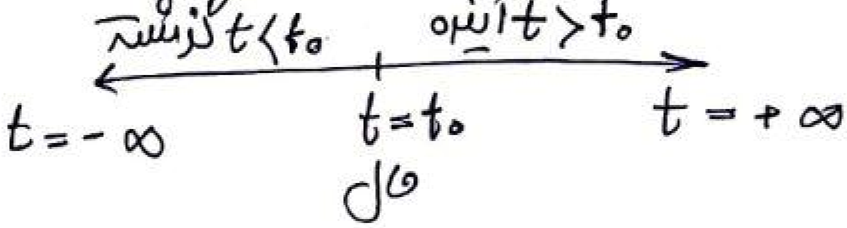
سیگنال: تغییرات یک کمیت بر اساس تغییرات یک یا چند متغیر



* در تمام درس سیگنال ها تک متغیره و فقط تابعی از زمان فرض می شوند

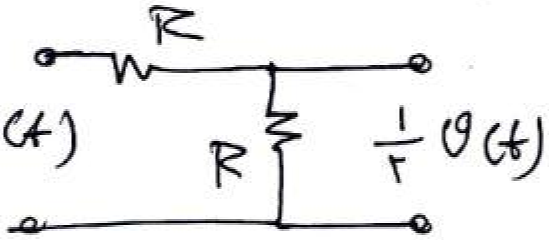
$x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)$

$-\infty < t < +\infty$

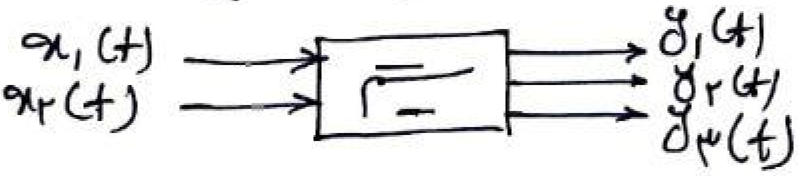


* زمان مثبت یا منفی یا صفر اهمیتی ندارد و فقط دوری یا نزدیکی را نسبت به زمان مرجع نشان می دهد.

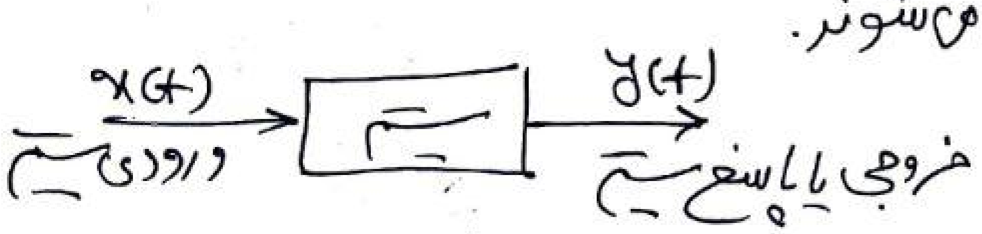
سیستم: مجموعه ای از اجزا که در کنار یکدیگر به گونه ای قرار گرفته اند که در کنش و واکنش با همدیگر هدف یا اهدافی را محقق می کنند.



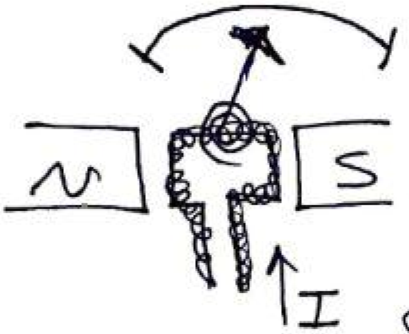
* سیستم مجموعه ای از اجزاست که روی یک یا چند سیگنال ورودی به سیستم پردازش هایی را انجام داده و یک یا چند سیگنال خروجی (هدف یا اهداف) را می دهد.



* در اکثر درس سیستم ها تک ورودی و تک خروجی فرض می شوند.



* **مدل ریاضی سیستم:** رابطه ای بین سیگنال ورودی $x(t)$ و سیگنال خروجی $y(t)$ در سیستم که با دانستن آن سیستم کاملا توصیف می شود.



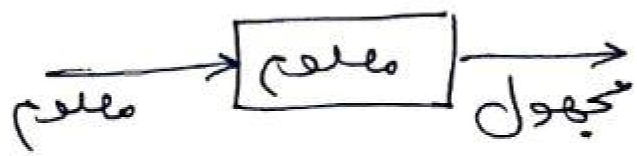
$$J\theta''(t) + D\theta'(t) + K\theta(t) = I$$

ممان اینرسی — ثابت میرائی — ثابت فنر کنترلی

* در برخورد با سیستم ها دو مسئله وجود دارد:

(۱) - آنالیز یا تحلیل: بررسی خواص سیستم معلوم

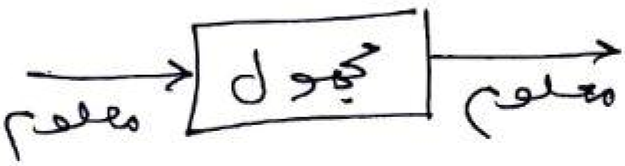
به دست آوردن خروجی سیستم معلوم در مقابل ورودی های مختلف



$y(t)=x^2(t)$

$y(t)=x(t)-x(t-1)$

(۲) - سنتز یا ترکیب: پیدا کردن سیستم مجهولی که کار خاصی را انجام دهد (در مقابل ورودی مشخص، خروجی مشخص بدهد)

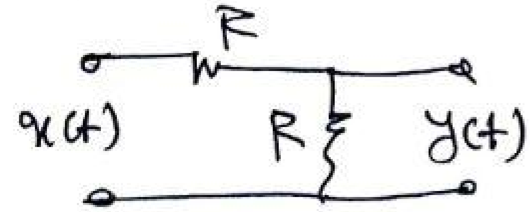


دو قدم در مسئله سنتز: (۱) - به دست آوردن مدل ریاضی سیستم مجهول

(۲) - تحقق فیزیکی برای مدل ریاضی به دست آمده

مثال: سنتز سیستمی که ولتاژ را نصف کند:

$y(t)=\frac{1}{2}x(t)$



(مسئله سنتز در صورت داشتن جواب عموماً جواب یکتا ندارد)

هدف درس: تحلیل سیستم ها از روی مدل ریاضی سیستم. به دست آوردن مدل ریاضی از روی سیستم فیزیکی و بالعکس تحقق فیزیکی مدل ریاضی جزء درس نمی باشد مگر موارد خیلی خاص مانند مبحث فیلترها

دسته بندی سیگنال ها:

(۱)- سیگنال حقیقی و مختلط:

$x(t) = \sin t$

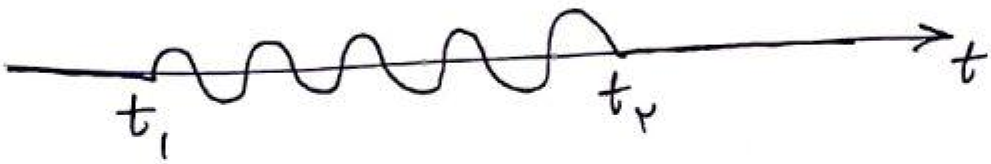
$x(t) = \cos t + j \sin t$

* سیگنال های جهان واقعی همه حقیقی هستند

(۲)- سیگنال متناوب و نامتناوب

$x(t+P) = x(t)$

* در جهان واقعی سیگنال متناوب تقریباً نداریم و هر سیگنالی که به عنوان یک سیگنال متناوب شناخته می شود تقریبی از سیگنال متناوب است



(۳)- سیگنال زوج و فرد:

زوج : $x_e(-t) = x_e(t)$

فرد $x_o(-t) = -x_o(t)$

$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

نه زوج نه فرد

$x_e(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t)\right)$

$x_o(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) - x(-t)\right)$

(۴)- سیگنال پیوسته زمان (Continious Time)

و سیگنال گسسته زمان (Discrete Time)

$x(t)$

$-\infty < t < +\infty$

* نمونه برداری (sampling) از یک سیگنال پیوسته زمان تولید یک سیگنال گسسته زمان می کند

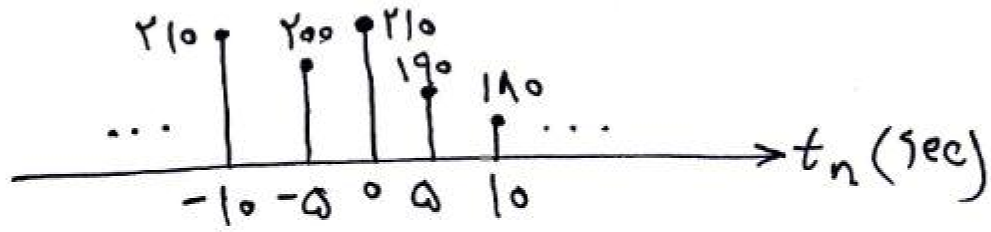
$t_0 = 0 \longrightarrow x_0 = 210$

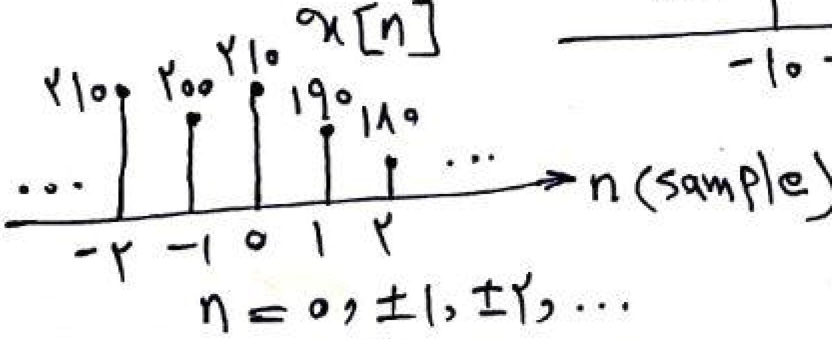
$t_1 = 5 \longrightarrow x_1 = 190$

$t_2 = 10 \longrightarrow x_2 = 180$

$t_{-1} = -5 \longrightarrow x_{-1} = 200$

$t_{-2} = -10 \longrightarrow x_{-2} = 210$





$t_n = n \cdot T_s$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

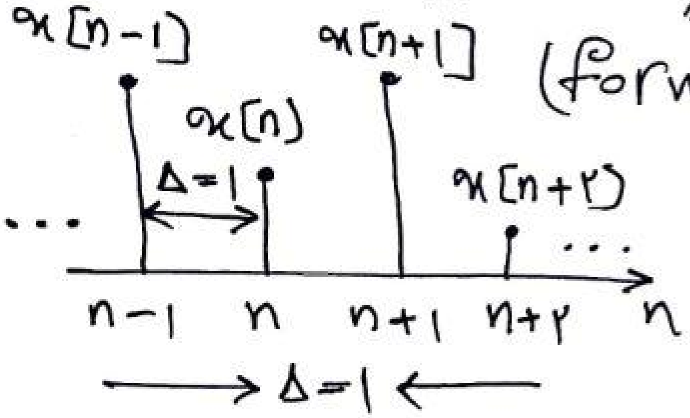
– معادل انتگرال، دیفرانسیل و معادله دیفرانسیل برای یک سیگنال گسسته زمان:

انتگرال: $\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,dt \longrightarrow \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]$: جمع sumation

---

دیفرانسیل: $\frac{d}{dt}x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t)-x(t-\Delta)}{\Delta}$

(forward) روبه‌جلو   (backward) روبه‌عقب



$x[n+1]-x[n] = \Delta x[n]$

دیفرنس یا تفریق یا تفاضل روبه‌جلو

$x[n]-x[n-1] = \nabla x[n]$ $\Delta x[n] \neq \nabla x[n]$

دیفرنس یا تفریق یا تفاضل روبه‌عقب

$$\nabla^{(k)} x[n] = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} x[n-m] \quad , \quad \binom{k}{m} = \frac{k!}{m!\,(k-m)!}$$

$$\nabla^{(2)} x[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

$$\nabla^{(3)} x[n] = x[n] - 3x[n-1] + 3x[n-2] - x[n-3]$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

* معادله دیفرانسیل در گسسته زمان تبدیل به معادله دیفرنس (تفاضلی) می‌شود:

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = 2t + 1$$

$$\nabla^{(2)} x[n] + 5\nabla x[n] + 6x[n] = 2n + 1$$

$$x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] + 5\big(x[n] - x[n-1]\big) + 6x[n] = 2n + 1$$

$$x[n-2] - 7x[n-1] + 12x[n] = 2n + 1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,dt \xrightarrow[\text{زمان}]{\text{در گسسته}} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \xrightarrow[\text{زمان}]{\text{در گسسته}} \nabla x[n] = x[n]-x[n-1]$$

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \xrightarrow[\text{زمان}]{\text{در گسسته}} \nabla^{(k)} x[n] = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} x[n-m]$$

معادله دیفرانسیل $\xrightarrow[\text{زمان}]{\text{در گسسته}}$ معادله دیفرنس (تفاضلی)

مثال :

$$x''(t)+2x'(t)+3x(t)=t^2+1$$

$$\nabla^{(2)} x[n]+2\nabla x[n]+3x[n]=n^2+1$$

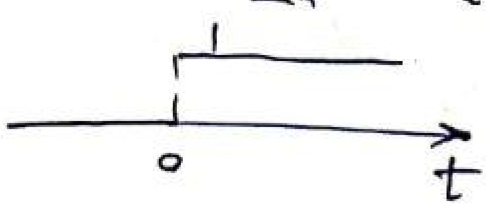
$$x[n]-2x[n-1]+x[n-2]+2\left(x[n]-x[n-1]\right)+3x(n)=n^2+1$$

$$x[n-2]-4x[n-1]+6x[n]=n^2+1$$

معرفی سیگنال های پایه :

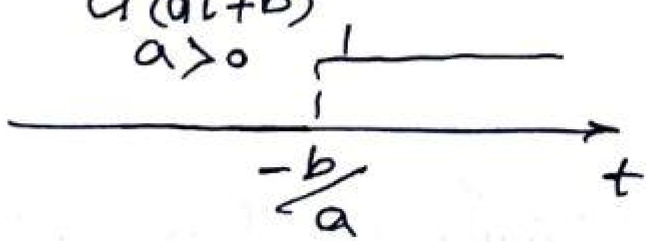
(۱) ـ سیگنال پله واحد پیوسته زمان : Unit step

$$u(t) \triangleq \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



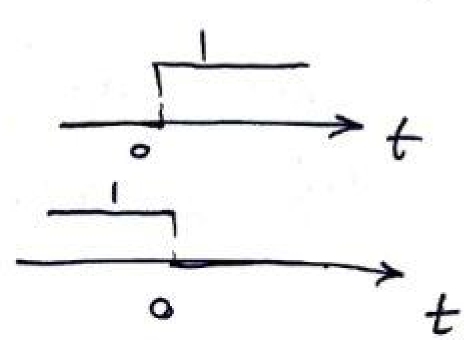
$u(at+b)$

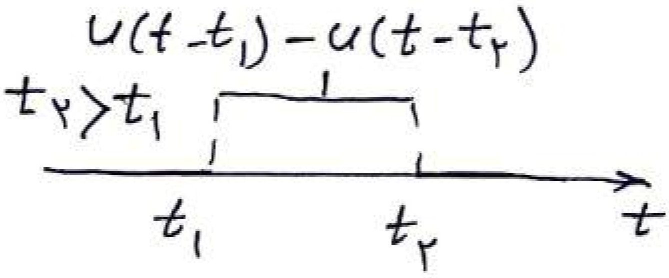
$a>0$



$$\begin{cases} u=1 \rightarrow at+b>0 \rightarrow t>-\frac{b}{a} \\ u=0 \rightarrow at+b<0 \rightarrow t<-\frac{b}{a} \end{cases}$$

$$u(at)=\begin{cases} u(t) & a>0 \\ u(-t) & a<0 \end{cases}$$





مثال: رسم سیگنال $x(t)$:

$$\begin{array}{llll} u=1: & t<2 & t>-3 & t>4 \end{array}$$

$$x(t)=2u(-t+2)-3t\,u(t+3)-(t+1)u(t-4)=$$

$$\begin{array}{llll} u=0: & t>2 & t<-3 & t<4 \end{array}$$

$$=\begin{cases} 2\times1-3t\times0-(t+1)\times0=2 & t<-3 \\ 2\times1-3t\times1-(t+1)\times0=-3t+2 & -3<t<2 \\ 2\times0-3t\times0-(t+1)\times0=0 & 2<t<4 \\ 2\times0-3t\times1-(t+1)\times1=-4t-1 & 4<t \end{cases}$$

انتگرال سیگنال پله:

رسم سیگنال: $x(t)=\int_{-\infty}^{2t+1} e^{\lambda}\,u(2\lambda-6t)\,d\lambda$

$$\begin{cases} u=1: 2\lambda-6t>0 \longrightarrow \lambda>3t \\ u=0: 2\lambda-6t<0 \longrightarrow \lambda<3t \end{cases}$$

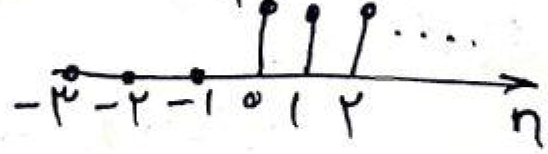
$$\begin{cases} 3t>2t+1 \longrightarrow x(t)=0 \\ 3t<2t+1 \longrightarrow x(t)=\underbrace{\int_{-\infty}^{3t}}_{u=0}+\underbrace{\int_{3t}^{2t+1}}_{u=1}=\int_{3t}^{2t+1} e^{\lambda}\,d\lambda=e^{2t+1}-e^{3t} \end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases} e^{2t+1}-e^{3t} & t<1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$$

---

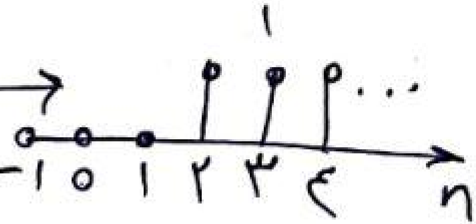
(۲)- سیگنال پله واحد گسسته زمان:

$$u[n]\triangleq\begin{cases} 1 & n\geq0 \text{ یا } n>-1 \\ 0 & n\leq-1 \text{ یا } n<0 \end{cases}$$



$$u[k_1 n+k_2]=\begin{cases}1 & n \geq -\frac{k_2}{k_1} \text{ صحیح} \\ 0 & n < -\frac{k_2}{k_1} \text{ صحیح}\end{cases} \qquad k_1 \geq 1$$

$$u[2n-4]=\begin{cases}1 & n \geq 2 \\ 0 & n<+2 \text{ یا } n \leq 1\end{cases}$$

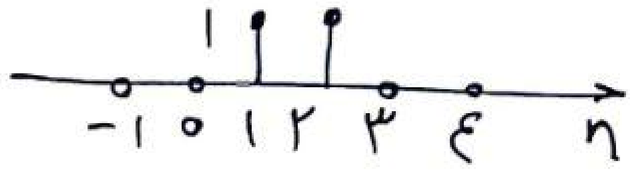


$$u[2n-3]=\begin{cases}1 & n \geq 1{,}5 \text{ یا } n \geq 2 \\ 0 & n<1{,}5 \text{ یا } n \leq 1\end{cases}$$

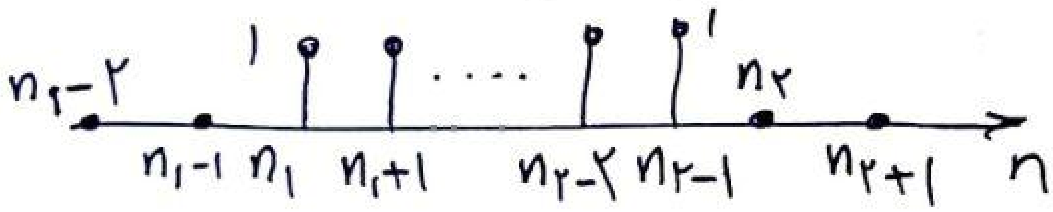
$u[2n-4]=u[2n-3]$

$u(2t-4)\neq u(2t-3)$

$u[n-1]-u[n-3]$



$u[n-n_1]-u[n-n_2]$



$n_2 \geq n_1$

$$\text{رسم سیگنال}: \ x(n)=2u[-n-1]-n\,u(n+2)+u[2n-4]=$$

$u=1: \quad n\leq -1 \qquad n\geq -2 \qquad n \geq 2$

$u=0: \quad n \geq 0 \qquad n\leq -3 \qquad n\leq 1$

$$=\begin{cases}2\times 1-n\times 0+0=2 & n\leq -3 \\ 2\times 1-n\times 1+0=-n+2 & -2\leq n\leq -1 \text{ یا } n=-2,-1 \\ 2\times 0-n\times 1+0=-n & 0\leq n\leq 1 \text{ یا } n=0,1 \\ 2\times 0-n\times 1+1=-n+1 & 2\leq n\end{cases}$$

$$\text{رسم سیگنال}: \ x(n)=\sum_{k=-\infty}^{2n+1}(2)^k u[k-3n]=\begin{cases}0 & \overbrace{3n-1\geq 2n+1}^{n\geq 2} \\ \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{3n-1}}_{u=0}+\underbrace{\sum_{k=3n}^{2n+1}}_{u=1} & \underbrace{3n-1<2n+1}_{n\leq 1}\end{cases}$$

$u=1: \ k-3n\geq 0 \longrightarrow k\geq 3n$

$u=0: \ k-3n\leq -1 \longrightarrow k\leq 3n-1$

$$x[n]=\begin{cases}0 & n\geq 2\\ \sum_{k=3n}^{2n+1} 2^k & n\leq 1\end{cases}$$

<u>یادآوری از تصاعد هندسی:</u>

$t_1,\ t_1q,\ t_1q^2,\ \dots,\ t_1q^{N-1}$

$t_1 =$ جمله اول
$q =$ قدر نسبت
$N =$ تعداد جملات

$$\sum_{k=0}^{N-1} t_1 q^k = t_1 + t_1 q + \dots + t_1 q^{N-1} = t_1 \frac{1-q^N}{1-q}$$

با شرط: $|q|<1 \longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} t_1 q^k = t_1 + t_1 q + \dots = \frac{t_1}{1-q}$

$$\sum_{k=3n}^{2n+1} 2^k = 2^{3n} + 2^{3n+1} + \dots + 2^{2n+1} = 2^{3n}\frac{1-2^{2-n}}{1-2} = 2^{2n+2} - 2^{3n}$$

$t_1 = 2^{3n}$

$q = 2$

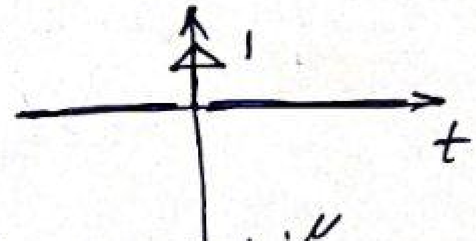
$N = 2n+1-3n+1 = 2-n$

---

(۳) - سیگنال ضربه واحد پیوسته زمان

Unit Impulse
(Delta Dirac)

$$\delta(t) \triangleq \frac{d}{dt}u(t)$$

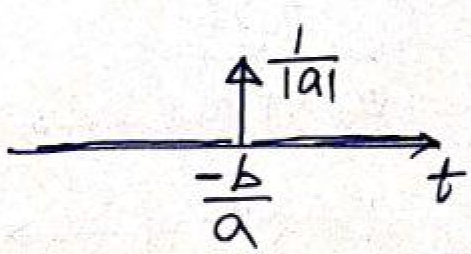


$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \text{مقدار} & t=0\end{cases}$$

$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ سیگنال زوج

$\delta(-t) = \delta(t)$

$$\delta(at+b) = \delta\left(a\left(t+\frac{b}{a}\right)\right) = \frac{1}{|a|}\cdot\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$$



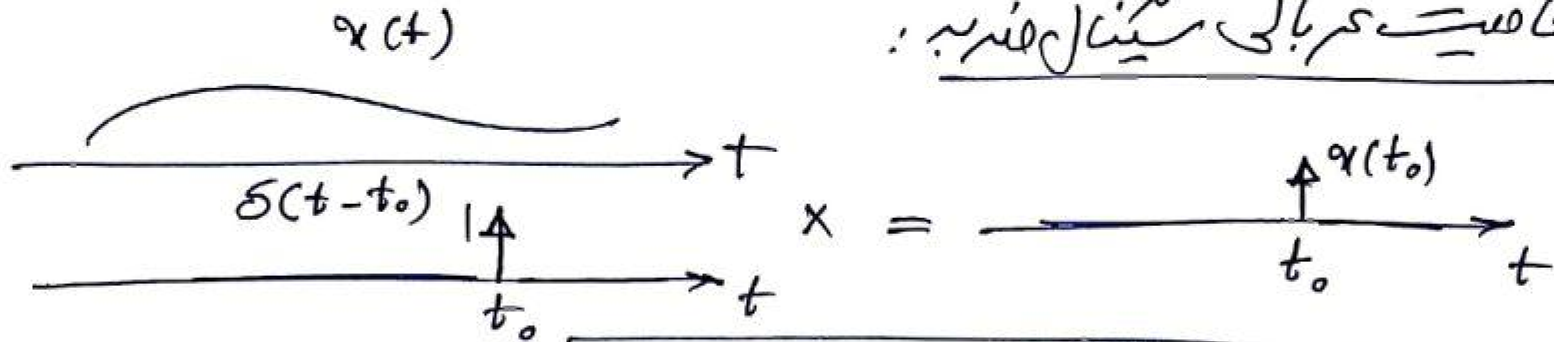
$$\begin{cases}y(t) = \frac{d}{dt}x(t)\\ x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\lambda)\,d\lambda\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)\\ u(t) = \int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)\,d\lambda\end{cases}$$

* مشتقات ضربه همگی موجود و همگی فقط در صفر غیر صفر هستند.

$$\delta'(t) \;,\; \delta''(t) \;,\; \delta'''(t) \;,\; \dots$$

دوبلت (فرد)   زوج   فرد

خاصیت غربالی سیگنال ضربه:



$$\boxed{x(t)\cdot\delta(t-t_0)=x(t_0)\,\delta(t-t_0)}$$

$$\frac{t^2+1}{t^2-1}\,\delta(t-2)=\frac{5}{3}\,\delta(t-2) \quad , \quad \sin(\pi t)\,\delta(t-3)=0$$

$$(t^3+3)\cdot\delta(2t-6)=\frac{1}{2}(t^3+3)\cdot\delta(t-3)=15\cdot\delta(t-3)$$

انتگرال سیگنال ضربه:

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)\,d\lambda \xrightarrow{t=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\lambda)\,d\lambda=1$$

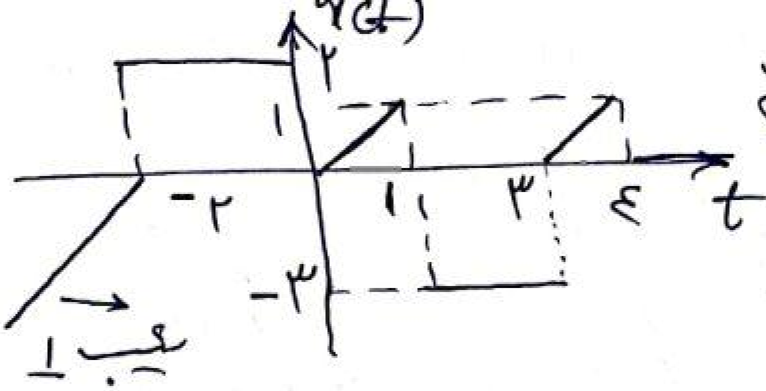
$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(t-t_0)\,dt \;\; (t_2>t_1) = \begin{cases} 0 & t_1,t_2<t_0 \\ 0 & t_1,t_2>t_0 \\ 1 & t_1<t_0<t_2 \end{cases}$$

رسم سیگنال: $x(t)=\int_{-\infty}^{2t+1}\underbrace{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\,\delta(2\lambda-6t)}_{\frac{1}{2}\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\delta(\lambda-3t)=\frac{3t+1}{6t-2}\delta(\lambda-3t)}\,d\lambda=\frac{3t+1}{6t-2}\int_{-\infty}^{2t+1}\delta(\lambda-3t)\,d\lambda$

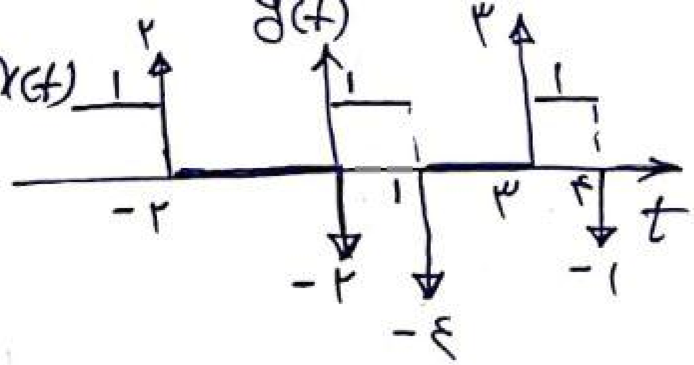
$$\overbrace{3t>2t+1}^{t>1} \longrightarrow x(t)=0$$

$$\underbrace{3t<2t+1}_{t<1} \longrightarrow x(t)=\frac{3t+1}{6t-2} \qquad \longrightarrow x(t)=\begin{cases} 0 & t>1 \\ \dfrac{3t+1}{6t-2} & t<1 \end{cases}$$

$$x(t)=\frac{3t+1}{6t-2}\,u(-t+1)$$



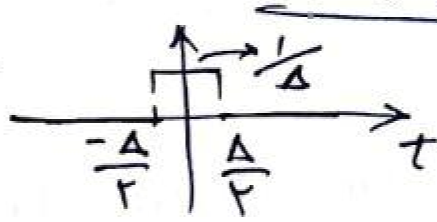
$y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$



$$y(t)=u(-t-2)+u(t)-u(t-1)+u(t-3)-u(t-4)$$
$$+2\delta(t+2)-2\delta(t)-4\delta(t-1)+3\delta(t-3)-\delta(t-4)$$

تقریب سیگنال ضربه واحد:

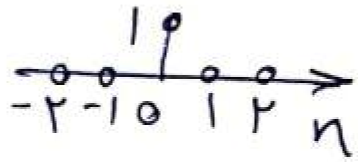
$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<-\frac{\Delta}{2}\\ \frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2}<t<\frac{\Delta}{2}\\ 0 & \frac{\Delta}{2}<t\end{cases}$$



$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$

(۴)- سیگنال ضربه واحد گسسته زمان:

$$\begin{cases}\delta(t)=\frac{d}{dt}u(t)\\ u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)d\lambda\end{cases}\xrightarrow{\text{معادل}}\begin{cases}\delta[n]=\nabla u[n]=u[n]-u[n-1]\\ u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]\end{cases}$$



$$\delta[2n-4]=\delta[n-2]\quad,\quad\delta[2n-3]=0$$

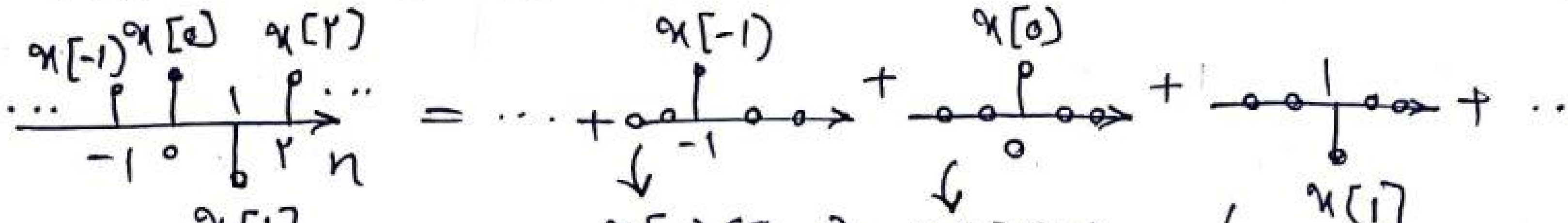
خاصیت غربالی: $x[n]\cdot\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[k]=1\longrightarrow\sum_{n=n_1}^{n_2}\delta[n-n_0]=\begin{cases}0 & n_1,n_2<n_0\\ 0 & n_1,n_2>n_0\\ 1 & n_1\leq n_0\leq n_2\end{cases}\quad n_2\geq n_1$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{2n+1}2^k\cdot\delta[k-3n]=2^{3n}\sum_{k=-\infty}^{2n+1}\delta[k-3n]=$$

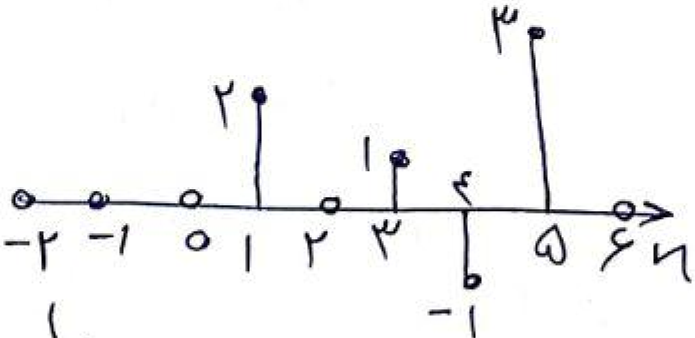
$$=\begin{cases}0 & 3n>2n+1\\ 2^{3n} & 3n\leq 2n+1\end{cases}=\begin{cases}0 & n\geq 2\\ 8^n & n\leq 1\end{cases}=8^n\cdot u[-n+1]$$

نوشتن سیگنال دلخواه $x[n]$ به شکل ترکیب خطی از شیفت یافته های ضربه :



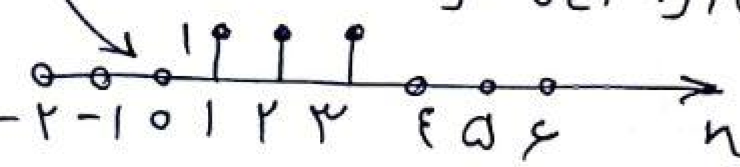
$$\cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

$$\begin{cases} x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \\ x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda \end{cases}$$



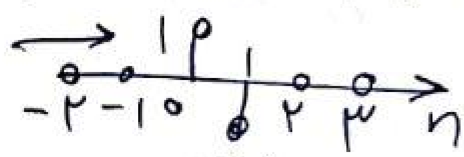
$$2\delta[n-1] + \delta[n-3] - \delta[n-4] + 3\delta[n-5]$$

$$u[n-1] - u[n-4] = \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$

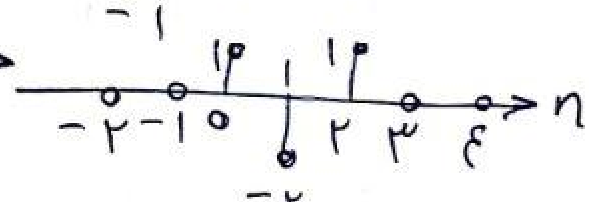


دیفرنس های مراتب مختلف ضربه :

$\nabla\delta[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ دوبلت گسسته زمان



$$\nabla^{(2)}\delta[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$



(۵)- سیگنال نمائی پیوسته زمان :

e^{st}:
- s حقیقی $\longrightarrow$ بدون کاربرد خاص
- $s = j\omega \longrightarrow e^{st} = e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \longrightarrow$ کاربرد در تبدیل فوریه
- $s = \sigma + j\omega \longrightarrow$ کاربرد در تبدیل لاپلاس

(۶)- سیگنال نمائی گسسته زمان :

z^n:
- z حقیقی $\longrightarrow$ بدون کاربرد خاص
- $z = e^{j\Omega} \longrightarrow z^n = e^{j\Omega n} = \cos\Omega n + j\sin\Omega n \longrightarrow$ کاربرد در تبدیل فوریه گسسته زمان
- $z = re^{j\Omega} \longrightarrow$ کاربرد در تبدیل Z

$e^{j\Omega n}$ ، $\cos\Omega n$ ، $\sin\Omega n$: شرط متناوب بودن

$$\frac{2k\pi}{\Omega} = N \longrightarrow \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{N}{k} = \text{کسر گویا}$$

همگی نامتناوب: e^{j2n} , $\cos\sqrt{2}n$, $\sin\sqrt{3}\pi n$, $e^{j\pi^2 n}$, $\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\pi n$

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \pi \ , \ \sqrt{2}\pi \ , \ \frac{2}{\sqrt{3}} \ , \ \frac{2}{\pi} \ , \ 2\sqrt{2}$$

همگی متناوب: $e^{j\frac{2}{3}\pi n}$, $\cos\frac{\pi}{2}n$, $\sin\pi n$, $\cos\frac{7\pi}{3}n$, $e^{j\frac{\pi}{4}n}$

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{3}{1} \ , \ \frac{4}{1} \ , \ \frac{2}{1} \ , \ \frac{6}{7} \ , \ \frac{8}{1}$$

(در حالت متناوب بودن که فرکانس زاویه‌ای با واحد $\frac{rad}{sample}$ می‌باشد.)

خواص سیستم‌ها:

$x(t),\ x[n] \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow y(t),\ y[n]$

(۱)- علّی بودن (Causality):

اگر خروجی سیستم در تمامی لحظات مستقل از آینده ورودی باشد سیستم علّی (Causal) می‌باشد. در غیر این صورت (وابستگی خروجی به آینده ورودی در حداقل یک لحظه) سیستم غیرعلّی (Non-Causal) است.

گذشته ← حال → آینده

$t=-\infty \qquad t_0 \qquad t=+\infty$

* با فرض این که متغیر سیگنال‌ها زمان واقعی است در جهان واقعی سیستم غیرعلّی وجود ندارد و همه سیستم‌ها علّی می‌باشند.

$y(t)=x^2(t)$ علّی — $y(t)=x^2(t)+x(t-1)$ علّی — $y[n]=x^2[n]-x[n+1]$ غیرعلّی

$y[n]=x^2[n]+n+1$ علّی

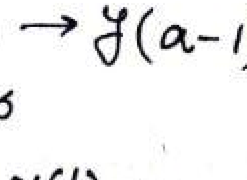
$y(t)=x(\frac{t}{2})$: شرط علّی بودن: $\forall t: \frac{t}{2} \leq t$

$y(-2)=x(-1)$ غیرعلّی — به ازای $t<0$ برقرار نیست

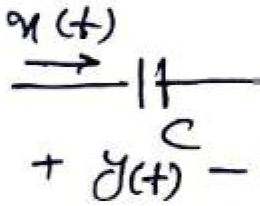
$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda$ علّی , $y(t)=\int_{a}^{t} x(\lambda)d\lambda \ \ (a\neq-\infty) \rightarrow y(a-1)=\int_{a}^{a-1} x(\lambda)d\lambda = -\int_{a-1}^{a} x(\lambda)d\lambda$ غیرعلّی

$y[n]=\nabla x[n]=x[n]-x[n-1]$ علّی

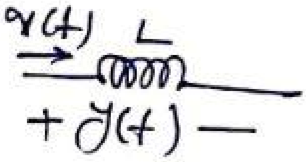
$y[n]=\Delta x[n]=x[n+1]-x[n]$ غیرعلّی



$y(t)=Rx(t)$ علّی



$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda$ ، علّی



$y(t) = L\frac{d}{dt}x(t)$: علّی

$$y(t)=\frac{d}{dt}x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{x(t)-x(t-\Delta)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta}$$

- سیستم ضدعلّی (Anti Causal) : نوع خاص سیستم غیرعلّی است که در تمامی لحظات خروجی از گذشته ورودی مستقل می باشد.

$$y[n]=\sum_{k=n}^{+\infty}x[k] \quad , \quad y(t)=\int_{t}^{+\infty}x(\lambda)\,d\lambda \quad , \quad y(t)=x^2(t)+x(t+1)$$

(۲)- حافظه داری: اگر خروجی سیستم در تمامی لحظات فقط به حال ورودی وابسته باشد آنگاه سیستم بدون حافظه (Memory-less) است. در غیر این صورت (وابستگی خروجی به گذشته یا آینده ورودی در حداقل یک لحظه) سیستم حافظه دار است.

$y(t)=x^2(t)$ بدون حافظه ، $y(t)=x^2(t)+x(t-1)$ حافظه دار ، $y(t)=x^2(t)+x(t+1)$ حافظه دار

$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ حافظه دار ، $y(t)=x\left(\frac{t}{2}\right)$ حافظه دار ، سلف و خازن حافظه دار و مقاومت بدون حافظه

$y(t)=x(t)+\sin t$ بدون حافظه ، $y(t)=x(\sin t)$ حافظه دار و غیرعلّی ، $y(t)=\sin(x(t))$ بدون حافظه و علّی.

* هر سیستم غیرعلّی حافظه دار است.
* هر سیستم بدون حافظه علّی است.

گزاره های معادل $\begin{cases} p \Rightarrow q \\ \sim q \Rightarrow \sim p \end{cases}$

اگر خورشید در آسمان باشد آنگاه روز است
اگر شب باشد آنگاه خورشید در آسمان نیست

* سیستم بدون حافظه در تعریف هم سیستم علّی و هم سیستم ضدعلّی صدق می کند ولی چون در جهان واقعی وجود دارد علّی است.

(۳)- پایداری $(Stability)$: اگر پاسخ سیستم به هر ورودی کراندار $(Bounded)$ یک سیگنال کراندار باشد آنگاه سیستم پایدار $(stable)$ است. در غیر این صورت (پاسخ سیستم به حداقل یک ورودی کراندار سیگنالی غیر کراندار شود) سیستم ناپایدار $(Unstable)$ می باشد

BIBO: Bounded Input Bounded Output

* سیگنال کراندار: سیگنالی کراندار است که مقدار سیگنال در هیچ زمانی (حتی در $t=\pm\infty$) بی نهایت نشود (مقدار سیگنال کران داشته باشد)

$$\forall t: |x(t)| \leqslant \underset{\text{محدود}}{M}$$

همگی کراندار: $\sin \omega t$, $2e^{j\omega t}$, $\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $e^{-t}u(t)$, $e^{t}u(-t)$

همگی غیر کراندار: $\tan t$, e^{-t} , e^{t} , $e^{t}u(t)$, $e^{-t}u(-t)$, $\frac{t^2-2}{t^2-1}$, $\frac{t^3}{t^2+1}$

شرط پایداری: $\forall t: |x(t)| \leqslant \underset{\text{محدود}}{M} \Longrightarrow |y(t)| \leqslant \underset{\text{محدود}}{N}$

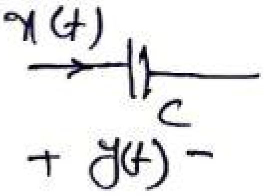
$\underset{\text{پایدار}}{y(t) = x^2(t)}$: $\forall t: |x(t)| \leqslant \underset{\text{محدود}}{M} \Longrightarrow |y(t)| = |x^2(t)| = |x(t)|^2 = \underset{\text{محدود}}{M^2 = N}$

$\underset{\text{ناپایدار}}{y(t) = t x(t)}$: $\forall t: |x(t)| \leqslant M \Longrightarrow |y(t)| = |x(t)\cdot t| = |t|\cdot|x(t)| \leqslant |t|M \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

مثال نقض: $\underset{\text{کراندار}}{x(t)=1} \longrightarrow \underset{\text{غیر کراندار}}{y(t)=t}$

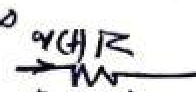
$\underset{\text{ناپایدار}}{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda}$: $\forall t: |x(t)| \leqslant M \Longrightarrow |y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda\right| \leqslant$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{t} |x(\lambda)|\,d\lambda \leqslant \int_{-\infty}^{t} M\,d\lambda = M(t+\infty) \to \infty$$



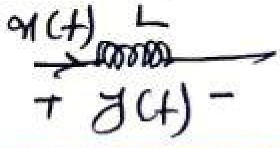
: $y(t) = \begin{cases} \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} x(\lambda)\,d\lambda & t < t_1 \\ Y_F & t_1 < t \end{cases}$

پایدار



$y(t) = R\,x(t)$

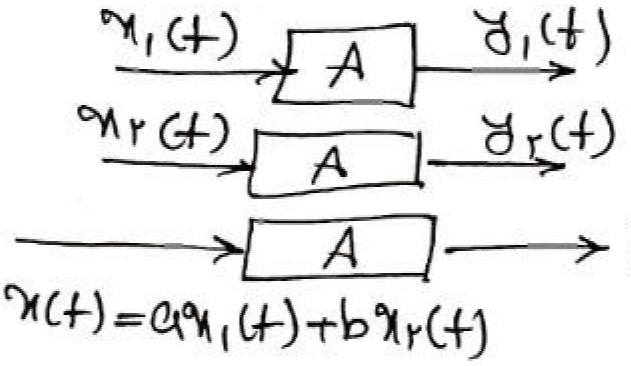
پایدار



پایدار

$y(t)=e^{x(t)}$ پایدار ، $y(t)=\dfrac{x^2(t)-1}{x^2(t)+1}$ پایدار ، $y(t)=\sin(x(t))$ پایدار ، $y=x(\sin t)$ پایدار

(۴)- خطی بودن: سیستمی خطی است که پاسخ سیستم به هر ترکیب خطی روی ورودی‌ها همان ترکیب خطی روی خروجی‌های سیستم باشد



$y(t) \overset{?}{=} a y_1(t)+b y_2(t)$ مساوی ← خطی (Linear) ؛ نامساوی ← غیرخطی (Non-Linear)

* فقط سیستمی خطی است که خروجی ترکیب خطی از فرم‌های مختلف ورودی باشد که در این ترکیب خطی ضرایب می‌توانند توابعی از زمان باشند

* فرم‌های مختلف ورودی یعنی سیگنال ورودی با آرگومان‌های زمانی متفاوت و یا سیگنال ورودی که تحت تاثیر عملگری خطی قرار گرفته است

$x(t)$, $x(t^2)$, $x(t^3-1)$, $x(\sin t)$, $x(t^2-t+1)$, $\frac{d}{dt}x(t)$

* عملگر خطی عملگری است که روی ترکیب خطی توزیع شود:

$$L\{ax_1(t)+bx_2(t)\}=aL\{x_1(t)\}+bL\{x_2(t)\}$$

مثل مشتق و انتگرال: $\frac{d}{dt}(ax_1(t)+bx_2(t))=a\frac{d}{dt}x_1(t)+b\frac{d}{dt}x_2(t)$

عملگر غیرخطی: $\sin(ax_1(t)+bx_2(t)) \neq a\sin(x_1(t))+b\sin(x_2(t))$

$$e^{ax_1(t)+bx_2(t)} \neq ae^{x_1(t)}+be^{x_2(t)}$$

$$u(ax_1(t)+bx_2(t)) \neq au(x_1(t))+bu(x_2(t))$$

$y(t) = (t^2+1)x(|t|) + 5x'(t+1) - \sin t \cdot x(\cos t)$ خطی

$y(t) = x^2(t)$ غیرخطی ، $y[n] = \frac{1}{x[n]}$ غیرخطی ، $y(t) = x(t)\cdot x(t+1)$ غیرخطی

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t>0 \\ x(t+1) & t<0 \end{cases} = x(t)u(t) + x(t+1)u(-t)$$ خطی

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t)>0 \\ x(t+1) & x(t)<0 \end{cases} = x(t)u(x(t)) + x(t+1)u(-x(t))$$ غیرخطی

$y[n] = nx[n] + 2x[n-1] + 3$ غیرخطی

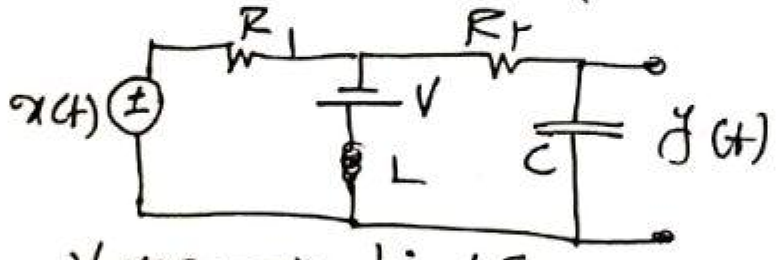
* شرط لازم خطی بودن سیستم پاسخ صفر به ورودی صفر است
(اگر پاسخ به ورودی صفر ، غیر صفر شود سیستم غیرخطی است)

مقاومت : $y(t) = Rx(t)$ خطی

سلف : $y(t) = L\frac{d}{dt}x(t)$ خطی

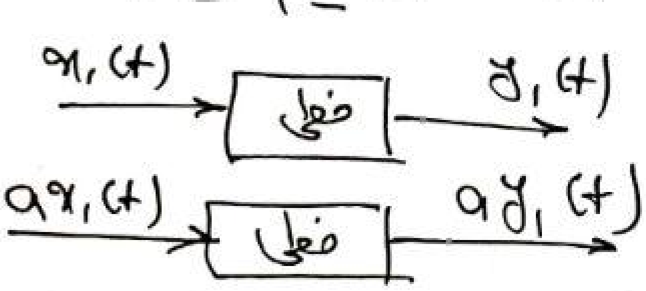
خازن : $y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda$ خطی

* مدارات RCL به شرط عدم وجود منبع ولتاژ و منبع جریان داخلی و ولتاژ اولیه خازن و جریان اولیه سلف سیستم های خطی می باشند.



$V \neq 0 \longrightarrow$ سیستم غیرخطی

* خاصیت همگنی سیستم خطی :



۵) تغییرناپذیر با زمان: اگر هر شیفت دلخواه روی سیگنال ورودی دقیقاً همان شیفت به خروجی منتقل شود سیستم تغییرناپذیر با زمان می‌باشد. Time Invariant (TI) در غیر این صورت سیستم تغییرپذیر با زمان Time Variant (TV) است.

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t)=x_1(t-t_0) \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow y_2(t) \overset{?}{=} y_1(t-t_0)$$

مساوی ← TI

نامساوی ← TV

(سیستمی تغییرناپذیر با زمان است که پاسخ به ورودی شیفت یافته ($y_2(t)$) برابر با شیفت یافته پاسخ ($y_1(t-t_0)$) باشد)

- برای ساختن پاسخ به ورودی شیفت یافته در مدل ریاضی سیستم هرچه جلوی x بود را منهای t_0 می‌کنیم و برای ساختن شیفت یافته پاسخ در مدل ریاضی جای تمامی t ها عبارت $t-t_0$ را جایگذاری می‌کنیم.

$$\underset{TV}{y(t)=t\,x(t)} \quad : \quad t\,x(t-t_0) \neq (t-t_0)\,x(t-t_0)$$

$$\underset{TI}{y(t)=x^2(t)+x(t-1)} \quad : \quad x^2(t-t_0)+x(t-1-t_0)=x^2(t-t_0)+x(t-t_0-1)$$

$$\underset{TV}{y(t)=x(|t|)} \quad : \quad x(|t|-t_0) \neq x(|t-t_0|)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{at} x(\lambda)\,d\lambda \quad : \quad \int_{-\infty}^{at} x(\lambda-t_0)\,d\lambda \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{a(t-t_0)} x(\lambda)\,d\lambda$$

$\lambda-t_0=\zeta$: تغییر متغیر

$$\int_{-\infty}^{at-t_0} x(\zeta)\,d\zeta \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{at-at_0} x(\lambda)\,d\lambda \longrightarrow \begin{cases} a=1 \ (TI) \\ a\neq 1 \ (TV) \end{cases}$$

$$\underset{TV}{y(t)=x\left(\frac{t}{2}\right)} \quad : \quad x\left(\frac{t}{2}-t_0\right) \neq x\left(\frac{t-t_0}{2}\right)$$

مقاومت: $y(t)=R\cdot x(t)$, $y(t)=R(t)\cdot x(t)$

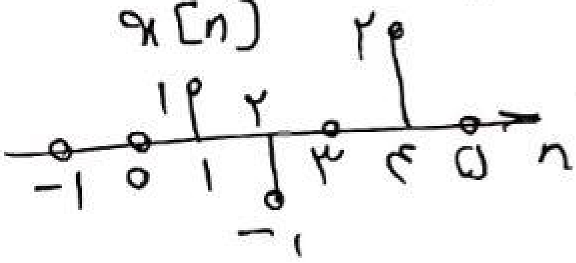
TI TV

سلف: $y(t)=L\frac{d}{dt}x(t)$, خازن: $y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda$

TI TI

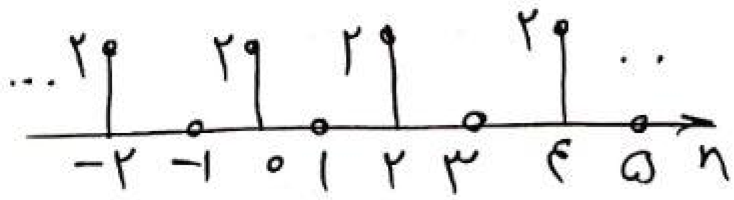
* مدارات RCL سیستم های تغییرناپذیر با زمان می باشند.

<u>مثال</u>: در یک سیستم خطی می دانیم که پاسخ به $\delta[n-n_0]$ به ازای جمیع n_0 های صحیح برابر $(-1)^{n_0 n}$ است. پاسخ سیستم به ورودی داده شده در زیر بیابید.



$$x[n]=\delta[n-1]-\delta[n-2]+2\delta[n-4]\rightarrow y[n]=(-1)^{n}-(-1)^{2n}+2(-1)^{4n}=$$

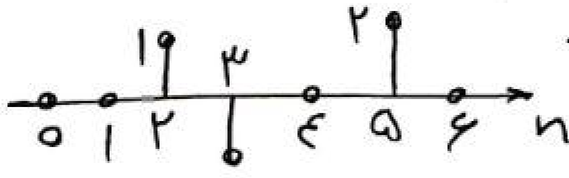
$$=1+(-1)^n=\begin{cases}0 & n \text{ فرد}\\ 2 & n \text{ زوج}\end{cases}$$



آیا سیستم با TI است یا TV ؟

$x_2[n]=x[n-1]$

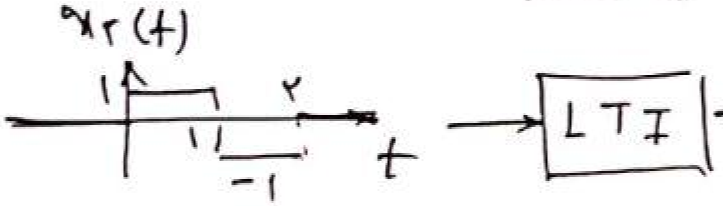
$$=\delta[n-2]-\delta[n-3]+2\delta[n-5]$$

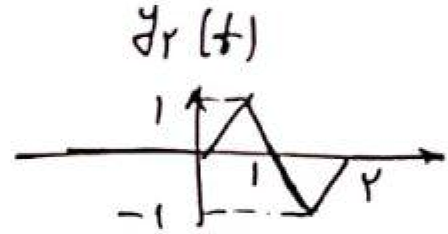


$$y_2[n]=(-1)^{2n}-(-1)^{3n}+2(-1)^{5n}=1+(-1)^n=y[n]$$

سیستم تغییرپذیر با زمان است.

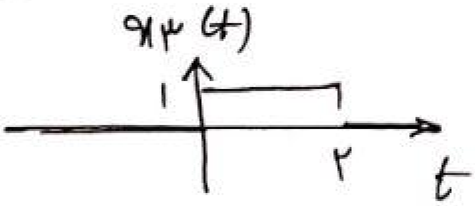
<u>مثال</u>: پاسخ یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان به ورودی $x_1(t)$ داده شده برابر با $y_1(t)$ داده شده است. پاسخ سیستم به ورودی $x_2(t)$ داده شده را بیابید.

 $y_2(t) = ?$

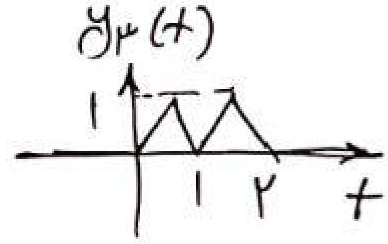


بخاطر TI بودن : $x_1(t-t_0) \longrightarrow y_1(t-t_0)$

بخاطر خطی بودن : $x_2(t)=x_1(t)-x_1(t-1) \longrightarrow y_2(t)=y_1(t)-y_1(t-1)$



$\longrightarrow y_3(t)=y_1(t)+y_1(t+1)$



$x_3(t)=x_1(t)+x_1(t+1)$

$x_3(t)=x_1\left(\frac{t}{2}\right) \quad : \quad y_3(t)\neq y_1\left(\frac{t}{2}\right)$

* نکته : سیستم تغییر مقیاس دهنده حتماً تغییر پذیر با زمان است :

$y(t)=x(at) \longrightarrow$ خطی تغییر پذیر با زمان

$a\neq 1$

- مدارات RCL چون TI می باشند نمی توانند تغییر مقیاس بدهند در نتیجه اگر یک تک فرکانس در ورودی آنها ظاهر شود در خروجی فرکانس عوض نمی شود و فقط دامنه و فاز آن تک فرکانس تغییر می کند

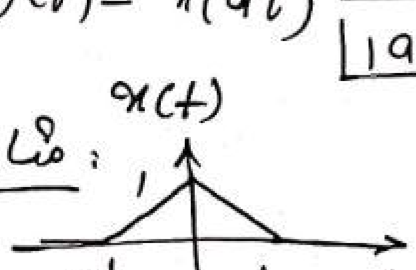
یادآوری از تغییر مقیاس :

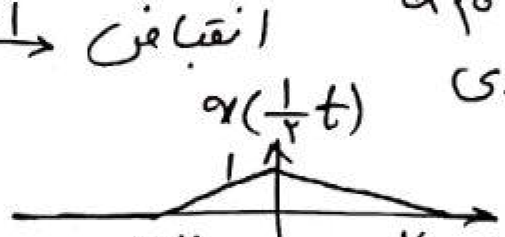
$y(t)=x(at) \xrightarrow{|a|<1}$ انبساط

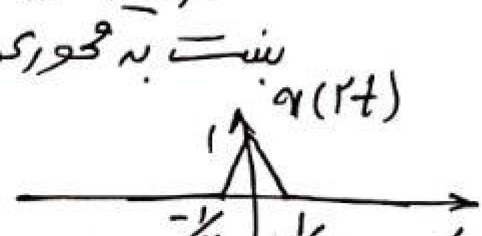
$\xrightarrow{|a|>1}$ انقباض

$a<0 \longrightarrow$ قرینه نسبت به محور عمودی

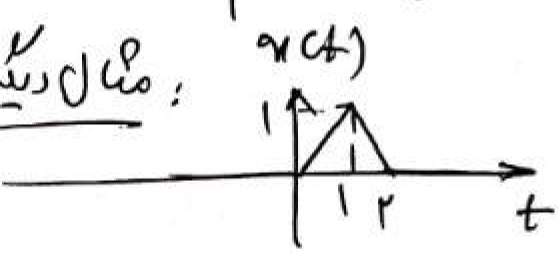
مثال :

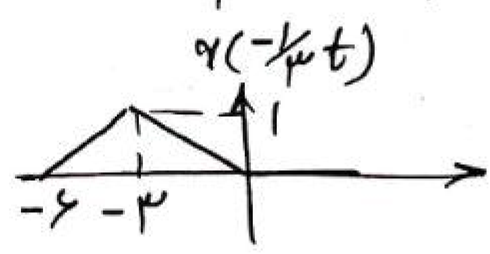




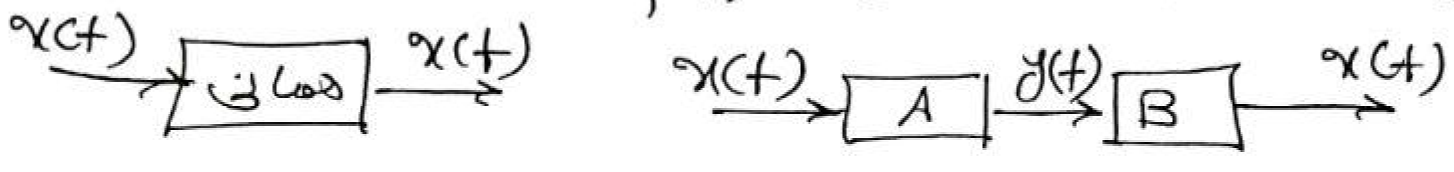


مثال دیگر :





(۶)- <u>وارون پذیری</u>: سیستم A وارون پذیر است اگر سیستم B به گونه‌ای پیدا شود که اتصال سری دو سیستم به شکل زیر یک سیستم همانی (یعنی) را بدهد. در این صورت به B وارون A گوییم.



$$A: y = f(x) \qquad B: x = f^{-1}(y)$$

پیدا شدن سیستم B یعنی از روی $y(t)$ سیگنال $x(t)$ در تمامی زمان‌ها به صورت تک مقدار پیدا شود.

شرط وارون پذیری: $\forall t: \; x_1(t) \neq x_2(t) \Longrightarrow y_1(t) \neq y_2(t)$

$\forall t: \; y_1(t) = y_2(t) \Longrightarrow x_1(t) = x_2(t)$

<u>دو نکته</u>: (۱)- وارون یک سیستم وارون پذیر یکتا نیست

(۲)- وارون پذیری در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست

$y(t) = x^2(t)$

وارون ناپذیر

راه اول: $x(t) = \pm\sqrt{y(t)}$ دو مقدار

راه دوم: $y_1(t) = y_2(t) \Rightarrow x_1^2(t) = x_2^2(t) \Rightarrow x_1(t) = \pm x_2(t)$

راه سوم: $\begin{matrix} x_1(t) = t \\ x_2(t) = -t \end{matrix} \Longrightarrow y_1(t) = y_2(t) = t^2$

$y[n] = (n^2+1)\,x[n]$

وارون پذیر

راه اول: $x[n] = \dfrac{y[n]}{n^2+1}$

راه دوم: $y_1[n] = y_2[n] \Rightarrow (n^2+1)\,x_1[n] = (n^2+1)\,x_2[n]$

$\Rightarrow x_1[n] = x_2[n]$

$y(t) = x^n(t)$
$n \neq 1$

وارون ناپذیر

$y[n] = (n-1)\,x[n]$

وارون ناپذیر

راه اول: $x[n] = \dfrac{y[n]}{n-1}$, $n \neq 1$

$x[1]$ <u>به دست نمی‌آید</u>

راه دوم: $y_1[n] = y_2[n] \Rightarrow (n-1)\,x_1[n] = (n-1)\,x_2[n] \Rightarrow x_1[n] = x_2[n]$, $n \neq 1$

در $n = 1$ دو سیگنال می‌توانند متفاوت باشند.

راه سوم:

$$x_1[n]=\begin{cases} n & n\neq 1 \\ 2 & n=1 \end{cases}$$

$$x_2[n]=\begin{cases} n & n\neq 1 \\ 3 & n=1 \end{cases} \Rightarrow y_1[n]=y_2[n]=\begin{cases} n & n\neq 1 \\ 0 & n=1 \end{cases}$$

* شرط کافی برای وارون ناپذیری سیستم استقلال فروجی از بعضی لحظات ورودی است

$y(t)=G(t)\cdot x(t)$
وارون ناپذیر

$y[n]=G(n)\cdot x[n]$
وارون پذیر

$$y[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$$
وارون پذیر

: $y[-2]=x[-1]$, $y[-1]=0$, $y[0]=x[0]$, $y[1]=0$, $y[2]=x[1]$, $y[3]=0$, $y[4]=x[2]$, $y[5]=0$, $y[6]=x[3]$

سیستم وارون: $x[n]=y[2n]$ ← وارون ناپذیر چون فروجی از لحظات فرد ورودی مستقل است.

$y(t)=x(t)+x(t-1)$
وارون پذیر

$$\begin{aligned}
y(t)&=x(t)+x(t-1)\\
-y(t-1)&=-x(t-1)-x(t-2)\\
y(t-2)&=x(t-2)+x(t-3)\\
-y(t-3)&=-x(t-3)-x(t-4)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$y(t)-y(t-1)+y(t-2)-y(t-3)+\cdots=x(t)$$

سیستم وارون (علّی): $x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k y(t-k)$

$$\begin{aligned}
y(t+1)&=x(t+1)+x(t)\\
-y(t+2)&=-x(t+2)-x(t+1)\\
y(t+3)&=x(t+3)+x(t+2)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$y(t+1)-y(t+2)+y(t+3)-\cdots=x(t)$$

سیستم وارون (غیرعلّی): $x(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}-(-1)^k y(t+k)$

- دیفرانسیل گیر و دیفرنس گیر

$y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$ وارون ناپذیر هستند.

$x_1(t)=2$

$x_2(t)=3 \longrightarrow y_1(t)=y_2(t)=0$

$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda$: $y_1(t)=y_2(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} x_1(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{t} x_2(\lambda)\,d\lambda \Rightarrow$

وارون پذیر

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t}[x_1(\lambda)-x_2(\lambda)]\,d\lambda=0 \Rightarrow \underset{-\infty<\lambda<t}{x_1(\lambda)=x_2(\lambda)} \xRightarrow[t\to\infty]{}$$

$$\Rightarrow \underset{-\infty<\lambda<+\infty}{x_1(\lambda)=x_2(\lambda)} \Rightarrow$$ سیستم وارون پذیر

$y(t)=\int_{-t}^{t} x(\lambda)\,d\lambda$: $x_1(t)=t$, $x_2(t)=t^3 \Rightarrow y_1(t)=y_2(t)=0$

وارون ناپذیر

$$y(t)=\int_{-t}^{+\infty} e^{-\lambda-t}\,x(t+\lambda)\,d\lambda \Rightarrow y(t)=\int_{0}^{+\infty} e^{-z}\,x(z)\,dz$$

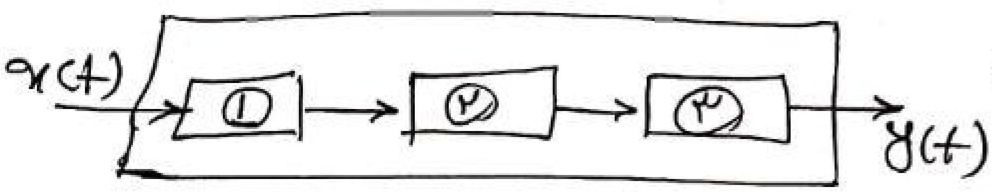
$t+\lambda=z$

$$y_1(t)=y_2(t) \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} e^{-z}[x_1(z)-x_2(z)]\,dz=0 \Rightarrow \underset{0<z<+\infty}{e^{-z}(x_1(z)-x_2(z))=0}$$

$$\Rightarrow \underset{0<z<+\infty}{x_1(z)=x_2(z)} \Rightarrow$$ سیستم وارون ناپذیر

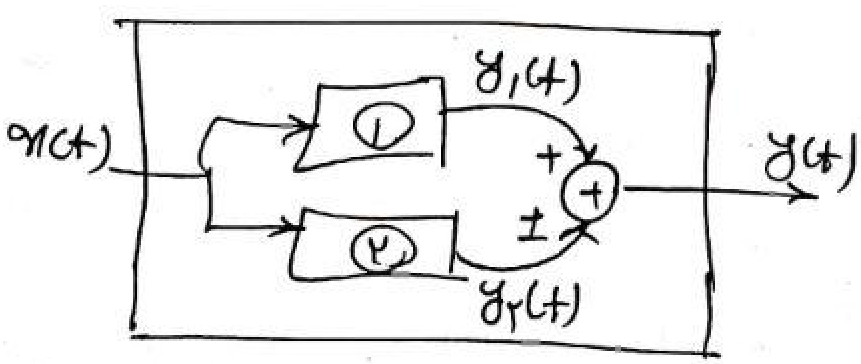
- اتصال سیستم ها به یکدیگر:

(۱)- اتصال سری:

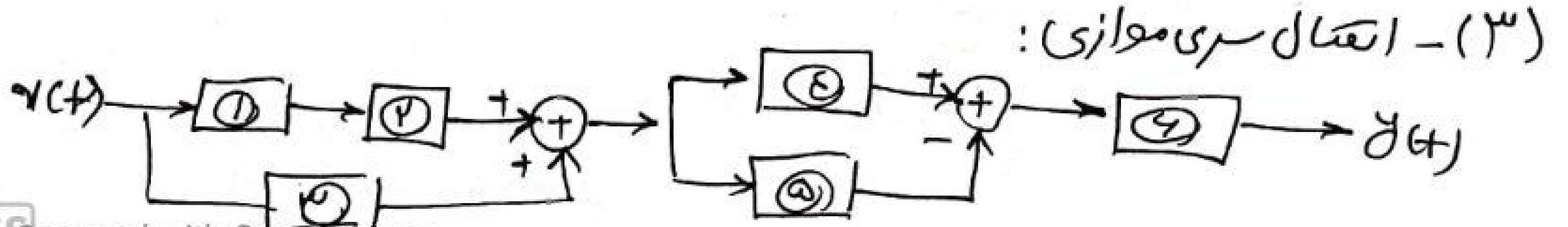


* در حالت کلی اتصال سری سیستم ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

(۲)- اتصال موازی:

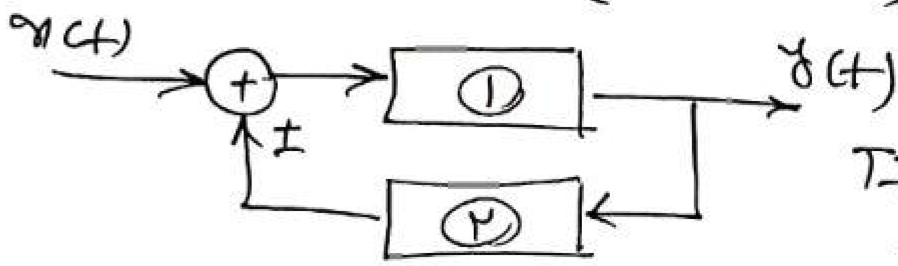


(۳)- اتصال سری موازی:



* اتصال سری یا موازی یا سری‌موازی سیستم های علّی خطی TI و پایدار تولید یک سیستم علّی خطی TI و پایدار می کند.

(۴) - اتصال با فیدبک (پسخور) (feedback):



* اتصال با فیدبک دو سیستم علّی خطی و TI تولید یک سیستم علّی خطی و TI می کند.

- تحلیل سیستم های خطی و تغییرناپذیر در حوزه زمان:

Linear Time Invariant (LTI)

* هر سیستم LTI با معلوم بودن پاسخ ضربه‌اش کاملا توصیف می شود
(پاسخ ضربه همان نقش مدل ریاضی سیستم را پیدا می کند)

توصیف کامل سیستم:
(۱) - معلوم بودن پاسخ سیستم در برابر هر ورودی دلخواه
(۲) - معلوم بودن خواص سیستم

- پاسخ ضربه سیستم (Impulse Response):

$$x(t)=\delta(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)=h(t)$$

- به دست آوردن پاسخ سیستم در برابر ورودی دلخواه با معلوم بودن پاسخ ضربه:

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow h[n]$$

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow h[n-k]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \longrightarrow y[n]=x[n]*h[n]$$

کمل جمع کانولوشن

* مدل ریاضی تمامی سیستم های LTI به این صورت است که خروجی حاصل کانولوشن ورودی با پاسخ ضربه سیستم است.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)$$

کمل انتگرال کانولوشن

فواص کانولوشن :

(۱) جابه‌جایی :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau$$

(۲) شرکت‌پذیری :

$$(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3) = x_2 * (x_1 * x_3)$$

(۳) کفو فنی :

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda = x(t)*\delta(t)$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n]*\delta[n]$$

(۴) توزیع‌پذیری روی جمع و تفریق :

$$x_1*(x_2 \pm x_3)=x_1*x_2 \pm x_1*x_3$$

$$x_1(t)+x_1(t)*x_2(t) = x_1(t)*(\delta(t)+x_2(t))$$

(۵) شیفت در زمان :

$$x_3(t)=x_1(t)*x_2(t) \Longrightarrow x_3(t-t_0)=x_1(t-t_0)*x_2(t)=$$
$$=x_1(t)*x_2(t-t_0)$$

مثال : $x_1(t+1)*x_2(t-1)=?$

$$x_1(t+1)*x_2(t)=x_3(t+1) \longrightarrow x_1(t+1)*x_2(t-1)=x_3(t-1+1)=x_3(t)$$

خاصیت ۳ و ۵ $\longrightarrow$ $\boxed{x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)}$

از قبل خاصیت غربالی : $x(t)\cdot\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$

(۶) دیفرانسیل (دیفرس) :

$$x_3(t)=x_1(t)*x_2(t) \Longrightarrow \frac{d}{dt}x_3(t)=\left(\frac{d}{dt}x_1(t)\right)*x_2(t) =$$
$$=x_1(t)*\left(\frac{d}{dt}x_2(t)\right)$$

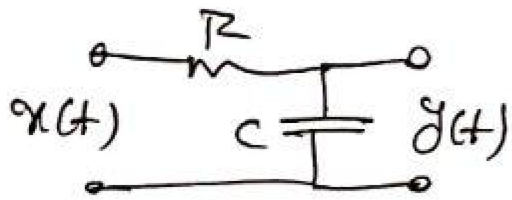
- پاسخ پله سیستم های LTI :

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}LTI\\h(t)\end{matrix}} \longrightarrow s(t)=?$$

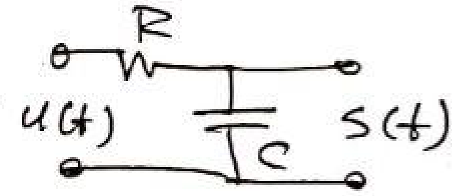
$$s(t)=u(t)*h(t) \longrightarrow \frac{d}{dt}s(t)=\underbrace{\frac{du(t)}{dt}}_{\delta(t)}*h(t)=h(t)$$

$$\begin{cases}h(t)=\frac{d}{dt}s(t)\\ s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)d\lambda\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}h[n]=s[n]-s[n-1]\\ s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]\end{cases}$$

مثال : درمدارزیر پاسخ ضربه رابیابید :



$\longrightarrow$



: $t<0 \rightarrow s(t)=0$

$t>0$

$\rightarrow 1-s(t)=Ri(t) \rightarrow RCs'(t)+s(t)=1$

$s(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)d\lambda \rightarrow i(t)=Cs'(t)$

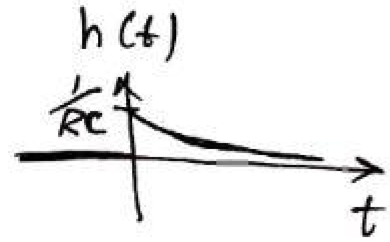
حل : $\begin{cases} s'(t)+\frac{1}{RC}s(t)=\frac{1}{RC} \\ s(0)=0 \end{cases} \rightarrow$ جواب همگن : $\begin{cases} m+\frac{1}{RC}=0 \rightarrow m=\frac{-1}{RC} \\ s(t)=Ae^{-\frac{1}{RC}t} \end{cases}$

جواب خصوصی : $s(t)=1 \longrightarrow$ جواب کامل : $s(t)=Ae^{-\frac{1}{RC}t}+1$

$s(0)=A+1=0 \longrightarrow A=-1$

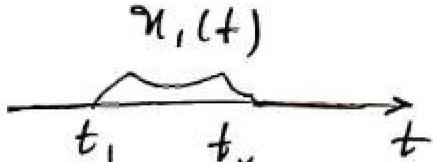
$$s(t)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{1}{RC}t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} =(1-e^{-\frac{1}{RC}t})u(t)$$

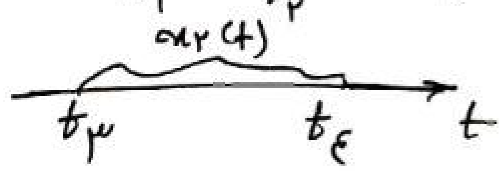
$$h(t)=\frac{d}{dt}s(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)+\underbrace{(1-e^{-\frac{1}{RC}t})\delta(t)}_{0}$$



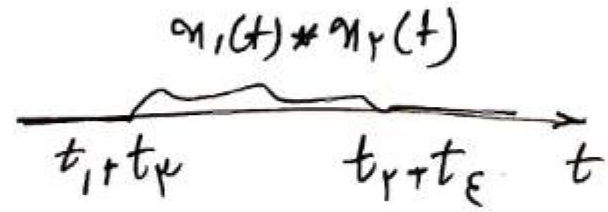
(۷) استمرار کانولوشن

اگر :





$\Longrightarrow$



(۸)- ضریب : $(Ax_1(t))*(Bx_2(t))=AB(x_1(t)*x_2(t))$

(۹)- کانولوشن سیگنال های زوج و فرد :

زوج = زوج * زوج

زوج = فرد * فرد

،

فرد = زوج * فرد

(۱۰)- اگر دو سیگنال کانولوشن شونده دارای ضربه و مشتقاتش نباشند آنگاه حاصل کانولوشن حتما سیگنالی پیوسته است که پرش ندارد (هر چند دو سیگنال پرش داشته باشند)

(۱۱) سطح زیر منحنی کانولوشن:

اگر: $A_i=\int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t)\,dt$ ، $i=1,2,3$ و $x_3(t)=x_1(t)*x_2(t) \Longrightarrow A_3=A_1\cdot A_2$

یا $A_i=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_i[n]$ ، $x_3[n]=x_1[n]*x_2[n] \Longrightarrow A_3=A_1\cdot A_2$

(۱۲) کانولوشن سیگنال‌های متناوب:

$\underset{\text{متناوب با پریود P}}{x_1(t)} * \underset{\text{نامتناوب}}{x_2(t)} = \underset{\text{متناوب با پریود P}}{x_3(t)}$ و اگر $\underset{\text{متناوب}}{x_1(t)} * \underset{\text{متناوب}}{x_2(t)} = \infty$

(۱۳)- فرمول برای عمل معکوس کانولوشن نداریم و در صورت انجام عمل معکوس کانولوشن جواب یکتا نیست.

$\underset{\text{معلوم}}{x_1(t)} * \underset{\text{مجهول}}{x_2(t)} = \underset{\text{معلوم}}{x_3(t)} \longrightarrow$ $x_2(t)$ یکتا نیست

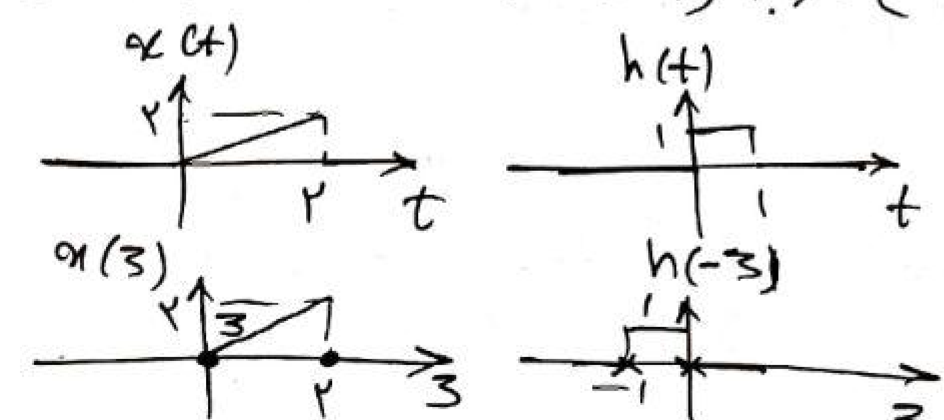
<u>طریقه محاسبه انتگرال کانولوشن:</u>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)\,d\tau$$

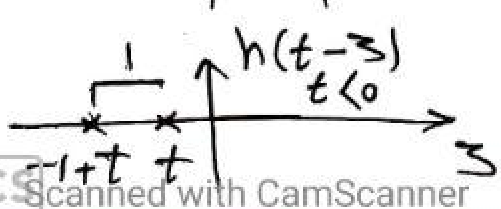
$$x_2(\tau)\xrightarrow[\text{به محور عمودی}]{\text{قرینه نسبت}} x_2(-\tau)\;\underset{\underset{t<0}{\text{شیفت به چپ}}}{\overset{\overset{t\geq 0}{\text{شیفت به راست}}}{\rightrightarrows}}\; x_2(t-\tau)$$

* وقتی نقاط تغییر ضابطه دو سیگنال از روی یکدیگر عبور کنند، ضابطه حاصل کانولوشن عوض می‌شود.

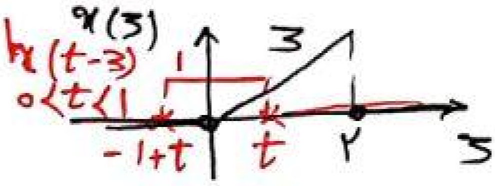
<u>مثال</u>: پاسخ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=u(t)-u(t-1)$ را به ورودی رسم شده در زیر بیابید:



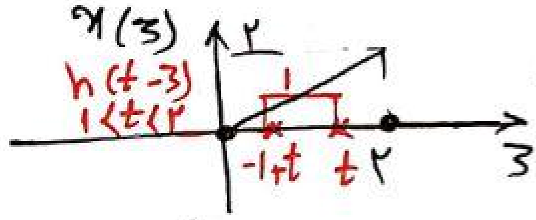
$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$



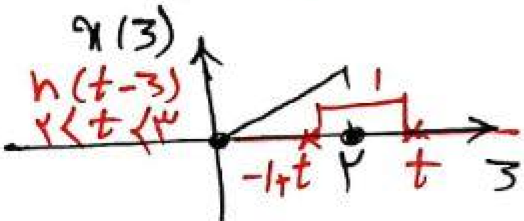
$\longrightarrow t<0:\ y(t)=0$



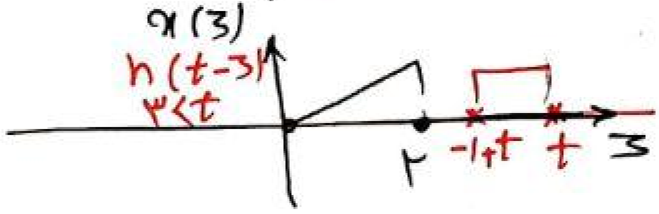
$$0<t<1 \longrightarrow y(t)=\int_0^t \tau\times 1\,d\tau=\frac{1}{2}t^2$$



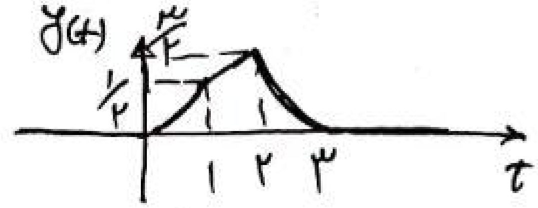
$$1<t<2 \longrightarrow y(t)=\int_{-1+t}^{t} \tau\times 1\,d\tau=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}(t-1)^2$$



$$2<t<3 \longrightarrow y(t)=\int_{-1+t}^{2} \tau\times 1\,d\tau=2-\frac{1}{2}(t-1)^2$$

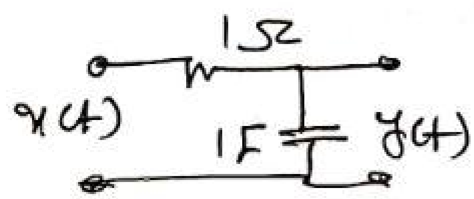


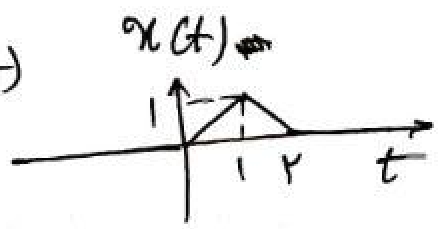
$$3<t \longrightarrow y(t)=0$$



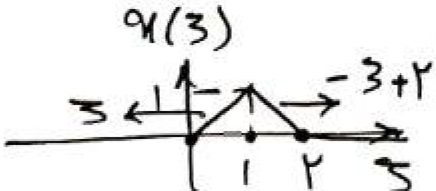
$$A_x=2,\quad A_h=1 \longrightarrow A_y=2\times 1=2$$

مثال: پاسخ مدار زیر را به ورودی داده شده بیابید:



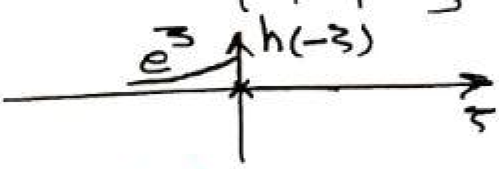


$$h(t)=e^{-t}u(t)$$

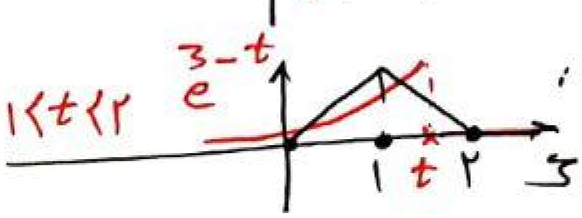


$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

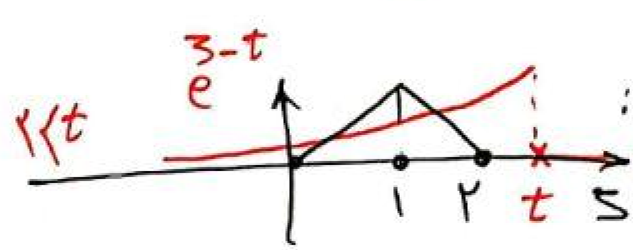
$$t<0 \longrightarrow y(t)=0$$



$$0<t<1 \rightarrow y(t)=\int_0^t \tau e^{\tau-t}\,d\tau$$



$$1<t<2 \rightarrow y(t)=\int_0^1 \tau e^{\tau-t}\,d\tau+\int_1^t(-\tau+2)e^{\tau-t}\,d\tau$$

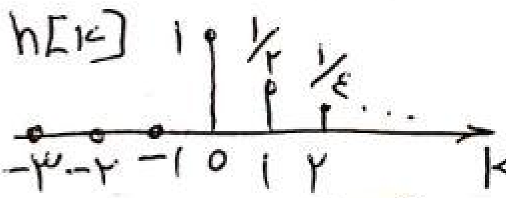


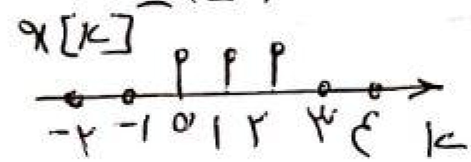
$$2<t \rightarrow y(t)=\int_0^1 \tau e^{\tau-t}\,d\tau+\int_1^2(-\tau+2)e^{\tau-t}\,d\tau$$

- محاسبه جمع کانولوشن :

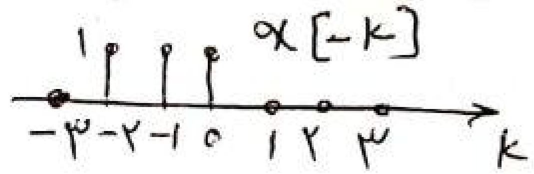
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]\,x_2[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[k]\,x_1[n-k]$$

مثال: پاسخ سیستم LTI گسسته زمانی با پاسخ ضربه $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ را به ورودی $x[n]=u[n]-u[n-3]$ بیابید.





$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n-k]$$



$n\leqslant -1 \rightarrow y[n]=0$

$n=0 \rightarrow y[n]=1$

$n=1 \rightarrow y[n]=1+\frac{1}{2}$

$n=2 \rightarrow y[n]=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$n=3 \rightarrow y[n]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

$n=4 \rightarrow y[n]=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

$\vdots$

$$y[n]=\begin{cases}0 & n\leqslant -1\\ 1 & n=0\\ \frac{3}{2} & n=1\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & n\geqslant 2\end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(4+2+1)=\frac{7}{2^n}$$

$$\longrightarrow y[n]=\begin{cases}0 & n\leqslant -1\\ 1 & n=0\\ \frac{3}{2} & n=1\\ \frac{7}{2^n} & n\geqslant 2\end{cases}$$

* روش ساده‌تر :

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]=h[n]+h[n-1]+h[n-2]\longrightarrow$$

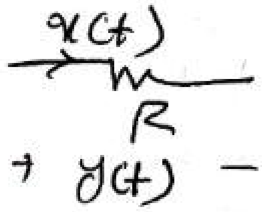
$$\longrightarrow y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]$$

* خواص سیستم‌های LTI :

(۱) - حافظه‌داری : شرط لازم و کافی برای بدون حافظه بودن یک سیستم LTI این است که پاسخ ضربه سیستم فقط در صفر مقدار داشته باشد.

$h(t)=a\,\delta(t)$

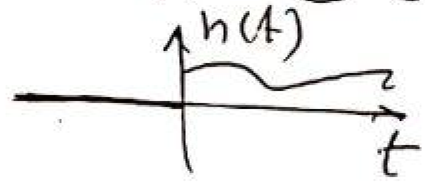
$h[n]=a\,\delta[n]$

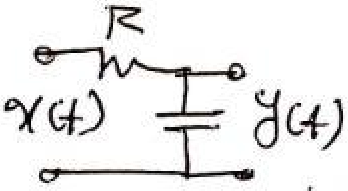


$y(t)=R\,x(t)\rightarrow h(t)=R\,\delta(t)$

(۲)- علّی بودن : شرط لازم و کافی برای علّی بودن یک سیستم LTI این است که پاسخ ضربه سیستم در زمان های منفی صفر باشد

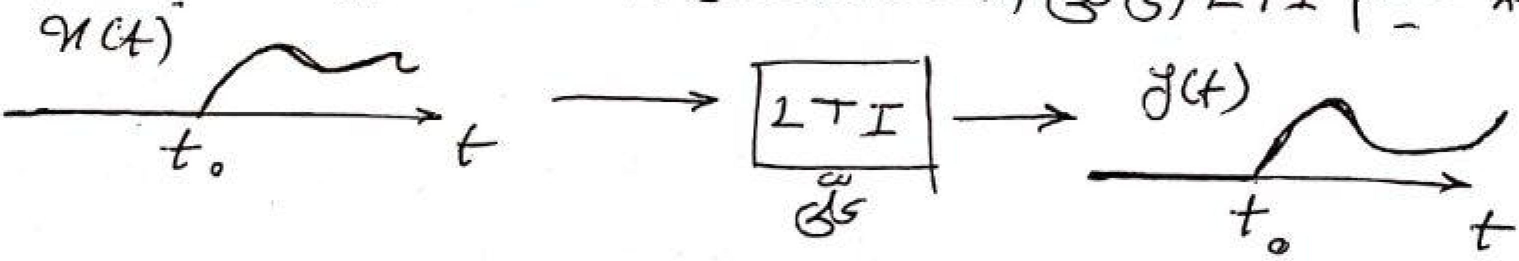
$$h(t) = f(t)\,u(t)$$
$$h[n] = f[n]\,u[n]$$





$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

* سیستم LTI ای علّی است که مادامی که ورودی صفر باشد خروجی نیز صفر باشد



(اگر تا زمانی که ورودی صفر است خروجی غیرصفر باشد دو حالت دارد:

(۱)- سیستم LTI باشد قطعاً غیرعلّی است

(۲)- سیستم علّی باشد قطعاً غیرخطی است)

* شرط لازم و کافی برای ضدعلّی بودن یک سیستم LTI این است که پاسخ ضربه سیستم در زمان های مثبت صفر باشد

$$h(t) = f(t)\,u(-t)$$
$$h[n] = f[n]\,u[-n]$$

(پاسخ ضربه سیستم غیرعلّی هم در زمان های مثبت و هم در زمان های منفی مقدار غیرصفر دارد)

(۳)- پایداری : شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم های LTI این است که پاسخ ضربه سیستم مطلقاً انتگرال پذیر (مطلقاً جمع پذیر) باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < \underbrace{M}_{\text{محدود}} \quad , \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \underbrace{M}_{\text{محدود}}$$

$h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ — حافظه دار - علّی - پایدار

$h[n] = 2^n u[n]$ — حافظه دار - علّی - ناپایدار

$h[n] = u[n] - u[n-3]$ — حافظه دار - علّی - پایدار

- سیستم های گسسته زمان FIR و IIR :

* اگر پاسخ ضربه سیستم گسسته زمانی دارای جملات غیرصفر قابل شمارش باشد آنگاه سیستم را FIR گوئیم و در غیر این صورت (پاسخ ضربه دارای بی نهایت جمله غیرصفر باشد) سیستم IIR است.

FIR : Finite Impulse Response   پاسخ ضربه محدود

IIR : Infinite Impulse Response   پاسخ ضربه نامحدود

$h(n)=2^n u(n)$, $h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]+2^n u[-n-1]$, $h[n]=u[n]-u[n-4]$

IIR و ناپایدار   IIR و پایدار   FIR و پایدار

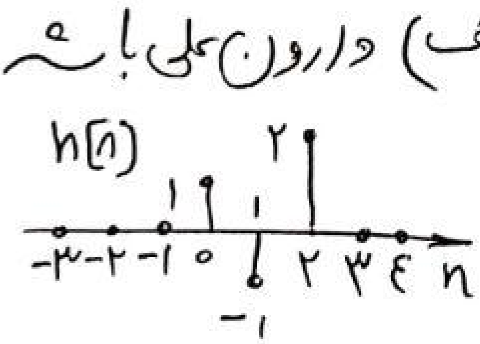
* هر سیستم FIR پایدار است   * هر سیستم ناپایدار IIR است.

۴) - وارون پذیری :

اگر سیستم LTI ای با پاسخ ضربه $h(t)$ وارون پذیر باشد آنگاه وارون آن نیز یک سیستم LTI است که اگر پاسخ ضربه وارون را $h_1(t)$ بنامیم داریم:

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t) \quad , \quad h[n]*h_1[n]=\delta[n]$$

مثال: یک سیستم LTI گسسته زمان با پاسخ ضربه رسم شده در زیر مفروض است. پاسخ ضربه وارون این سیستم را بیابید که: الف) وارون علی باشد ب) وارون ضد علی باشد ج) وارون غیرعلی باشد



$$h[n]*h_1[n]=\delta[n] \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]h_1[n-k]=\delta[n]$$

$$h_1[n]-h_1[n-1]+2h_1[n-2]=\delta[n]$$

وارون علی : $h_1[n]=0 \quad n\leq -1$

$$\xrightarrow{\text{حل}} \begin{cases} h_1[n]=\delta[n]+h_1[n-1]-2h_1[n-2] \\ h_1[-1]=h_1[-2]=h_1[-3]=\dots=0 \end{cases}$$

$$h_1[n]=\delta[n]+h_1[n-1]-2h_1[n-2] \longrightarrow h_1[0]=1,\ h_1[1]=1,\ h_1[2]=-1$$

$$h_1[3]=-3,\ h_1[4]=-1,\ h_1[5]=5$$

$$h_1[6]=7,\ \dots$$

وارون ضدعلّی : $h_1[n]=0 \quad n\geq 1 \longrightarrow$ حل

$$\begin{cases} h_1[n-2]=\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{1}{2}h_1[n-1]-\frac{1}{2}h_1[n] \\ h_1[1]=h_1[2]=h_1[3]=\dots=0 \\ n-2=m \rightarrow h_1[m]=\frac{1}{2}\delta[m+2]+\frac{1}{2}h_1[m+1]-\frac{1}{2}h_1[m+2] \end{cases}$$

$$h_1[0]=0,\ h_1[-1]=0,\ h_1[-2]=\frac{1}{2},\ h_1[-3]=\frac{1}{4},\ h_1[-4]=\frac{-1}{8},\ h_1[-5]=\frac{-3}{16}$$

وارون غیرعلّی : $h_1[1]=a,\ h_1[2]=b$;

$$n\geq 3 \rightarrow h_1[n]=\delta[n]+h_1[n-1]-2h_1[n-2]$$

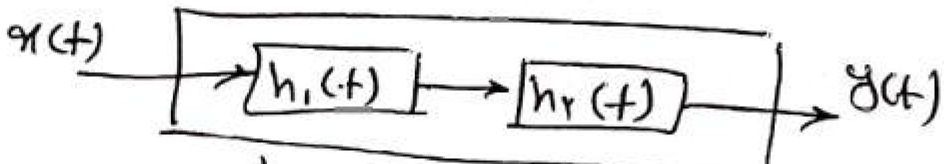
$$n\leq 0 \rightarrow h_1[n]=\frac{1}{2}\delta[n+2]+\frac{1}{2}h_1[n+1]-\frac{1}{2}h_1[n+2]$$

$$h_1[3]=b-2a,\ h_1[4]=b-2a-2b=-b-2a,\ h_1[5]=-b-2a-2b+4a=\dots$$

$$h_1[0]=\frac{1}{2}(a-b),\ h_1[-1]=\frac{1}{4}(a-b)-\frac{1}{2}a,\ h_1[-2]=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}(a-b)-\frac{1}{4}(a-b)=\dots$$

* پاسخ ضربه اتصال سیستم های LTI :

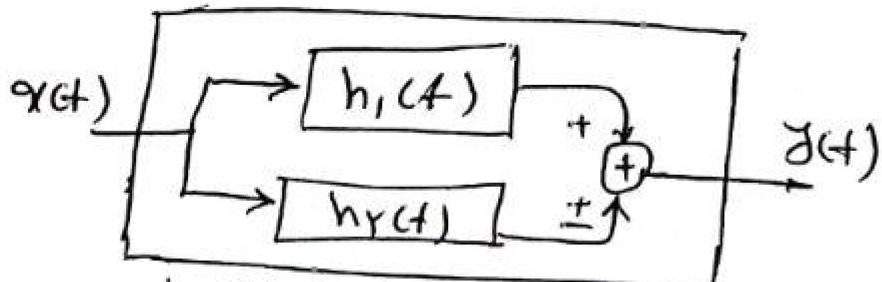
(1)- اتصال سری :



$$h(t)=h_1(t)*h_2(t)$$

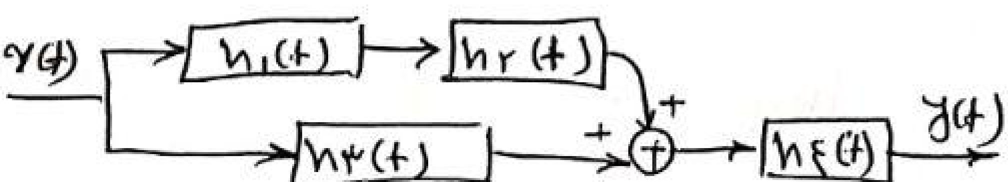
- اتصال سری سیستم های LTI خاصیت جابه‌جایی دارد.

(2)- اتصال موازی :



$$h(t)=h_1(t)\pm h_2(t)$$

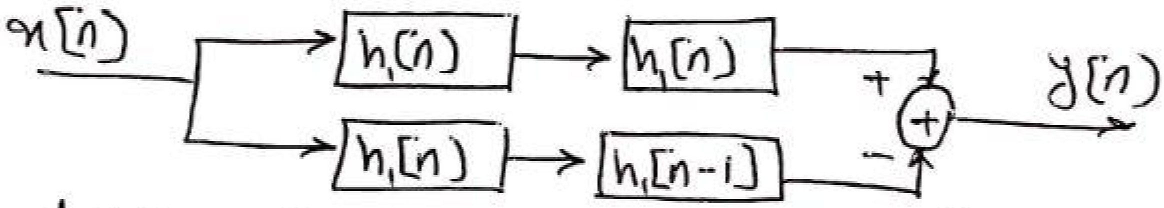
(3)- اتصال سری موازی :



$$h(t)=h_4(t)*[h_3(t)+(h_1(t)*h_2(t))]$$

(4)- اتصال با فیدبک : به دلیل نداشتن فرمول عمل معکوس کانولوشن فرمول صریحی برای $h(t)$ برحسب $h_1(t)$ و $h_2(t)$ نداریم.

مثال: پاسخ ضربه سیستم ترکیبی زیر را بیابید. هر سیستم LTI و علّی با پاسخ ضربه‌های داده شده هستند.



$$h_1[n]=n\,u(n)$$

$$h[n]=h_1*h_1-h_1*h_1[n-1]=h_1(n)*\underbrace{\left(h_1[n]-h_1[n-1]\right)}_{g(n)}=h_1(n)*u[n-1]$$

$$g[n]=n\,u(n)-(n-1)u[n-1]=\begin{cases}0 & n\le -1\\ 0 & n=0\\ 1 & n\ge 1\end{cases}=u[n-1]$$

$$\nabla h[n]=h_1(n)*(\nabla u[n-1])=h_1(n)*\delta[n-1]=h_1[n-1]=(n-1)u[n-1]$$

$$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}(k-1)u[k-1]\xrightarrow{n\le 0}h_1(n)=0$$

$$\xrightarrow{n\ge 1}\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{0}}_{u=0}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}}_{u=1}=\sum_{k=1}^{n}(k-1)=1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

$u=1:\ k-1\ge 0\rightarrow k\ge 1$

$u=0:\ k-1\le -1\rightarrow k\le 0$

$$h[n]=\begin{cases}0 & n\le 0\\ \frac{n(n-1)}{2} & n\ge 1\end{cases}=\frac{n(n-1)}{2}u[n-1]$$

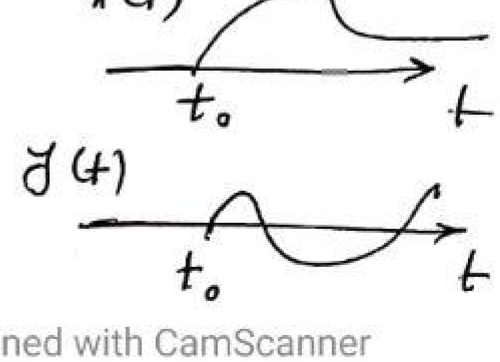
---

* سیستم‌های توصیف شده توسط معادله دیفرانسیل (دیفرنس) خطی با ضرایب ثابت:

$$\sum_{k=0}^{M}a_k\,y^{(k)}(t)=\sum_{k=0}^{N}b_k\,x^{(k)}(t)\quad,\quad\sum_{k=0}^{M}a_k\,y(n-k)=\sum_{k=0}^{N}b_k\,x[n-k]$$

- سیستم مذکور خطی است که با شرط سکون اولیه TI و علّی نیز می‌شود

- سکون اولیه (initial rest): تا زمانی که ورودی صفر است خروجی نیز صفر باشد



* مدارات RCL بدون منبع ولتاژ یا جریان داخلی و بدون ولتاژ اولیه خازن و بدون جریان اولیه سلف مثالی از این سیستم‌ها هستند.

- تحلیل سیستم های LTI پیوسته زمان در حوزه فرکانس :

* مقدار ویژه و سیگنال ویژه سیستم های LTI :

$$x_e(t) \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow y_e(t) = k_e \cdot x_e(t) \longrightarrow$$ سیگنال ویژه A

k_e : مقدار ویژه متناظر با سیگنال ویژه $x_e(t)$

$$e^{st} \longrightarrow \underset{h(t)}{\boxed{LTI}} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{=H(s)}$$

$H(s) =$ مقدار ویژه متناظر با سیگنال ویژه e^{st}

حالت خاص : $s = j\omega \longrightarrow$ سیگنال های ویژه $= \left\{ e^{j\omega t} \right\}_{\omega=-\infty}^{+\infty}$

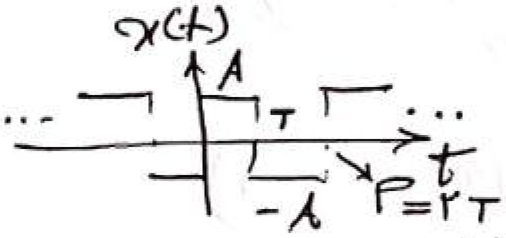
$$\underset{\text{دلخواه}}{x(t)} \overset{?}{=} \sum_k C_k e^{s_k t} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} LTI \\ h(t) \end{matrix}} \longrightarrow y(t) = \sum_k C_k H(s_k) e^{s_k t}$$

* نوشتن سیگنال دلخواه $x(t)$ به شکل ترکیب خطی از سیگنال های ویژه $\left\{ e^{j\omega t} \right\}_{\omega=-\infty}^{+\infty}$:

حالت اول : $x(t)$ متناوب با پریود P

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\omega_k t} \quad , \quad C_k = \frac{1}{P} \int_{P \text{ دوره}} x(t) e^{-j\omega_k t} dt \quad , \quad \omega_k = \frac{2k\pi}{P}$$

مثال :



$$\omega_k = \frac{2k\pi}{2T} = \frac{k\pi}{T}$$

$$C_k = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) e^{-j\frac{k\pi}{T}t} dt = \frac{1}{2T} \left[\int_0^T A e^{-j\frac{k\pi}{T}t} dt + \int_T^{2T} -A e^{-j\frac{k\pi}{T}t} dt \right] =$$

$$= \frac{A}{j2k\pi} \left[-e^{-j\frac{k\pi}{T}t} \Big|_0^T + e^{j\frac{k\pi}{T}t} \Big|_T^{2T} \right] = \frac{A}{j2k\pi} \left[-(-1)^k + 1 + 1 - (-1)^k \right] =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{زوج } k = 2m \\ \dfrac{2A}{j(2m+1)\pi} & \text{فرد } k = 2m+1 \end{cases}$$

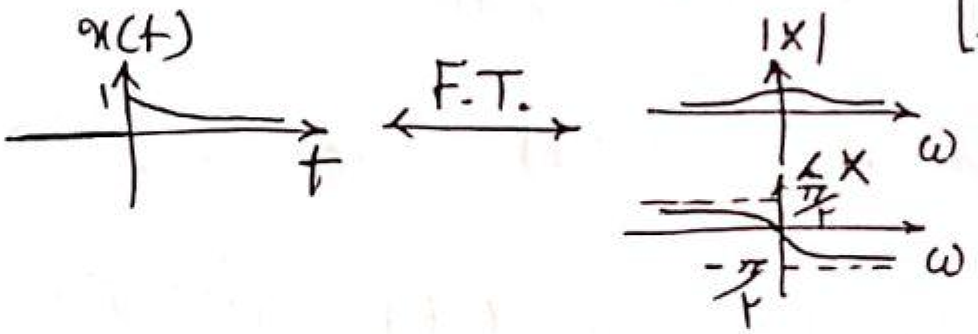
$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{2A}{j(2m+1)\pi} e^{j\frac{k\pi}{T}t}$$

حالت دوم : $x(t)$ نامتناوب و مطلقا انتگرال پذیر

$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega)$ زوج تبدیل فوریه :
$$\begin{cases} X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{cases}$$

* در ترکیب خطی سازنده سیگنال نامتناوب تمامی سیگنال های ویژه نقش دارند ولی در ترکیب خطی سازنده سیگنال متناوب فقط آن سیگنال های ویژه ای نقش دارند که فرکانس شان مضرب صحیحی از $\frac{2\pi}{P}$ باشد

$$x(t)=e^{-pt}u(t),\ p>0 \longleftrightarrow X(\omega)=?=\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-j\omega t}dt=\int_0 e^{-(p+j\omega)t}dt=$$
$$=\frac{-1}{j\omega+p}e^{-(p+j\omega)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{j\omega+p}\longrightarrow\begin{cases}|X|=\frac{1}{\sqrt{p^2+\omega^2}}\\ \angle X=-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)\end{cases}$$

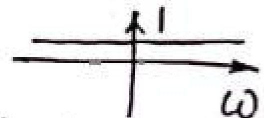


* مفهوم تبدیل فوریه :

$$x(t)=\int_0^{+\infty}[a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t]d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{X(\omega)}{2\pi}e^{j\omega t}d\omega$$
$$a(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left(X(\omega)+X(-\omega)\right)\ ,\ b(\omega)=\frac{j}{2\pi}\left(X(\omega)-X(-\omega)\right)$$

* تبدیل فوریه دامنه یا نقش یا میزان تاثیر هر فرکانس را در ساختن $x(t)$ نشان می دهد (تبدیل فوریه نشان می دهد که هر فرکانس با چه میزان تاثیر در داخل $x(t)$ وجود دارد)

$$FT\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

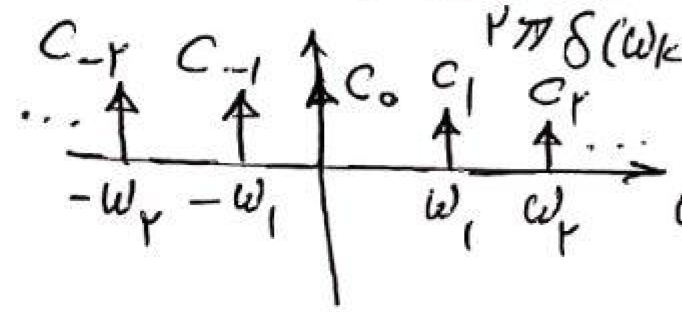


رابطه معکوس : $\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}d\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\alpha\beta}d\alpha=2\pi\delta(\beta)$

* تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب :

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\omega_k t} \longrightarrow X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\omega_k t} e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_k-\omega)t}\,dt}_{2\pi\delta(\omega_k-\omega)} \Rightarrow \boxed{X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi c_k \delta(\omega-\omega_k)}$$



$\longrightarrow$ نشان می‌دهد فقط فرکانس‌های ω_k با دامنه تاثیر c_k در ساختن سیگنال متناوب نقش دارند

$$-e^{-pt}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+p} \qquad p<0$$

* تبدیل فوریه $\sin\omega_c t$ و $\cos\omega_c t$:

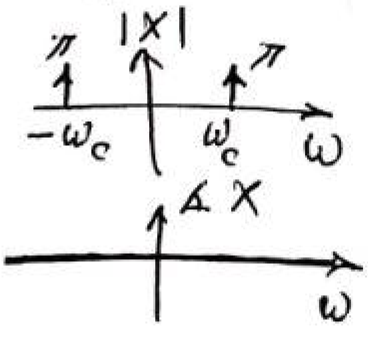
$$x(t)=\cos\omega_c t=\frac{1}{2}e^{j(\omega_c)t}+\frac{1}{2}e^{j(-\omega_c)t} \xleftrightarrow{FT} \begin{cases}\frac{X(\omega)}{2\pi}=\frac{1}{2} & \omega=\pm\omega_c\\ \frac{X(\omega)}{2\pi}=0 & \omega\neq\pm\omega_c\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}X(\omega)=\pi & \omega=\pm\omega_c\\ 0 & \omega\neq\pm\omega_c\end{cases} \Rightarrow \pi\delta(\omega-\omega_c)+\pi\delta(\omega+\omega_c)=X(\omega)$$

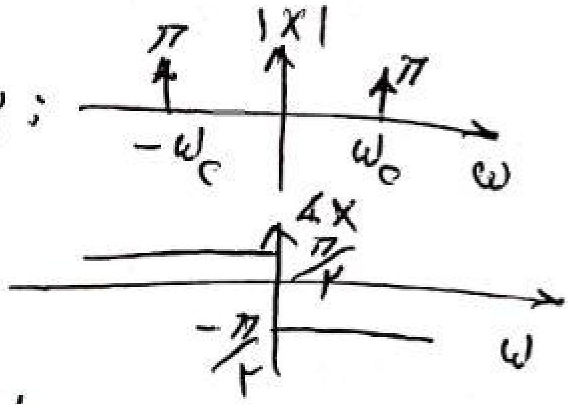
$$\cos\omega_c t \xleftrightarrow{FT} \pi\delta(\omega-\omega_c)+\pi\delta(\omega+\omega_c)$$

$$\sin\omega_c t \xleftrightarrow{FT} \frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_c)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_c)$$

برای $\cos\omega_c t$:

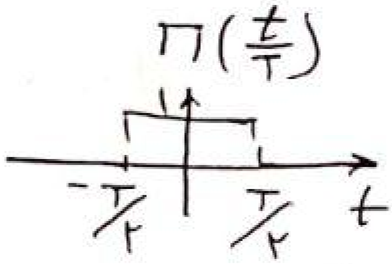


برای $\sin\omega_c t$:



$$\cos\left(\omega_c t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\omega_c t$$

$$\sin\left(\omega_c t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\omega_c t$$

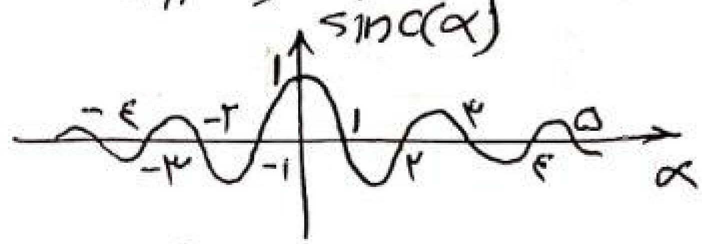


$$\longleftrightarrow ? = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t}dt = \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{-1}{j\omega}\Big(\underbrace{e^{-j\frac{T}{2}\omega} - e^{j\frac{T}{2}\omega}}_{-2j\sin(\frac{T}{2}\omega)}\Big) = \frac{2\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\omega} = \frac{T\sin(\pi\frac{T}{2\pi}\omega)}{\pi\frac{T}{2\pi}\omega} =$$

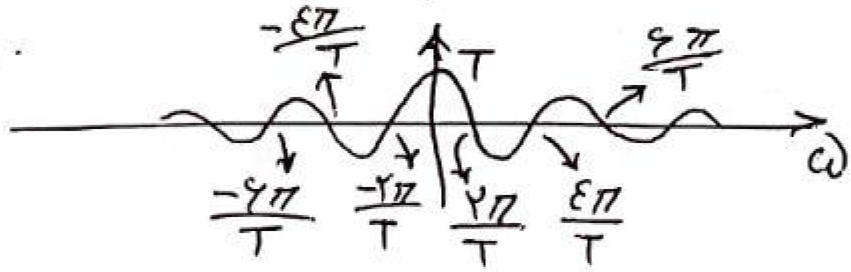
$$= T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{T}{2\pi}\omega\right)$$

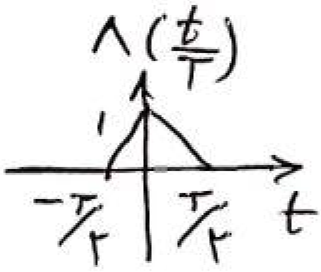
تابع سینک: $\mathrm{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$



$\mathrm{sinc}(\alpha)=0 \Longleftrightarrow \alpha = k$

$k=\pm1, \pm2, \dots$





$\longleftrightarrow \dots \mathrm{sinc}^2(\dots)$

- خواص چهارده گانه تبدیل فوریه:

(۱) - خطی بودن: $x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t) \longleftrightarrow X_3(\omega)=aX_1(\omega)+bX_2(\omega)$

همگنی: $ax_1(t) \longleftrightarrow aX_1(\omega)$

(۲) - تقارن هرمیتی: تبدیل فوریه سیگنال های حقیقی تقارن هرمیتی دارد

تبدیل فوریه سیگنال های حقیقی تابعی از $j\omega$ است $(X(j\omega))$: $X^*(\omega)=X(-\omega)$

- نتایج تقارن هرمیتی:

(۱) - اندازه تبدیل فوریه سیگنال های حقیقی تابعی زوج از ω و فاز آن تابعی فرد از ω است (شرط لازم و کافی)

$x(t)$ حقیقی $\Longleftrightarrow X(\omega)=|X|e^{j\angle X}$: $|X|$ زوج و $\angle X$ فرد

$e^{-pt}u(t),\ p>0 \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+p} \Longrightarrow$ اندازه $= \frac{1}{\sqrt{p^2+\omega^2}}$ زوج

فاز $= -\tan^{-1}(\frac{\omega}{p})$ فرد

(۲) - قسمت حقیقی تبدیل فوریه توابع (سیگنال‌های) حقیقی تابعی زوج از ω و قسمت موهومی آن تابعی فرد از ω است (شرط لازم و کافی):

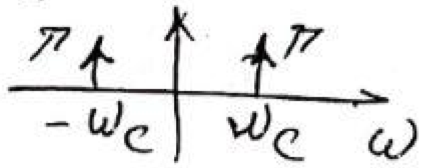
$$\text{حقیقی } x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)=Re(\omega)+jIm(\omega) \; ; \; Re(\omega) \text{ زوج و } Im(\omega) \text{ فرد}$$

$$\underset{p>0}{e^{-pt}u(t)} \longleftrightarrow \frac{1}{p+j\omega}\times\frac{p-j\omega}{p-j\omega}=\underbrace{\frac{p}{p^2+\omega^2}}_{\text{زوج}}+j\underbrace{\frac{-\omega}{p^2+\omega^2}}_{\text{فرد}}$$

(۳) - تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی و زوج تابعی حقیقی و زوج از ω است

$$\text{حقیقی و زوج } x(t) \Longleftrightarrow \text{حقیقی و زوج } X(\omega)=Re(\omega) \quad \text{(شرط لازم و کافی)}$$

$$\cos\omega_c t \longleftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_c)+\pi\delta(\omega+\omega_c)$$

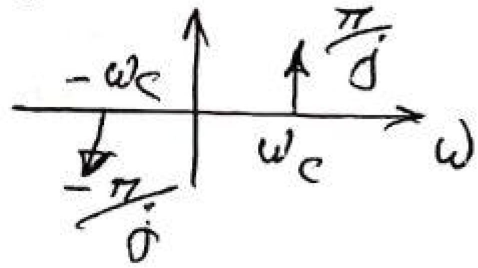


(۴) - تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی و فرد تابعی موهومی محض و فرد از ω است

(شرط لازم و کافی)

$$\text{حقیقی و فرد } x(t) \Longleftrightarrow \text{موهومی محض و فرد } X(\omega)=jIm(\omega)$$

$$\sin\omega_c t \longleftrightarrow \frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_c)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_c)$$



(۵)- اگر:

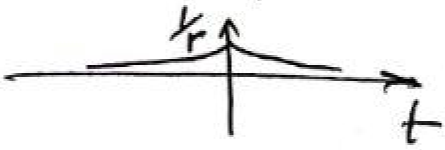
$$\text{حقیقی نه زوج و نه فرد } x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)=Re(\omega)+jIm(\omega)$$

آنگاه:

$$\text{قسمت زوج } x(t):\; x_e(t) \longleftrightarrow Re(\omega) \quad , \quad \text{قسمت فرد } x(t):\; x_o(t) \longleftrightarrow jIm(\omega)$$

$$\underset{p>0}{x(t)=e^{-pt}u(t)} \longrightarrow x_e(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)+x(-t)\right)=\frac{1}{2}e^{-pt}u(t)+\frac{1}{2}e^{pt}u(-t)=$$

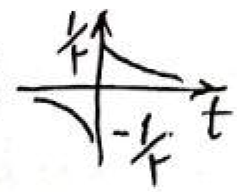
$$=\frac{1}{2}e^{-p|t|}$$



$$\longleftrightarrow \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$\boxed{\underset{p>0}{e^{-p|t|}} \longleftrightarrow \frac{2p}{p^2+\omega^2}}$$

$$x_o(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)-x(-t)\right)=\frac{1}{2}e^{-pt}u(t)-\frac{1}{2}e^{pt}u(-t)$$



$$\longleftrightarrow \frac{-j\omega}{p^2+\omega^2}$$

(۳)- شیفت در زمان :

$x_2(t)=x_1(t-t_0) \longleftrightarrow X_2(\omega)=e^{-jt_0\omega}\cdot X_1(\omega)$

$|X_2|=|X_1|$

$\measuredangle X_2=\measuredangle X_1-t_0\omega$

$FT\left\{e^{-2(t-3)}u(t-3)\right\}=\,? = \frac{e^{-j3\omega}}{j\omega+2}$

$FT\left\{e^{-2t}u(t)\right\}=\frac{1}{j\omega+2}$

* شیفت در زمان اندازه تبدیل فوریه را تغییر نمی دهد و فقط فاز آن را با خطی با شیب $-t_0$ جمع می کند.

(۴)- شیفت در فرکانس :

$x_2(t)=e^{j\omega_0 t}x_1(t) \longleftrightarrow X_2(\omega)=X_1(\omega-\omega_0)$

$FT^{-1}\left\{\frac{2}{1+(\omega+1)^2}\right\}=\,? = e^{-jt}\cdot e^{-|t|}$

$FT^{-1}\left\{\frac{2}{1+\omega^2}\right\}=e^{-|t|}$

(۵)- تغییر مقیاس :

$x_2(t)=x_1(at) \longleftrightarrow X_2(\omega)=\frac{1}{|a|}X_1\left(\frac{\omega}{a}\right)$

$x_2(t)=\frac{1}{|b|}x_1\left(\frac{t}{b}\right) \longleftrightarrow X_2(\omega)=X_1(b\omega)$

- انبساط و انقباض در زمان و فرکانس عکس یکدیگرند.
- هرقدر تغییرات سیگنال در زمان شدیدتر باشد آنگاه فرکانس های بالاتر در تبدیل فوریه آن ظاهر می شوند و هرقدر تغییرات سیگنال در زمان ملایم تر باشد فرکانس های پائین در تبدیل فوریه سیگنال ظاهر می گردند.

(فقط شامل فرکانس صفر) : $2\pi\delta(\omega) \longleftrightarrow 1$ (بدون تغییر)

(۶)- قرینه کردن :

$x_2(t)=x_1(-t) \longleftrightarrow X_2(\omega)=X_1(-\omega)$

$\underset{P>0}{e^{-Pt}u(t)} \longleftrightarrow \frac{1}{P+j\omega}$: $\underset{P>0}{e^{Pt}u(-t)} \longleftrightarrow \frac{1}{P-j\omega}$

$q=-P$: $\underset{q<0}{e^{-qt}u(-t)} \longleftrightarrow \frac{1}{-q-j\omega} \Rightarrow \underset{q<0}{-e^{-qt}u(-t)} \longleftrightarrow \frac{1}{q+j\omega}$

(۷)- مزدوج کردن :

$$x_2(t)=x_1^*(t) \longleftrightarrow X_2(\omega)=X_1^*(-\omega)$$

(۸)- مشتق در زمان :

$$x_2(t)=x_1^{(k)}(t) \longleftrightarrow X_2(\omega)=(j\omega)^k \cdot X_1(\omega)$$

$$k=1,2,3,\dots$$

$$FT^{-1}\left\{\frac{j\omega}{j\omega+1}\right\}=? = \frac{d}{dt}e^{-t}u(t)=-e^{-t}u(t)+\underbrace{e^{-t}\cdot\delta(t)}_{1}=1-e^{-t}u(t)$$

$$FT^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+1}\right\}=e^{-t}u(t)$$

(۹)- مشتق در فرکانس :

$$x_2(t)=(-jt)^k x_1(t) \longleftrightarrow X_2(\omega)=X_1^{(k)}(\omega)$$

$$FT^{-1}\left\{\frac{1}{(P+j\omega)^2}\right\}=? \quad P>0 \quad : \quad e^{-Pt}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{P+j\omega} \quad P>0$$

$$-jt\,e^{-Pt}u(t) \longleftrightarrow \frac{-j}{(P+j\omega)^2} \Rightarrow t\,e^{-Pt}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(P+j\omega)^2} \quad P>0$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-Pt}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(P+j\omega)^n} \quad P>0 \quad , \quad -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-Pt}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{(P+j\omega)^n} \quad P<0$$

$$n=1,2,3,\dots$$

(۱۰)- دوگانی (Duality) :

روابط دوگانی (Dual)

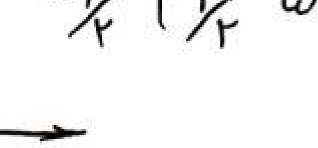
$$\begin{cases} x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \\ X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega) \end{cases}$$

$$FT\left\{\frac{1}{1+t^2}\right\}=? \quad : \quad \begin{cases} e^{-|t|} \longleftrightarrow \dfrac{2}{1+\omega^2} \\ \dfrac{2}{1+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-|-\omega|}=2\pi e^{-|\omega|} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \longleftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$$

$$FT\left\{\underset{a>0}{\mathrm{sinc}(at)}\right\}=? \quad :$$

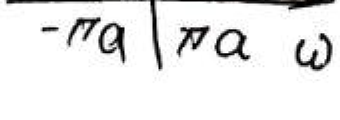
$$\longleftrightarrow T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{T}{2\pi}\omega\right)$$

$$T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{T}{2\pi}t\right) \longleftrightarrow$$



$T=2\pi a$: $\mathrm{sinc}(at) \longleftrightarrow$

و تقسیم طرفین بر T



$$FT^{-1}\{\cos a\omega\} = ?\qquad \begin{cases} \cos\omega_c t \longleftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_c)+\pi\delta(\omega+\omega_c) \\ \pi\delta(t-\omega_c)+\pi\delta(t+\omega_c) \longleftrightarrow 2\pi\cos\omega_c\cdot\omega \end{cases}$$

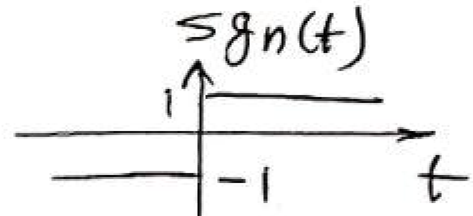
$$\frac{1}{2}\delta(t-a)+\frac{1}{2}\delta(t+a) \longleftrightarrow \cos a\omega$$

(۱۱) - انتگرال در زمان :

$$x_2(t)=\int_{-\infty}^{t} x_1(\lambda)d\lambda \longleftrightarrow X_2(\omega)=\frac{X_1(\omega)}{j\omega}+\pi X_1(0)\delta(\omega)=\begin{cases}\frac{X_1(\omega)}{j\omega} & \omega\neq 0\\ \pi X_1(0) & \omega=0\end{cases}$$

$$FT\{u(t)\}=?=FT\left\{\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)d\lambda\right\}=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$FT\{sgn(t)\}=?\qquad sgn(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$



$$sgn(t)=u(t)-u(-t)\longleftrightarrow \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)-\left(\frac{1}{-j\omega}+\pi\delta(-\omega)\right)=\frac{2}{j\omega}$$

$$FT\left\{\frac{1}{t}\right\}=?\qquad sgn(t)\longleftrightarrow\frac{2}{j\omega}$$

$$\frac{2}{jt}\longleftrightarrow 2\pi\,sgn(-\omega)\Rightarrow \frac{1}{t}\longleftrightarrow -j\pi\,sgn(\omega)$$

(۱۲) - رابطه پارسوال :

x(t) نامتناوب و مطلقا انتگرال پذیر :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2d\omega$$

رابطه انرژی پارسوال

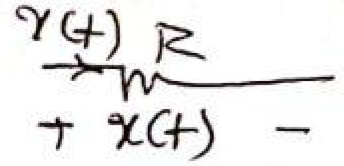
x(t) متناوب با دوره تناوب P :

$$\frac{1}{P}\int_{P(\text{دوره})}|x(t)|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|C_k|^2$$

رابطه توان پارسوال

Scanned with CamScanner

- سیگنال نوع توان و نوع انرژی:



$$P(t) = Rx^2(t) = \frac{1}{R}x^2(t)$$

توان لحظه ای مصرف شده در R — جریان — ولتاژ

$$\underbrace{P(t)}_{\text{توان لحظه ای موجود در سیگنال } x(t)} \triangleq |x(t)|^2 \longrightarrow \underbrace{P_{av}}_{\text{توان متوسط موجود در } x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt = \frac{1}{P}\int_{P}|x(t)|^2\,dt$$

x(t) متناوب با پریود P — روی P

$$\underbrace{P_{av}}_{\text{توان متوسط موجود در } x[n]} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 = \frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle}|x[n]|^2$$

x[n] متناوب با پریود N_0

تغییرات n روی N_0 مقدار متوالی

$n = 0, 1, \dots, N_0 - 1$

$n = 1, 2, \dots, N_0$

$$P = \frac{E}{T} \longrightarrow E = T\cdot P \longrightarrow \underbrace{E}_{\text{انرژی کل}} = \lim_{T\to\infty} T\cdot P$$

$$\underbrace{E}_{\text{انرژی کل سیگنال } x(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt \quad , \quad \underbrace{E}_{\text{انرژی کل سیگنال } x[n]} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2$$

* اگر توان متوسط سیگنالی محدود باشد آنگاه انرژی کل آن بی نهایت است و سیگنال را نوع توان گوئیم. سیگنال های متناوب کلی نوع توان هستند.

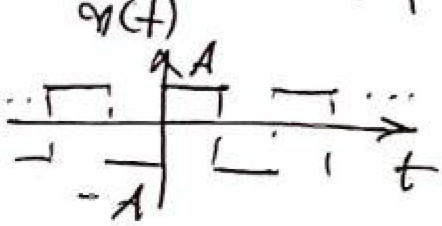
* اگر انرژی کل سیگنالی محدود باشد آنگاه توان متوسط آن صفر است و سیگنال را نوع انرژی گوئیم. سیگنال های نامتناوب مطلقاً انتگرال پذیر نوع انرژی هستند.

* اگر انرژی کل سیگنالی بی نهایت و توان متوسط آن صفر باشد سیگنال را نه نوع توان و نه نوع انرژی گوئیم.

* سیگنال نمی تواند هم نوع توان و هم نوع انرژی باشد.

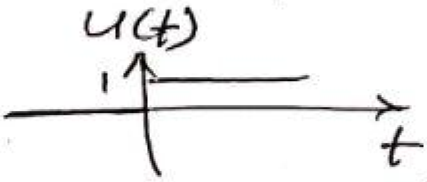
مثال: $x(t)=A_m\cos\omega_m t \rightarrow P_{av}=\langle A_m^2\cos^2\omega_m t\rangle=\langle \frac{A_m^2}{2}+\frac{A_m^2}{2}\cos 2\omega_m t\rangle$

$\rightarrow P_{av}=\langle\frac{A_m^2}{2}\rangle+\langle\frac{A_m^2}{2}\cos 2\omega_m t\rangle=\frac{A_m^2}{2}$



$\rightarrow P_{av}=\langle|x(t)|^2\rangle=\langle A^2\rangle=A^2$

$x(t)=e^{-pt}u(t),\ p>0 \rightarrow E=\int_0^{+\infty} e^{-2pt}dt=\frac{-1}{2p}e^{-2pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2p}$

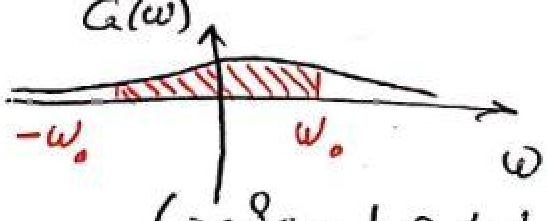


$\rightarrow E=\int_0^{+\infty}dt=\infty \rightarrow$ نوع انرژی نیست

$P_{av}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T/2}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2}=\frac{1}{2} \rightarrow$ نوع توان است

رابطه انرژی پارسوال: $E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)d\omega$

تابع $G(\omega)=\frac{1}{2\pi}|X(\omega)|^2$ را که تابعی حقیقی و در حالت واقعی زوج و غیر منفی می باشد را تابع چگالی طیف انرژی سیگنال $x(t)$ گوییم و بیان کننده چگونگی توزیع انرژی کل سیگنال در فرکانس های مختلف می باشد.



(سطح قرمز = α درصد سطح کل)

(α درصد انرژی کل سیگنال توسط فرکانس های مابین $\pm\omega_0$ حمل می شود)

مثال: ω_0 را به گونه ای بیابید که ٪۹۰ انرژی کل سیگنال $e^{-t}u(t)$ توسط فرکانس های مابین $\pm\omega_0$ حمل شود.

$E=\frac{1}{2} \rightarrow \%90E=\frac{9}{20},\ X(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$

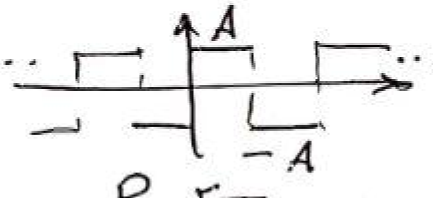
$G(\omega)=\frac{1}{2\pi(1+\omega^2)} \rightarrow \int_{-\omega_0}^{\omega_0}\frac{1}{2\pi(1+\omega^2)}d\omega=\frac{9}{20}\rightarrow\int_0^{\omega_0}\frac{d\omega}{1+\omega^2}=\frac{9\pi}{20}$

$\tan^{-1}\omega\Big|_0^{\omega_0}=\frac{9\pi}{20}\rightarrow\tan^{-1}\omega_0=\frac{9\pi}{20}\rightarrow\omega_0=\tan\frac{9\pi}{20}\simeq 6.3\ \frac{rad}{sec.}$

رابطه توان پارسوال: $P_{av}=\frac{1}{P}\int_{P} |x(t)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|C_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G[k]$ (روی P)

- تابع $G[k]=|C_k|^2$ را که روی k حقیقی غیرمنفی و در جهان واقعی زوج می باشد را تابع چگالی طیف توان $x(t)$ گوئیم که بیان کننده چگونگی توان متوسط (توزیع) سیگنال در kها (ω_kها) مختلف می باشد.

مثال: چند درصد توان متوسط موج مربعی زیر توسط هارمونیک اصلی آن ($\pm\omega_1$) حمل می شود؟

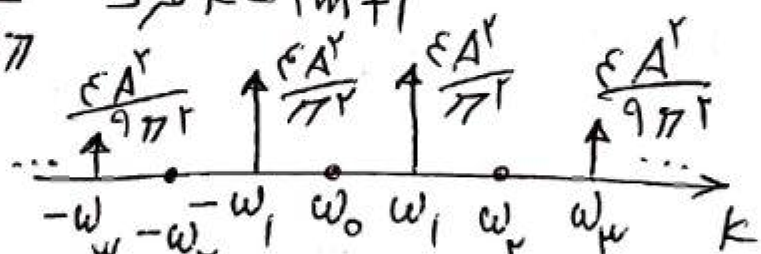


$P=2T$

$P_{av}=A^2$

$$C_k=\begin{cases}0 & k=2m \text{ زوج} \\ \frac{2A}{j(2m+1)\pi} & k=2m+1 \text{ فرد}\end{cases}$$

$$G[k]=\begin{cases}0 & k=2m \text{ زوج} \\ \frac{4A^2}{(2m+1)^2\pi^2} & k=2m+1 \text{ فرد}\end{cases}$$



مقدار توان حمل شده توسط هارمونیک اصلی $=\frac{4A^2}{\pi^2}+\frac{4A^2}{\pi^2}=\frac{8A^2}{\pi^2}$

درصد حمل توان توسط هارمونیک اصلی $=\frac{\frac{8A^2}{\pi^2}}{A^2}\times 100=\boxed{\frac{8}{\pi^2}\simeq \%81}$

درصد حمل توان توسط هارمونیک اول و سوم $=\frac{\frac{8A^2}{\pi^2}+\frac{8A^2}{9\pi^2}}{A^2}\times 100=\frac{80}{9\pi^2}\simeq \%90$

- **نکته**: اگر سیگنال نوع توان باشد بُرد سیگنال مستقیماً با توان متوسط آن ربط دارد و توان متوسط هم دیدیم که مستقیماً با مجذور دامنه سیگنال ربط دارد بنابراین برای ازدیاد بُرد یک سیگنال می بایست دامنه سیگنال تقویت شود به گونه ای که اگر دامنه ۲ برابر شود بُرد ۴ برابر می گردد.

۱۳) – کانولوشن در زمان ،

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_3(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

۱۴) – ضرب در زمان :

$$x_3(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \longleftrightarrow X_3(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X_1(\omega) * X_2(\omega)\right]$$

مثال : $FT\{x_2(t) = x_1(t) \cdot \cos\omega_c t\} = ? = \frac{1}{2\pi}\left[X_1(\omega) * \left(\pi\delta(\omega-\omega_c) + \pi\delta(\omega+\omega_c)\right)\right]$

$$= \frac{1}{2} X_1(\omega) * \delta(\omega-\omega_c) + \frac{1}{2} X_1(\omega) * \delta(\omega+\omega_c) = \frac{1}{2} X_1(\omega-\omega_c) + \frac{1}{2} X_1(\omega+\omega_c)$$

$$x_1(t) \cdot \cos\omega_c t \longleftrightarrow \frac{1}{2} X_1(\omega-\omega_c) + \frac{1}{2} X_1(\omega+\omega_c)$$

$$x_1(t) \sin\omega_c t \longleftrightarrow \frac{1}{2j} X_1(\omega-\omega_c) - \frac{1}{2j} X_1(\omega+\omega_c)$$

* تحلیل سیستم های LTI پیوسته زمان در حوزه فرکانس :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$y(t) = FT^{-1}\{Y(\omega)\}$$

مثال ، پاسخ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-t}u(t)$ را به ورودی $x(t) = e^{-2t}u(t)$ بیابید.

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \quad , \quad X(\omega) = \frac{1}{2+j\omega}$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{-1}{2+j\omega}$$

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) \cdot u(t)$$

- پاسخ فرکانسی سیستم Frequancy Response :

$$H(\omega) = FT\{h(t)\} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

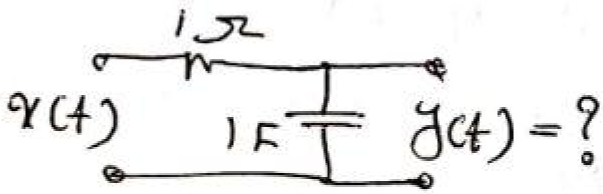
* بیان کننده چگونگی پاسخ سیستم به تک فرکانس های ورودی
* سیستم های پایدار، قطعاً پاسخ فرکانسی دارند.

$$A_m \cos(\omega_m t + \phi_m) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(\omega) \end{matrix}} \longrightarrow A_m |H(\omega_m)| \cos(\omega_m t + \phi_m + \angle H(\omega_m))$$

$$A_m \sin(\omega_m t + \phi_m) \longrightarrow A_m |H(\omega_m)| \sin(\omega_m t + \phi_m + \angle H(\omega_m))$$

$$A_m e^{j(\omega_m t + \phi_m)} \longrightarrow |H(\omega_m)| A_m e^{j(\omega_m t + \phi_m + \angle H(\omega_m))}$$

- پاسخ مدار زیر را به ورودی $x(t) = 2\cos t - 4\sin(100t)$ را بیابید



$$h(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\angle H = -\tan^{-1}\omega$$

$$\begin{cases} |H(1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \angle H(1) = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} |H(100)| \simeq 0.01 \\ \angle H(100) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - 0.04 \sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$Y = X \cdot H$$

$$|Y| = |X| \cdot |H|$$

$$\angle Y = \angle X + \angle H$$

- نمودار Bode و مقدار دسیبل:

$$0 < x \rightarrow x_{dB} = \begin{cases} 20 \log x & \text{x جریان یا ولتاژ} \\ 10 \log x & \text{x توان} \end{cases}$$

$$0 < x < 1 \longrightarrow -\infty < x_{dB} < 0$$

$$1 < x < +\infty \longrightarrow 0 < x_{dB} < +\infty$$

$$x = 1 \rightarrow x_{dB} = 0$$

$$x = 10 \rightarrow x_{dB} = 20\,dB$$

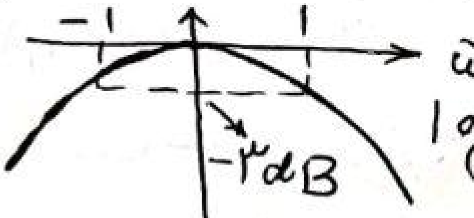
$$x = 100 \rightarrow x_{dB} = 40\,dB$$

- حدوداً هر ۱۲٪ افزایش مقدار مطلق برابر 1dB افزایش است

$$x = 1.12 \rightarrow x_{dB} = 1\,dB$$

$$|Y|_{dB} = |X|_{dB} + |H|_{dB}$$

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \longrightarrow |H|_{dB} = -10\log(1+\omega^2)$$



$$\log 2 \simeq 0.3$$

- پاسخ فرکانسی سیستم های توصیف شده توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$\sum_{k=0}^{M} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k x^{(k)}(t) \longrightarrow \sum_{k=0}^{M} a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{M} a_k (j\omega)^k} = \frac{\text{چند جمله ای درجه } N \text{ روی } j\omega}{\text{چند جمله ای درجه } M \text{ روی } j\omega} = H(j\omega)$$

$$h(t) = FT^{-1}\{H(j\omega)\}$$

- تجزیه $H(j\omega)$ به کسرهای جزئی به منظور محاسبه $h(t)$:

حالت اول : $N \geq M$ $(N-M=k)$: چند جمله ای صورت را به مخرج تقسیم می کنیم :

$$H(j\omega) = C_k (j\omega)^k + \cdots + C_1 (j\omega) + C_0 + \frac{\text{چند جمله ای درجه } M-1}{\text{چند جمله ای درجه } M}$$

حالت دوم : $M > N$: M ریشه چند جمله ای مخرج را حساب می کنیم

حالت الف
بدون ریشه تکراری : $P_1 , P_2 , \ldots , P_M$

$$H(j\omega) = \frac{k_1}{j\omega - P_1} + \frac{k_2}{j\omega - P_2} + \cdots + \frac{k_M}{j\omega - P_M}$$

k_i مانده در قطب ساده P_i است :

$$\underset{i=1,\ldots,M}{k_i} = (j\omega - P_i) H(j\omega) \Big|_{j\omega = P_i} = \frac{\text{مشتق صورت } H \text{ روی } j\omega}{\text{مخرج } H} \Bigg|_{j\omega = P_i}$$

حالت ب
بعضی ریشه ها تکراری : $P_1 , P_1 , P_2 , P_2 , P_2 , P_3 , P_4 , \ldots , P_{M-3}$

$$H(j\omega) = \frac{k_{11}}{j\omega - P_1} + \frac{k_{12}}{(j\omega - P_1)^2} + \frac{k_{21}}{j\omega - P_2} + \frac{k_{22}}{(j\omega - P_2)^2} + \frac{k_{23}}{(j\omega - P_2)^3} + \frac{k_3}{j\omega - P_3} + \cdots + \frac{k_{M-3}}{j\omega - P_{M-3}}$$

- ضرایب $k_3 , k_4 , \ldots , k_{M-3}$ مانند حالت الف حساب می شوند.

برای k_{11} و k_{12} : $\varphi_1(j\omega) = (j\omega - p_1)^2 H(j\omega) \rightarrow \begin{cases} k_{11} = \frac{1}{1!}\varphi_1'(j\omega)\Big|_{j\omega=p_1} \\ k_{12} = \frac{1}{0!}\varphi_1^{(0)}(j\omega)\Big|_{j\omega=p_1} = \varphi_1(p_1) \end{cases}$

برای k_{21} و k_{22} و k_{23} : $\varphi_2(j\omega) = (j\omega - p_2)^3 H(j\omega)$

دفعات تکرار ریشه = مرتبه مشتق + توان مخرج

$$\rightarrow \begin{cases} k_{21} = \frac{1}{2!}\varphi_2''(j\omega)\Big|_{j\omega=p_2} \\ k_{22} = \frac{1}{1!}\varphi_2'(j\omega)\Big|_{j\omega=p_2} = \varphi_2'(p_2) \\ k_{23} = \frac{1}{0!}\varphi_2^{(0)}(j\omega)\Big|_{j\omega=p_2} = \varphi_2(p_2) \end{cases}$$

- فرمول های تبدیل فوریه معکوس :

$$\left.\begin{aligned} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-pt}u(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{(j\omega+p)^n} \quad p>0 \\ -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-pt}u(-t) &\longleftrightarrow \frac{1}{(j\omega+p)^n} \quad p<0 \end{aligned}\right\}$$

$n=1,2,\dots$

ریشه حقیقی مرتبه n در $-p$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}2e^{-Re(p)t}\left(Re(k)\cos Im(p)t + Im(k)\sin Im(p)t\right)u(t)$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{k}{(j\omega+p)^n} + \frac{k^*}{(j\omega+p^*)^n} \quad p>0 \qquad n=1,2,\dots$$

$$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}2e^{-Re(p)t}\left(Re(k)\cos Im(p)t + Im(k)\sin Im(p)t\right)u(-t)$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{k}{(j\omega+p)^n} + \frac{k^*}{(j\omega+p^*)^n} \quad p<0 \qquad n=1,2,\dots$$

ریشه های زوج مزدوج مختلط مرتبه n در $-p, -p^*$

$$\delta^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n$$

- پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی سیستم LTI علی توصیف شده توسط معادله دیفرانسیل زیر را بیابید:

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x'(t)+x(t)$$

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega)+1}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6}=\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)(j\omega+3)}=\frac{k_1}{j\omega+2}+\frac{k_2}{j\omega+3}$$

$$k_{1,2}=\frac{j\omega+1}{2(j\omega)+5}\Big|_{j\omega=-2,-3}=-1,2 \quad \text{یا} \quad \begin{cases} k_1=\frac{j\omega+1}{j\omega+3}\Big|_{j\omega=-2}=-1 \\ k_2=\frac{j\omega+1}{j\omega+2}\Big|_{j\omega=-3}=2 \end{cases}$$

$$h(t)=-e^{-2t}u(t)+2e^{-3t}u(t)$$

- همان مثال قبل برای سیستم:

$$y''(t)+y'(t)+y(t)=x'''(t)$$

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega)^3}{(j\omega)^2+(j\omega)+1}=(j\omega)-1+\frac{1}{(j\omega)^2+(j\omega)+1}=j\omega-1+\frac{k_1}{j\omega-P_1}+\frac{k_1^*}{j\omega-P_1^*}$$

$$P_1,P_1^*=\frac{-1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k_1=\frac{1}{2(j\omega)+1}\Big|_{j\omega=\frac{-1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}=j\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$h(t)=\delta'(t)-\delta(t)+2e^{-\frac{1}{2}t}\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

- پاسخ ضربه و معادله دیفرانسیل سیستم LTI علی با پاسخ فرکانسی زیر را بیابید

$$H(j\omega)=\frac{j\omega}{(j\omega+1)^2(j\omega+2)}=\frac{j\omega}{(j\omega)^3+4(j\omega)^2+5(j\omega)+2}=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

$$y'''(t)+4y''(t)+5y'(t)+2y(t)=x'(t)$$

$$H(j\omega)=\frac{k_{11}}{j\omega+1}+\frac{k_{12}}{(j\omega+1)^2}+\frac{k_2}{j\omega+2} \qquad k_2=\frac{j\omega}{(j\omega+1)^2}\Big|_{j\omega=-2}=-2$$

$$\varphi_1(j\omega)=(j\omega+1)^2 H(j\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+2}\rightarrow \begin{cases} k_{11}=\dfrac{j\omega+2-j\omega}{(j\omega+2)^2}\Big|_{j\omega=-1}=2 \\ k_{12}=\dfrac{j\omega}{j\omega+2}\Big|_{j\omega=-1}=-1\end{cases}$$

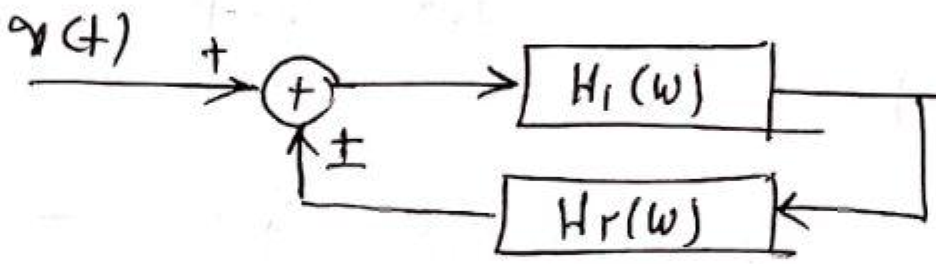
$$H(j\omega)=\frac{2}{j\omega+1}+\frac{-1}{(j\omega+1)^2}+\frac{-2}{j\omega+2}\rightarrow h(t)=2e^{-t}u(t)-te^{-t}u(t)-2e^{-2t}u(t)$$

- پاسخ فرکانسی اتصال سیستم ها:

اتصال سری: $h(t)=h_1(t)*h_2(t)\longrightarrow H(\omega)=H_1(\omega)\cdot H_2(\omega)$

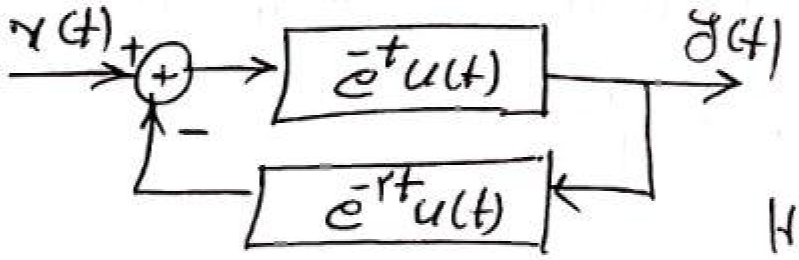
اتصال موازی: $h(t)=h_1(t)\pm h_2(t)\longrightarrow H(\omega)=H_1(\omega)\pm H_2(\omega)$

اتصال با فیدبک:



$$H(\omega)=\frac{H_1(\omega)}{1\mp H_1(\omega)\cdot H_2(\omega)}$$

- پاسخ ضربه سیستم ترکیبی زیر را بیابید:



$$H_1(\omega)=\frac{1}{j\omega+1},\quad H_2(\omega)=\frac{1}{j\omega+2}$$

$$H(\omega)=\frac{\frac{1}{j\omega+1}}{1+\frac{1}{(j\omega)+1}\cdot\frac{1}{j\omega+2}}=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+3(j\omega)+3}$$

$$P_1, P_1^*=\frac{-3}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}\longrightarrow k_1=\frac{j\omega+2}{2(j\omega)+3}\Big|_{j\omega=-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}-j\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$h(t)=2e^{-\frac{3}{2}t}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

- پاسخ فرکانسی وارون سیستم LTI:

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t)\longrightarrow H(\omega)\cdot H_1(\omega)=1\longrightarrow H_1(\omega)=\frac{1}{H(\omega)}$$

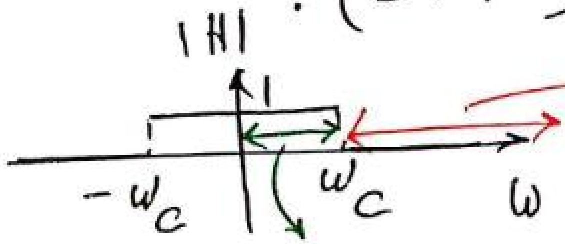
- پاسخ ضربه وارون پایدار سیستم مثال قبل را بیابید

$$H_1(\omega)=\frac{(j\omega)^2+3(j\omega)+3}{j\omega+2}=(j\omega)+1+\frac{1}{j\omega+2}\rightarrow h_1(t)=\delta'(t)+\delta(t)+e^{-2t}u(t)$$

- انواع فیلترهای ایده آل

فیلتر یک سیستم LTI است که اندازه پاسخ فرکانسی آن به گونه ای است که در بعضی از فرکانس ها صفر است و در نتیجه آن فرکانس ها را فیلتر می کند

(۱)- فیلتر پایین گذر Low Pass Filter (LPF):

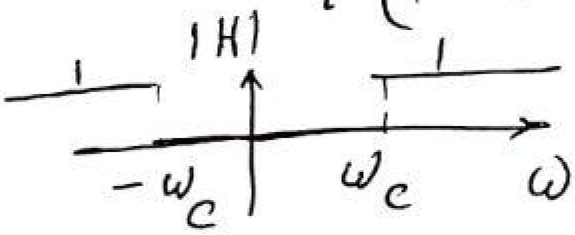


ω_c = cut frequency = فرکانس قطع

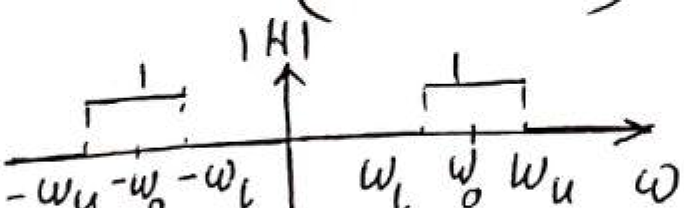
Pass Band باند عبور

$Bandwidth = B = B_T = \omega_c$

(۲)- فیلتر بالاگذر High Pass Filter (HPF):

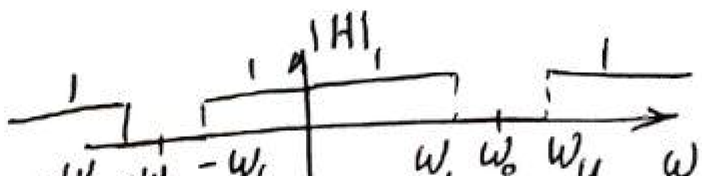


(۳)- فیلتر میان گذر Band Pass Filter (BPF):

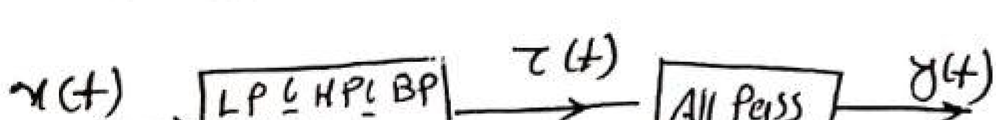


$B_T = \omega_u - \omega_l$

(۴)- فیلتر میان نگذر Band Stop Filter (BSF):



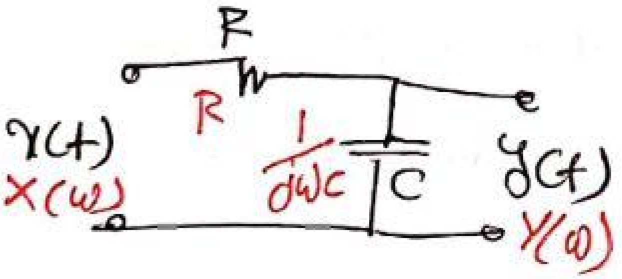
(۵)- فیلتر تمام گذر All Pass Filter: به منظور تصحیح فاز



* تمامی فیلترهای ایده آل غیر علّی و غیر قابل ساخت می باشند و عملاً باید تقریب بجوییم

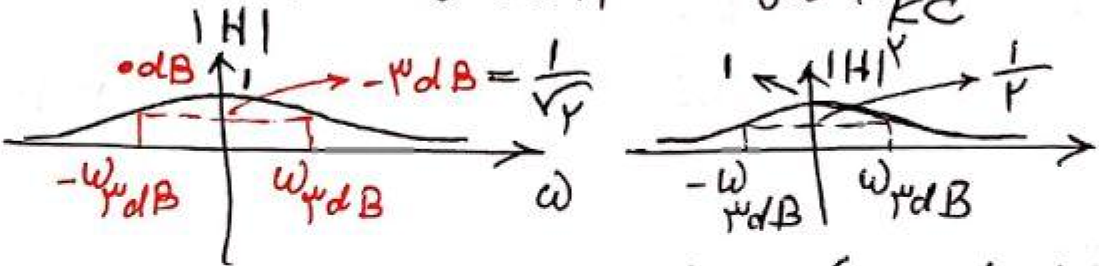
- فیلترهای ساده تقریبی علّی قابل ساخت:

(۱)- LPF مرتبه اول:



$$Y(\omega)=X(\omega)\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}$$

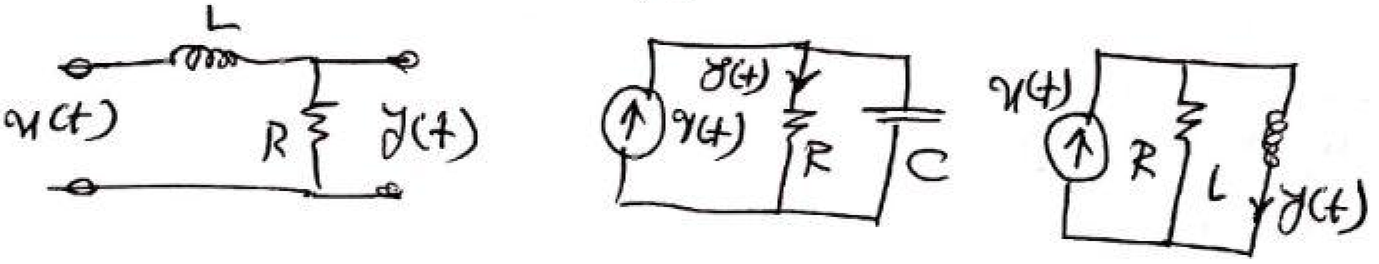
$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{1}{j\omega RC+1}=\frac{\frac{1}{RC}}{j\omega+\frac{1}{RC}}\longrightarrow |H|=\frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\frac{1}{R^2C^2}+\omega^2}}$$



- فرکانس قطع 3dB:

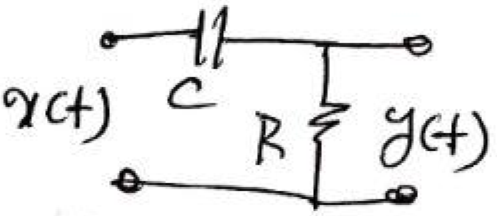
فرکانسی است که دامنه اندازه پاسخ فرکانسی فیلتر به میزان 3dB از مقدار پیک افت پیدا کند یا مجذور اندازه پاسخ فرکانسی فیلتر نصف مقدار پیک شود.

$$|H|^2=\frac{\frac{1}{R^2C^2}}{\frac{1}{R^2C^2}+\omega^2}\Bigg|_{\omega=\omega_{3dB}}=\frac{1}{2}\longrightarrow \omega_{3dB}=\frac{1}{RC}$$



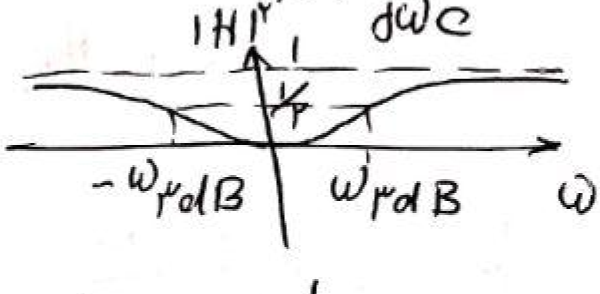
همتای LPF مرتبه اول:

(۲)- HPF مرتبه اول: خروجی در مدارات بالا از شاخه دیگر گرفته می‌شود



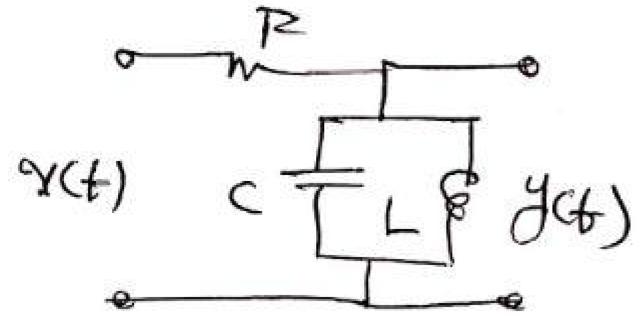
$$Y(\omega)=X(\omega)\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}}\longrightarrow H(\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+\frac{1}{RC}}$$

$$|H|^2=\frac{\omega^2}{\omega^2+\frac{1}{R^2C^2}}$$



$$|H|^2\Big|_{\omega=\omega_{3dB}}=\frac{1}{2}\longrightarrow \omega_{3dB}=\frac{1}{RC}$$

(۳)- BPF مرتبه دوم:

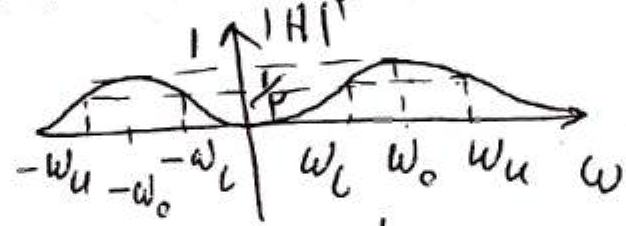


$$Y(\omega)=X(\omega)\frac{(j\omega L)\parallel\left(\frac{1}{j\omega C}\right)}{R+(j\omega L)\parallel\left(\frac{1}{j\omega C}\right)}$$

$$(j\omega L)\parallel\left(\frac{1}{j\omega C}\right)=\frac{\frac{L}{C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{j\omega L}{(j\omega)^2LC+1}$$

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{\frac{j\omega L}{(j\omega)^2LC+1}}{R+\frac{j\omega L}{(j\omega)^2LC+1}}=\frac{j\omega L}{RCL(j\omega)^2+L(j\omega)+R}=\frac{\frac{1}{RC}(j\omega)}{(j\omega)^2+\frac{1}{RC}j\omega+\frac{1}{LC}}$$

$$|H|^2=\frac{\frac{1}{R^2C^2}\omega^2}{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{1}{R^2C^2}\omega^2}$$



$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

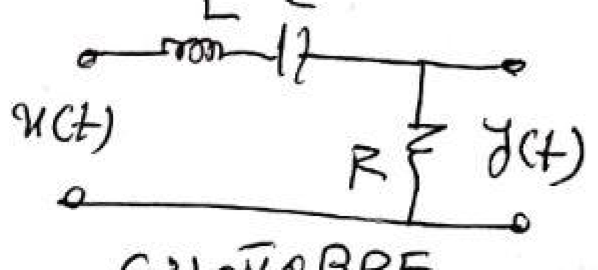
ω_0 وسط هندسی باند عبوری است که فرکانس های قطع ۳dB مشخص می کنند

$$\omega_0=\sqrt{\omega_l\cdot\omega_u}$$

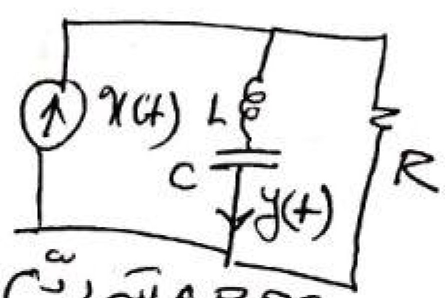
با فرض R و C و L نرمال $\longrightarrow |H|^2=\left.\frac{\omega^2}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}\right|_{\omega=\omega_{3dB}}=\frac{1}{2}$

$$2\omega_{3dB}^2=\omega_{3dB}^4-\omega_{3dB}^2+1\longrightarrow\omega_{3dB}^4-3\omega_{3dB}^2+1=0$$

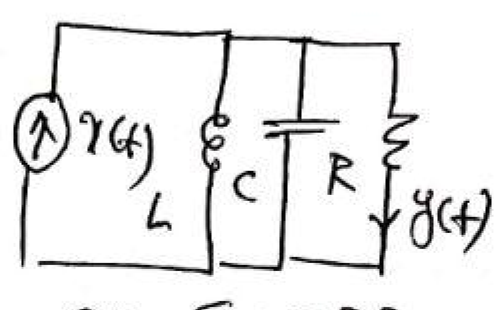
$$\longrightarrow\omega_{3dB}^2=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}\longrightarrow\omega_{3dB}=\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}=\pm1.618,\ \pm0.618$$



BPF مرتبه دوم

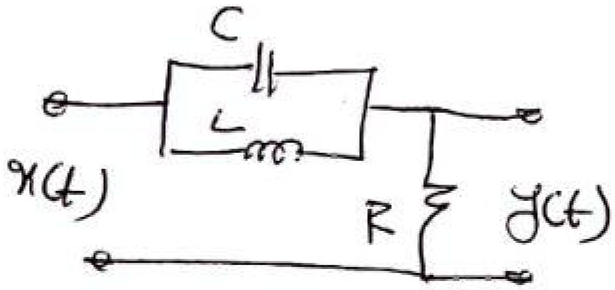


BPF مرتبه دوم



BPF مرتبه دوم

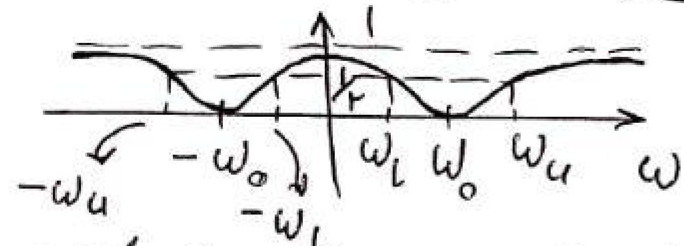
(۴)- BSF مرتبه دوم: در مدارات بالا خروجی از شاخه دیگر گرفته شود



$$Y(\omega)=X(\omega)\frac{R}{R+\frac{j\omega L}{(j\omega)^2LC+1}}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow H(\omega)=\frac{RCL(j\omega)^2+R}{RCL(j\omega)^2+L(j\omega)+R}=\frac{(j\omega)^2+\frac{1}{LC}}{(j\omega)^2+\frac{1}{RC}(j\omega)+\frac{1}{LC}}$$

$$|H|^2=\frac{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2}{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{1}{R^2C^2}\omega^2}$$



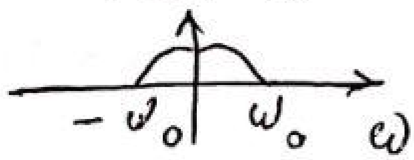
ω_0 وسط هندسی باند حذفی است که فرکانس های قطع ۳dB مشخص کرده اند

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\sqrt{\omega_u\cdot\omega_L}$$

- سیگنال باند پایه (Base Band) و باند میانی (Pass Band):

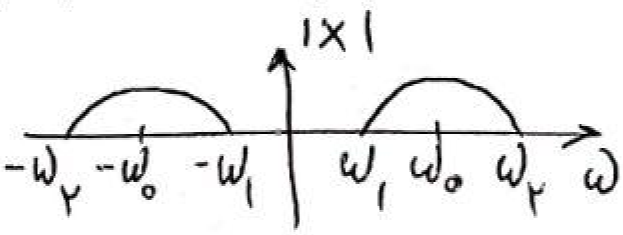
$x(t)\longleftrightarrow X(\omega)$:

$|X(\omega)|=0$
$|\omega|>\omega_0$ $\longrightarrow$ سیگنال $x(t)$ باند پایه با پهنای باند ω_0 است

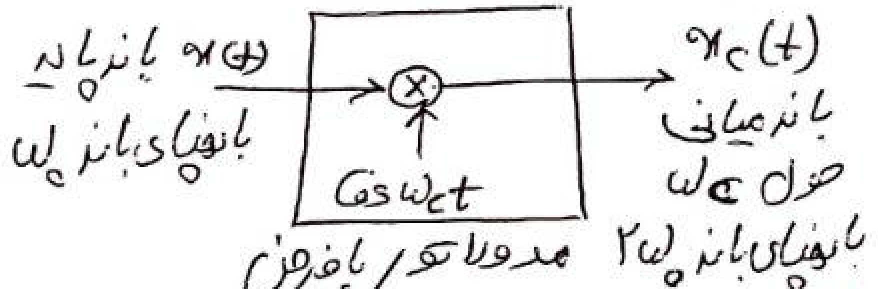


مثال: سیگنال $\mathrm{sinc}(at)$ باند پایه با پهنای باند πa رادیان بر ثانیه است و $\sin\omega_c t$ و $\cos\omega_c t$ باند پایه با پهنای باند ω_c هستند. سیگنال صحبت باند پایه با پهنای باند تقریبی 3-4KHz تا 10-15KHz می توانند فرض شود.

$|X(\omega)|=0$
$|\omega|<\omega_1$ $\longrightarrow$ سیگنال $x(t)$ باند میانی
$|\omega|>\omega_2$ حول ω_0 با پهنای باند $\omega_2-\omega_1$



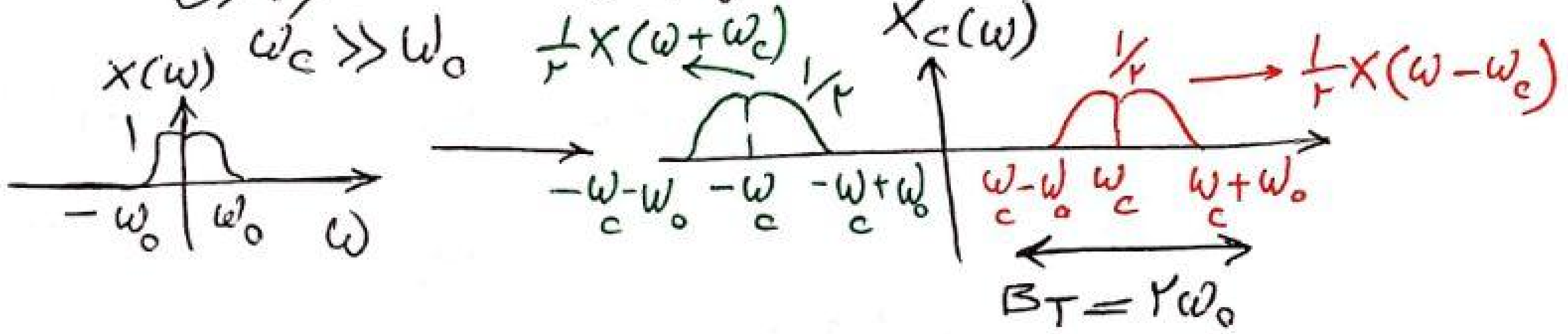
* مدولاسیون (Modulation): هرگونه تغییر باند فرکانسی سیگنال را در حالت کلی مدولاسیون گوئیم که معمولا تغییر به باند فرکانسی بالاتر را مدولاسیون و به باند فرکانسی پائین تر را دی مدولاسیون گوئیم.

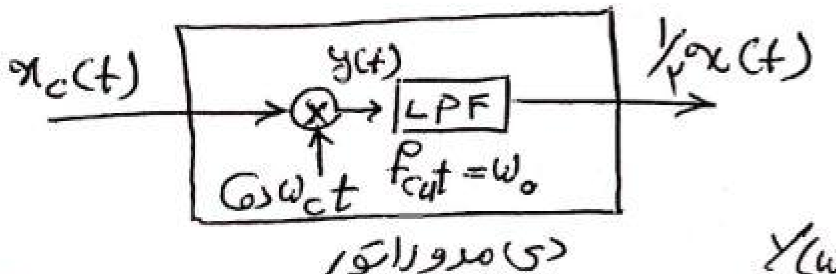


$$x_c(t) = x(t)\cos\omega_c t$$

$$X_c(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega-\omega_c) + \frac{1}{2}X(\omega+\omega_c)$$

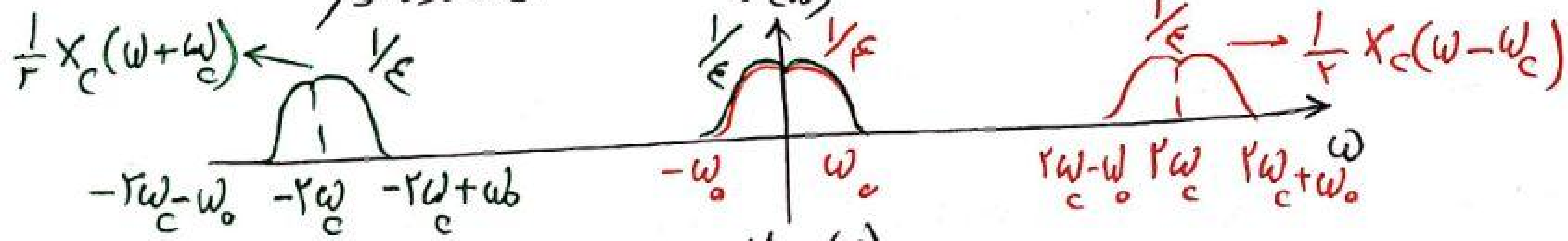
$\omega_c \gg \omega_0$

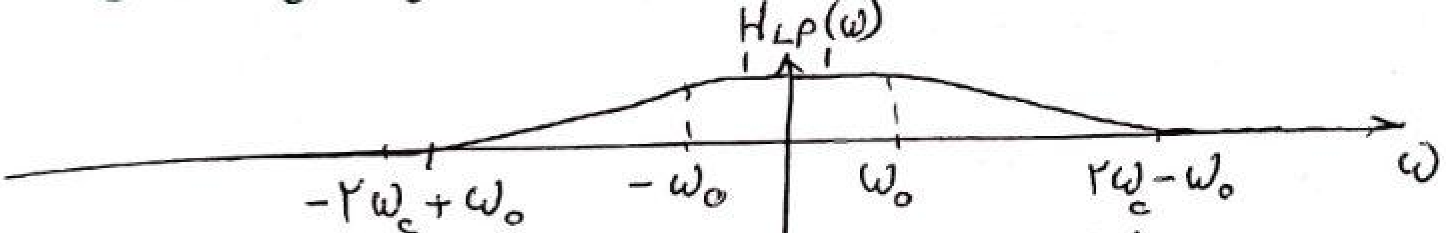




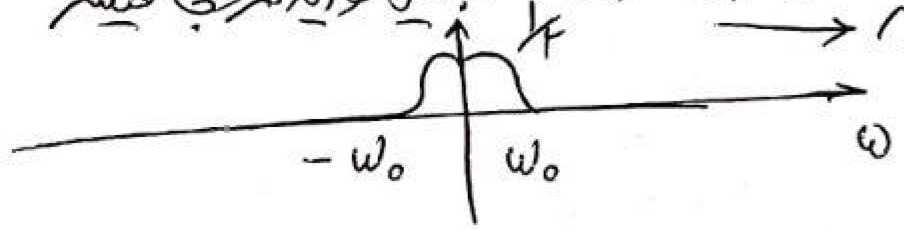
$$y(t) = x_c(t)\cdot\cos\omega_c t$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}X_c(\omega-\omega_c) + \frac{1}{2}X_c(\omega+\omega_c)$$





تبدیل فوریه خروجی فیلتر $= Y(\omega)\cdot H_{LP}(\omega)$ $\longrightarrow$ خروجی فیلتر $= \frac{1}{2}x(t)$



* تبدیل لاپلاس (Laplace Transform):

خاص: $s = j\omega \longrightarrow \left\{e^{j\omega t}\right\}_{\omega=-\infty}^{+\infty} \longrightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \longrightarrow$ تبدیل فوریه

عام: $s = \sigma + j\omega \longrightarrow \left\{e^{st}\right\} \longrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \longrightarrow$ تبدیل لاپلاس

ROC (ناحیه همگرایی) تبدیل لاپلاس مجموعه نقاطی از صفحه s است که به ازای آنها انتگرال تعریف کننده تبدیل لاپلاس همگرا است.

$\forall s \in ROC[X(s)] : |X(s)| < \underset{\text{محدود}}{M}$

رابطه تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس :

(۱) - اگر محور موهومی در ROC تبدیل لاپلاس باشه آنگاه تبدیل فوریه وجود دارد و داریم : $X(\omega)=X(s)\big|_{s=j\omega}$

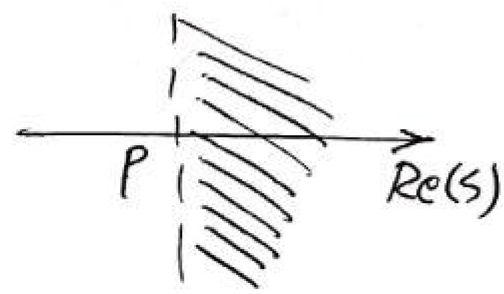
(۲) - اگر محور موهومی در ROC تبدیل لاپلاس نباشه آنگاه تبدیل فوریه وجود ندارد

(۳) - اگر محور موهومی مرز ROC تبدیل لاپلاس باشه آنگاه تبدیل فوریه وجود دارد ولی : $X(\omega)\neq X(s)\big|_{s=j\omega}$

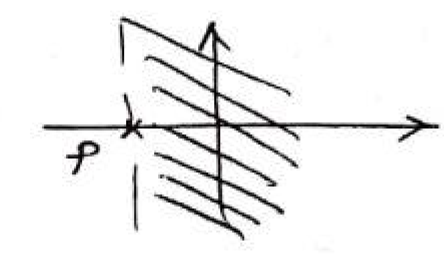
$$LT\{e^{pt}u(t)\}=?=\int_0^{+\infty} e^{pt}e^{-st}\,dt=\frac{1}{p-s}e^{(p-s)t}\Big|_0^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{p-s}e^{(p-\sigma)t}\cdot e^{-j\omega t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-p}$$

شرط همگرایی : $p-\sigma<0 \rightarrow \underline{Re(s)>p} \rightarrow ROC$



سه حالت مختلف :

$P<0$: 

: تبدیل فوریه موجود : $X(\omega)=\frac{1}{s-p}\Big|_{s=j\omega}=\frac{1}{j\omega-p}$

$P>0$: 

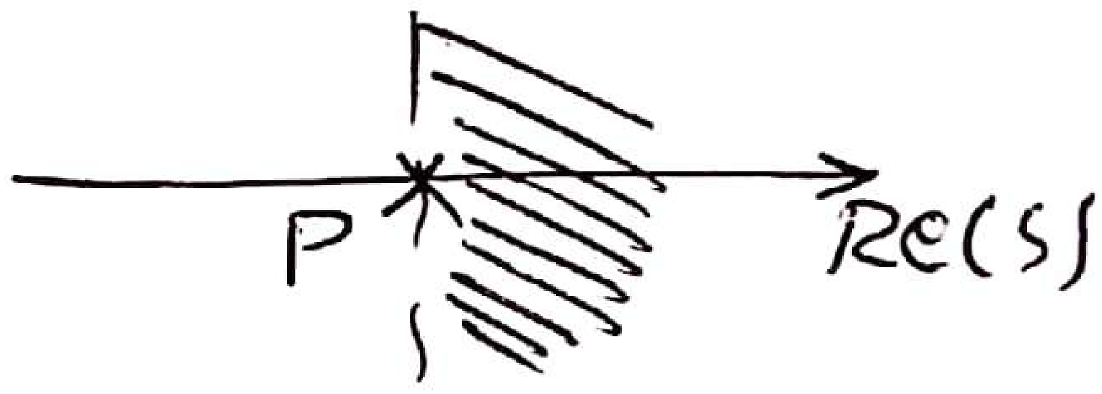
: تبدیل فوریه وجود ندارد

$P=0$: $(x(t)=u(t))$ 
: تبدیل فوریه موجود ولی

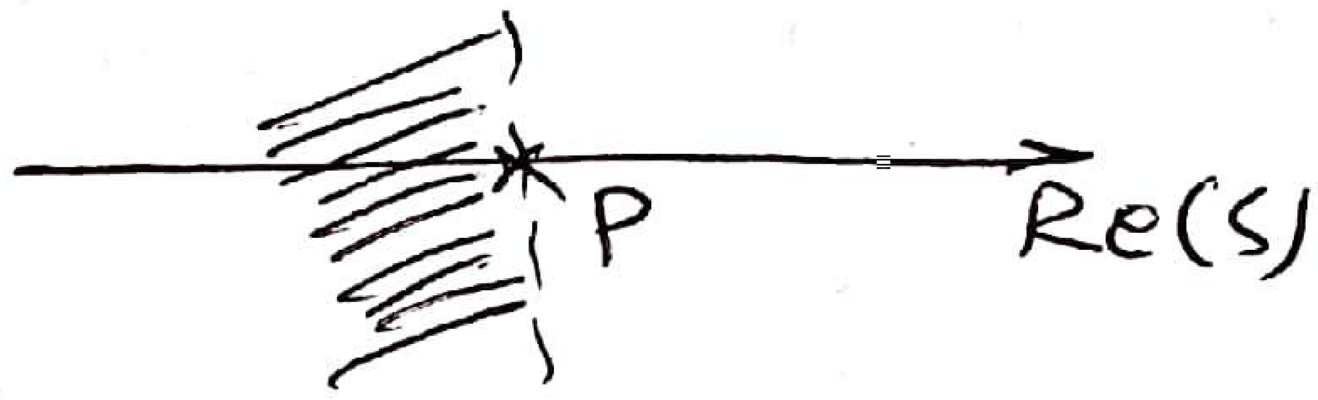
$$X(\omega)\neq\frac{1}{j\omega}$$

$$\left(X(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)$$

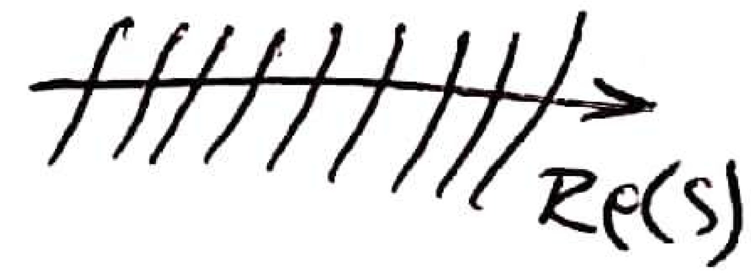
$e^{pt}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-p}$ ، $Re(s)>p$



$-e^{pt}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-p}$ ، $Re(s)<p$



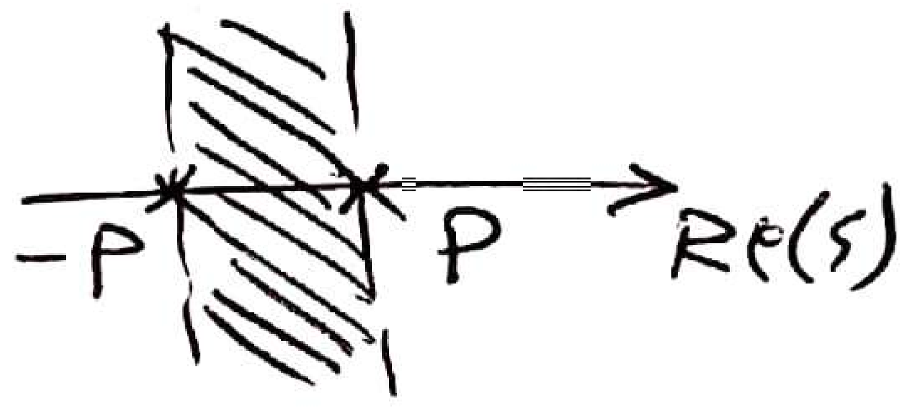
$LT\{\delta(t)\} = ? = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ ، $-\infty < Re(s) < +\infty$ کل صفحه



$LT\{e^{-p|t|}\} = ? = \int_{-\infty}^{0} e^{pt} e^{-st} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} e^{-st} dt =$

$= \frac{1}{p-s} e^{(p-\sigma)t} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{p+s} e^{-(p+\sigma)t} e^{-j\omega t} \Big|_{0}^{+\infty} =$

$= \frac{1}{p-s} + \frac{1}{p+s} = \frac{2p}{p^2 - s^2}$



$p-\sigma>0$ ، $p+\sigma>0 \longrightarrow Re(s)>-p$ ، $Re(s)<p$

$p<0$ تهی

$p>0$ $-p<Re(s)<p$

- صفر (zero) و قطب (Pole):

z_i صفر $X(s)$ است اگر : $X(z_i)=0$

p_i قطب $X(s)$ است اگر : $|X(p_i)|=\infty$

* قطب‌ها در ROC نمی‌توانند باشند و مرزهای ROC را قطب‌ها تعیین می‌کنند.

* اگر $X(s)=\frac{M(s)}{N(s)}$ باشد که صورت و مخرج دو چندجمله‌ای درجه m و n باشند آنگاه m ریشه صورت m صفر پایدار و n ریشه مخرج n قطب پایدار می‌باشند و به اندازه تفاضل m و n صفر یا قطب در ∞ وجود دارد.

$X(s)=\frac{s^2+4}{s^2+1}$
صفرها : $\pm j2$
قطب‌ها : $\pm j$

$X(s)=\frac{s}{s^2+9}$
صفرها : 0 و ∞
قطب‌ها : $\pm j3$

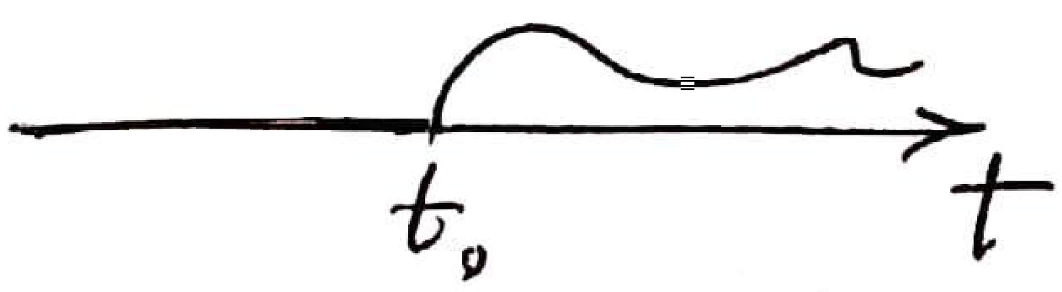
$X(s)=\frac{s^4-1}{s+2}$
صفرها : ± 1 ، $\pm j$
قطب‌ها : -2 ، ∞ ، ∞ ، ∞

$X(s)=\frac{2}{s^2+5s+6}$
صفرها : ∞ و ∞
قطب‌ها : -2 ، -3

- دسته‌بندی سیگنال‌ها از نظر استمرار زمانی :

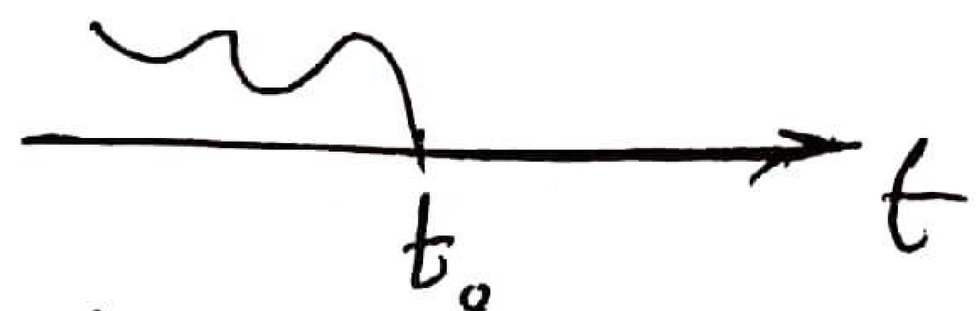
(۱) - سیگنال سمت راستی (Right side) :

$x(t)=f(t)u(t-t_0)$



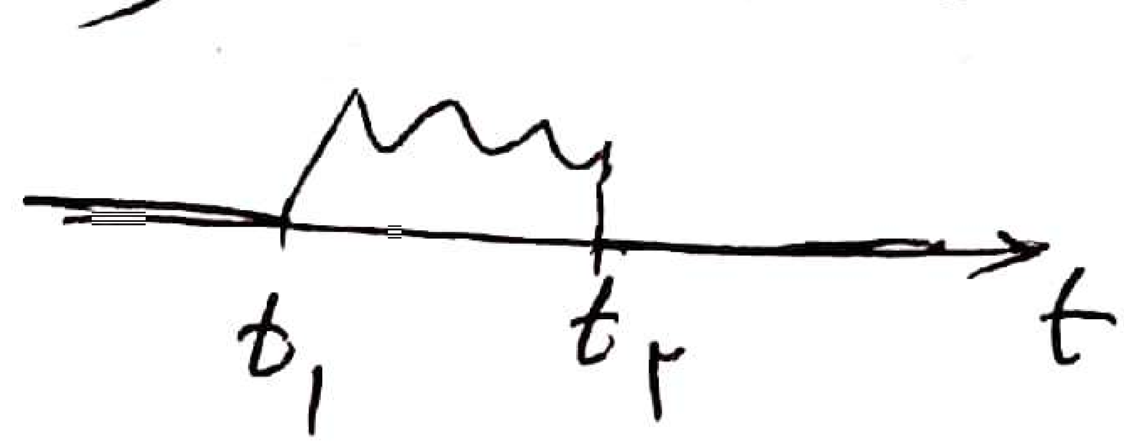
(۲) - سیگنال سمت چپی (Left side) :

$x(t)=f(t)u(-t+t_0)$



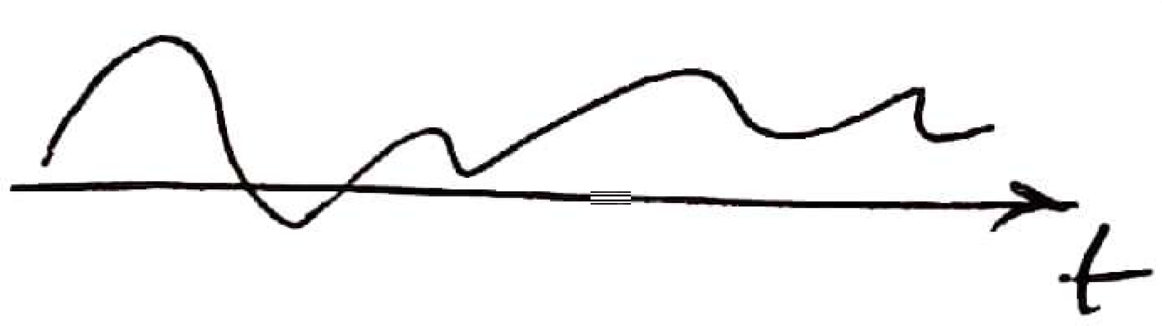
(۳) - سیگنال با استمرار محدود (Finite Duration) :

$x(t)=f(t)[u(t-t_1)-u(t-t_2)]$



(۴) - سیگنال دوطرفه (Double side) :

$x(t)=f(t)$



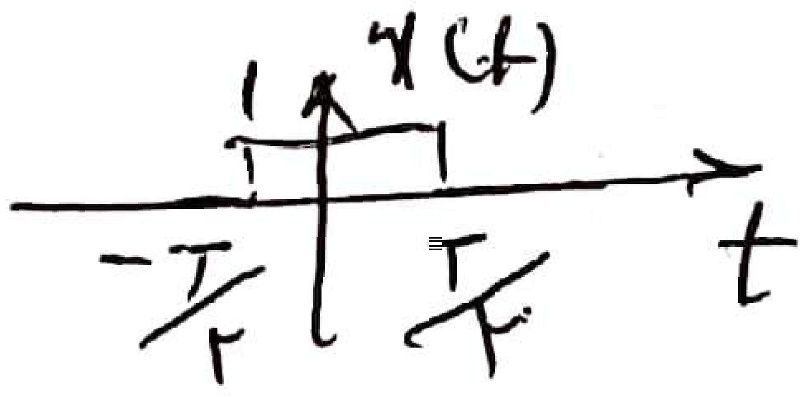
* سیگنال‌های جهان واقعی یا سمت راستی هستند و یا با استمرار محدود

- رابطه ROC تبدیل لاپلاس با استمرار زمانی سیگنال :

(۱) - اگر $x(t)$ سیگنالی سمت راستی باشد و بدانیم $X(s)$ به ازای یک s_0 وجود دارد آنگاه ROC آن نواری موازی محور موهومی است که از راست نامحدود است و از چپ به قطب (قطب‌هائی) با بزرگترین قسمت حقیقی ما بین تمامی قطب‌ها محدود شده است

(۲) - اگر $x(t)$ سیگنالی سمت چپ باشد و بدانیم $X(s)$ به ازای یک s_0 وجود دارد آنگاه ROC آن نواری موازی محور موهومی است که از چپ نامحدود است و از راست به قطب یا قطب‌هائی با کوچکترین قسمت حقیقی ما بین تمامی قطب‌ها محدود شده است.

(۳)- اگر $x(t)$ سیگنالی با استمرار محدود باشد و بدانیم که $X(s)$ به ازای یک s موجود است؛ آنگاه $X(s)$ هیچ قطبی ندارد و ROC آن کل صفحه است.



$$\longleftrightarrow X(s)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-st}\,dt = \frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} =$$

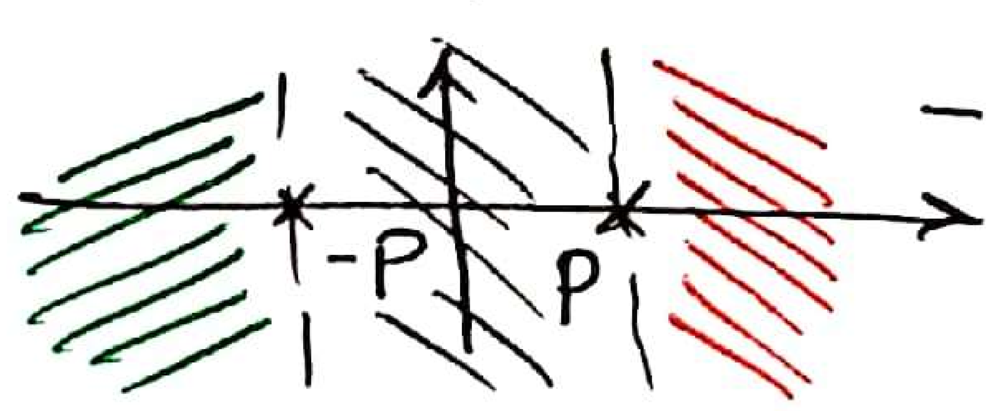
$$= \frac{1}{s}\left(e^{\frac{T}{2}s}-e^{-\frac{T}{2}s}\right) = \frac{2\sinh(\frac{T}{2}s)}{s}$$

$$X(0)=\frac{0}{0} = \frac{T\cosh(\frac{T}{2}s)}{1}\Big|_{s=0} = T \rightarrow$$ ROC کل صفحه

$$X(\omega)=X(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{2\sinh(j\frac{T}{2}\omega)}{j\omega} = \frac{2j\sin(\frac{T}{2}\omega)}{j\omega} = \frac{2\sin(\frac{T}{2}\omega)}{\omega}$$

(۴)- اگر $x(t)$ سیگنالی دوطرفه باشد و بدانیم که $X(s)$ به ازای نقاط روی خط $Re(s)=\sigma_0$ موجود است؛ آنگاه ROC آن نواری موازی محور موهومی است که خط مذکور را شامل شده و از طرفین به قطب‌هایی محدود شده است.

مثال: تمام سیگنال‌هایی را بیابید که دارای تبدیل لاپلاس $\frac{2P}{P^2-s^2}$ باشند. $P>0$



$$-P<Re(s)<P \longrightarrow x(t)=e^{-P|t|}$$

دوطرفه

$$P<Re(s) \longrightarrow \frac{2P}{P^2-s^2} = \frac{-1}{s-P}+\frac{1}{s+P} \longrightarrow x(t)=-e^{Pt}u(t)+e^{-Pt}u(t)$$

سمت راستی

$Re(s)>P \quad Re(s)>-P$

$$Re(s)<-P \longrightarrow \frac{2P}{P^2-s^2} = \frac{-1}{s-P}+\frac{1}{s+P} \longrightarrow x(t)=e^{Pt}u(-t)-e^{-Pt}u(-t)$$

سمت چپی

$Re(s)<P \quad Re(s)<-P$

- خواص و گانه تبدیل لاپلاس :

$x_i(t) \longleftrightarrow X_i(s)$, $R_i : \alpha_i < Re(s) < \beta_i$

$i = 1, 2, 3$

(۱) - خطی بودن :

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \longleftrightarrow X_3(s) = a X_1(s) + b X_2(s)$$

R_3 حداقل $R_1 \cap R_2$ است که در حالت خاص می‌تواند وسیع‌تر از اشتراک شود.

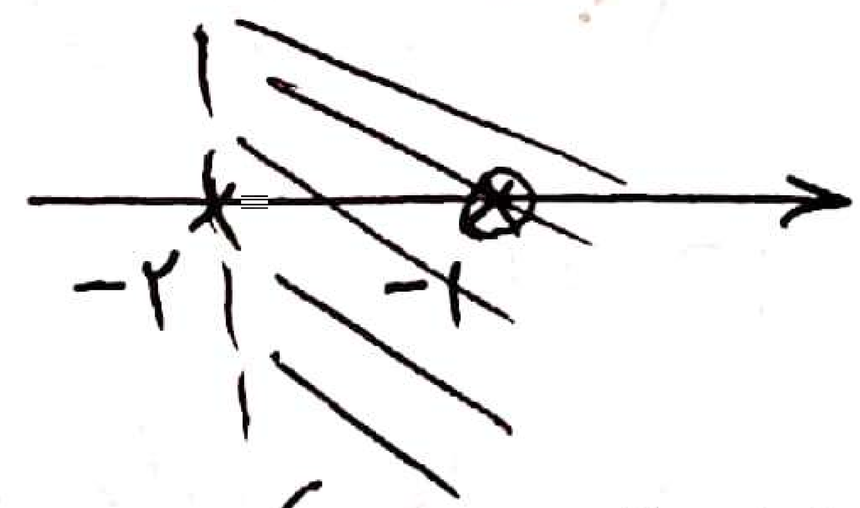
$$x_1(t) = e^{-t} u(t) \longleftrightarrow X_1(s) = \frac{1}{s+1} , \ Re(s) > -1$$

$$x_2(t) = e^{-2t} u(t) \longleftrightarrow X_2(s) = \frac{1}{s+2} , \ Re(s) > -2$$

$R_3 = R_1 \cap R_2$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \longleftrightarrow X_3(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$x_4(t) = x_3(t) - x_1(t) \longleftrightarrow X_4(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} - \frac{1}{s+1} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$



$R_4 : Re(s) > -2$ که وسیع‌تر از $R_1 \cap R_3$ می‌باشد ($R_1 \cap R_3$ به قطبی در ۱- محدود شده بود که توسط صفر هم‌مرتبه حذف شد و R_4 وسیع‌تر شد)

(۲) - شیفت در زمان :

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \longleftrightarrow X_2(s) = e^{-t_0 s} \cdot X_1(s)$$

R_2 همان R_1

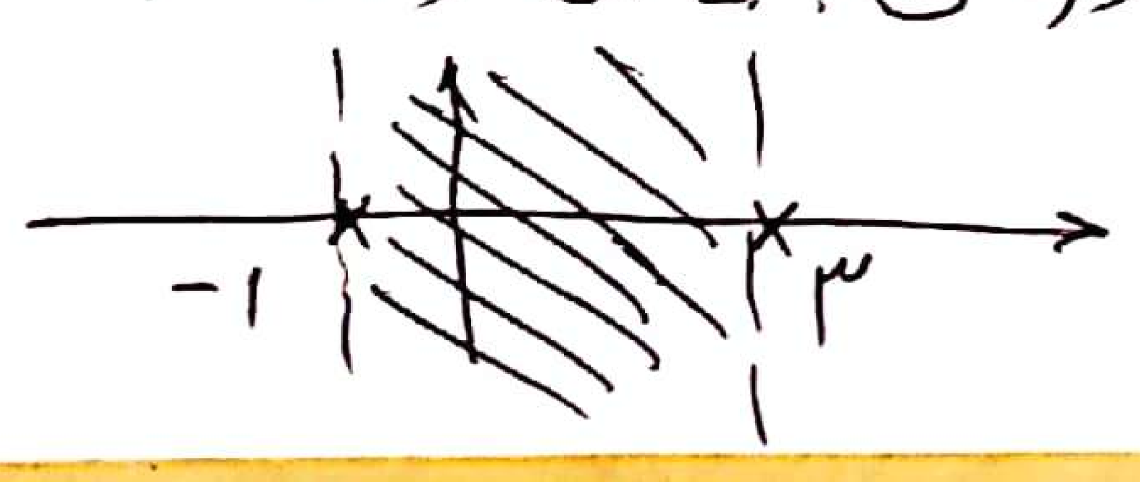
(۳) - شیفت در s :

$$x_2(t) = e^{s_0 t} x_1(t) \longleftrightarrow X_2(s) = X_1(s - s_0)$$

$R_2 : \alpha_1 + Re(s_0) < Re(s) < \beta_1 + Re(s_0)$

(قطب‌ها در جهت محور افقی به میزان $Re(s_0)$ جابه‌جا می‌شوند)

$$LT\{e^{t} e^{-2|t|}\} = ? = \frac{4}{4 - (s-1)^2}$$



$-1 < Re(s) < 3$

(۴) - مشتق در زمان :

$$x_2(t) = x_1^{(k)}(t) \longleftrightarrow X_2(s) = s^k \cdot X_1(s)$$

$k = 1, 2, \dots$

R_2 همان R_1 که در حالت خاص می‌تواند وسیع‌تر شود.

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s} \,, \quad Re(s) > 0$$

$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t) \longleftrightarrow s \frac{1}{s} \,,$$ ROC کل صفحه

$$\delta^{(k)}(t) \longleftrightarrow s^k \,,$$ ROC کل صفحه

(۵) - مشتق در فرکانس (s) :

$$x_2(t) = (-t)^n x_1(t) \longleftrightarrow X_2(s) = \frac{d^n X_1(s)}{ds^n}$$

$n = 1, 2, \dots$

R_2 همان R_1

(مشتق در ی قطبی را حذف نمی‌کند و فقط مرتبه قطب را افزایش می‌دهد)

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{pt} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s-p)^n} \,, \quad Re(s) > p$$

$$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{pt} u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s-p)^n} \,, \quad Re(s) < p$$

(قطب مرتبه n در p)

(۶) - تغییر مقیاس :

$$x_2(t) = x_1(at) \longleftrightarrow X_2(s) = \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{s}{a}\right)$$

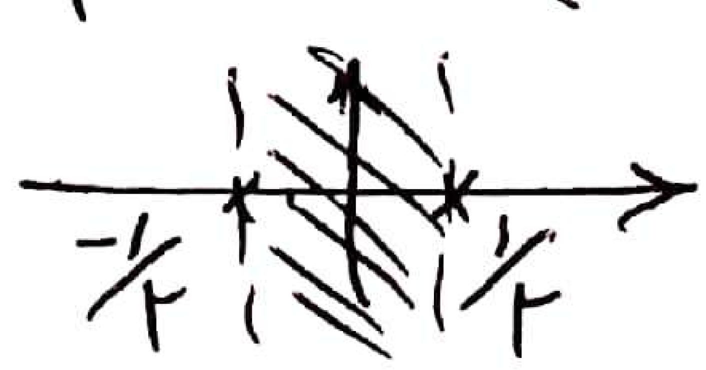
R_2 برابر aR_1 است یعنی :

$$a > 0 \longrightarrow R_2 : \ a\alpha_1 < Re(s) < a\beta_1$$

$$a < 0 \longrightarrow R_2 : \ a\beta_1 < Re(s) < a\alpha_1$$

(قطب‌ها a برابر می‌شوند)

$$LT\{e^{-|\frac{t}{2}|}\} = ? = 2 \frac{2}{1-(2s)^2} \,,$$



(۷) - قرینه کردن :

$$x_2(t) = x_1(-t) \longleftrightarrow X_2(s) = X_1(-s) \,, \quad R_2 : -\beta_1 < Re(s) < -\alpha_1$$

(قطب‌ها قرینه می‌شوند)

(۸) - کانولوشن در زمان:

$$x_3(t) = x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_3(s) = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

$R_1 \cap R_2$ حداقل R_3

(۹) - انتگرال در زمان:

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\lambda) d\lambda = x_1(t) * u(t) \longleftrightarrow X_2(s) = \frac{X_1(s)}{s}$$

R_2 حداقل اشتراک R_1 با $Re(s) > 0$

$$x_2(t) = \int_{t}^{+\infty} x_1(\lambda) d\lambda = x_1(t) * u(-t) \longleftrightarrow X_2(s) = \frac{-X_1(s)}{s}$$

R_2 حداقل اشتراک R_1 با $Re(s) < 0$

- تحلیل سیستم های LTI به کمک تبدیل لاپلاس:

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s) \xrightarrow{LT^{-1}} \underset{\text{معلوم}}{y(t)}$$

مثال: پاسخ سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-2t}u(t)$ را به ورودی $x(t) = e^{t}u(-t)$ بیابید.

$$X(s) = \frac{1}{s-1} , Re(s) > 1$$

$$H(s) = \frac{1}{s+2} , Re(s) > -2$$

$$\longrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} , Re(s) > 1$$

$$Y(s) = \underset{Re(s)>1}{\frac{1/3}{s-1}} + \underset{Re(s)>-2}{\frac{-1/3}{s+2}} \xrightarrow{LT^{-1}} y(t) = \frac{1}{3}e^{t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-2t}u(t)$$

- تابع تبدیل سیستم (Transfer Function):

$$H(s) = LT\{h(t)\} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

ROC تابع تبدیل از روی خواص سیستم مشخص می شود.

به صفر و قطب های $H(s)$ صفر و قطب های سیستم گوییم.

- رابطه ROC تابع تبدیل با خواص سیستم:

اگر سیستم دارای قطب باشد آنگاه داریم (شرط لازم و کافی):

(۱)- اگر سیستم علّی باشد آنگاه ROC تابع تبدیل نواری موازی محور موهومی است که از راست نامحدود است و از چپ به قطب یا قطب هائی با بزرگترین قسمت حقیقی محدود شده است.

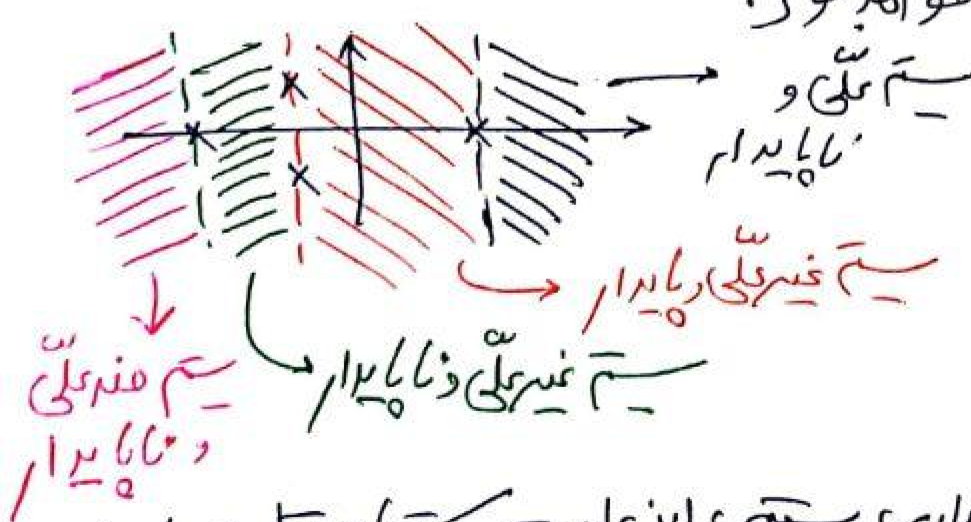
(۲)- اگر سیستم ضدعلّی باشد آنگاه ROC تابع تبدیل نواری موازی محور موهومی است که از چپ نامحدود است و از راست به قطب یا قطب هائی با کوچکترین قسمت حقیقی محدود شده است.

(۳)- اگر سیستم غیرعلّی باشد آنگاه ROC تابع تبدیل نواری موازی محور موهومی است که از طرفین به قطب ها محدود شده است.

(۴)- اگر سیستم پایدار باشد آنگاه محور موهومی در ROC تابع تبدیل قرار دارد.

(۵)- اگر سیستم ناپایدار باشد آنگاه محور موهومی در ROC تابع تبدیل قرار ندارد.

(۶)- اگر سیستم نوسانی (در مرز پایداری) (نه پایدار و نه ناپایدار) باشد آنگاه محور موهومی مرز ROC تابع تبدیل خواهد بود.



* شرط لازم و کافی برای علّی بودن و پایداری سیستمی این است که تمام قطب های سیستم سمت چپ محور موهومی واقع باشند (دارای قسمت حقیقی منفی باشند)

- تابع تبدیل سیستم های LTI توصیف شده توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت:

$$\sum_{k=0}^{M} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k x^{(k)}(t) \xrightarrow{LT} \sum_{k=0}^{M} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{N} b_k s^k X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{M} a_k s^k} = \frac{\text{چندجمله‌ای درجه } N \text{ با ضرایب } b_k}{\text{چندجمله‌ای درجه } M \text{ با ضرایب } a_k}$$

- تابع تبدیل اتصال سیستم های LTI:

اتصال سری: $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$

اتصال موازی: $H(s) = H_1(s) \pm H_2(s)$

اتصال با فیدبک: $H(s) = \dfrac{H_1(s)}{1 \mp H_1(s) \cdot H_2(s)}$

- تابع تبدیل سیستم وارون یک سیستم LTI:

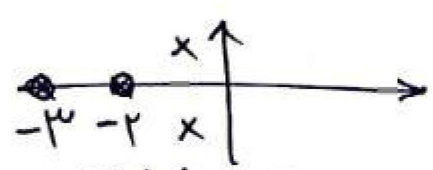
$$h(t) * h_1(t) = \delta(t) \xrightarrow{LT} H(s) \cdot H_1(s) = 1 \longrightarrow H_1(s) = \frac{1}{H(s)}$$

جای صفر و قطب های H_1 و H برعکس یکدیگر است.

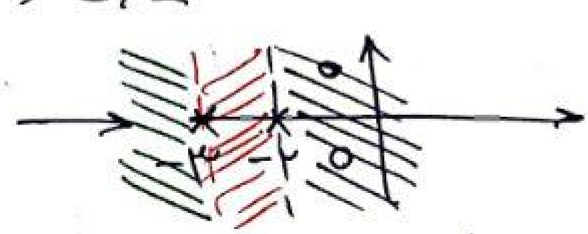
مثال: سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s) = \dfrac{s^2+5s+6}{s^2+s+1}$ مفروض است. پاسخ ضربه وارون علی، یک وارون غیرعلی و وارون ضدعلی سیستم مذکور را بیابید.

صفرها: $-2, -3$

قطب ها: $-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$



برای $H(s)$



برای $H_1(s)$

$$H_1(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+5s+6} = 1 + \frac{-4s-5}{s^2+5s+6} = 1 + \frac{3}{s+2} + \frac{-7}{s+3}$$

$Re(s) > -2 \longrightarrow h_1(t) = \delta(t) + 3e^{-2t}u(t) - 7e^{-3t}u(t)$ علی و پایدار

$-3 < Re(s) < -2 \longrightarrow h_1(t) = \delta(t) - 3e^{-2t}u(-t) - 7e^{-3t}u(t)$ غیرعلی و ناپایدار

$Re(s) < -3 \longrightarrow h_1(t) = \delta(t) - 3e^{-2t}u(-t) + 7e^{-3t}u(-t)$ ضدعلی و ناپایدار

- فرمول ها برای تبدیل لاپلاس معکوس:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{pt}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s-p)^n}, \; Re(s)>p$$

$$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{pt}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s-p)^n}, \; Re(s)<p$$

$\longrightarrow$ قطب حقیقی مرتبه n در P

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\left[A\cos\omega_0 t + \frac{B-A\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right]u(t)$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{As+B}{\left[(s+\alpha)^2+\omega_0^2\right]^n}, \; Re(s)>-\alpha$$

$$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\left[A\cos\omega_0 t + \frac{B-A\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right]u(-t)$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{As+B}{\left[(s+\alpha)^2+\omega_0^2\right]^n}, \; Re(s)<-\alpha$$

$\longrightarrow$ قطب زوج مزدوج مختلط مرتبه n در $-\alpha \pm j\omega_0$

$$\delta^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^n, \quad$$ ROC کل صفحه

- پاسخ پله سیستم های LTI:

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\lambda)d\lambda \xrightarrow{LT} S(s)=\frac{H(s)}{s}$$

مثال: اگر سیستم مثال قبل علّی باشد پاسخ ضربه و پاسخ پله آن را بیابید.

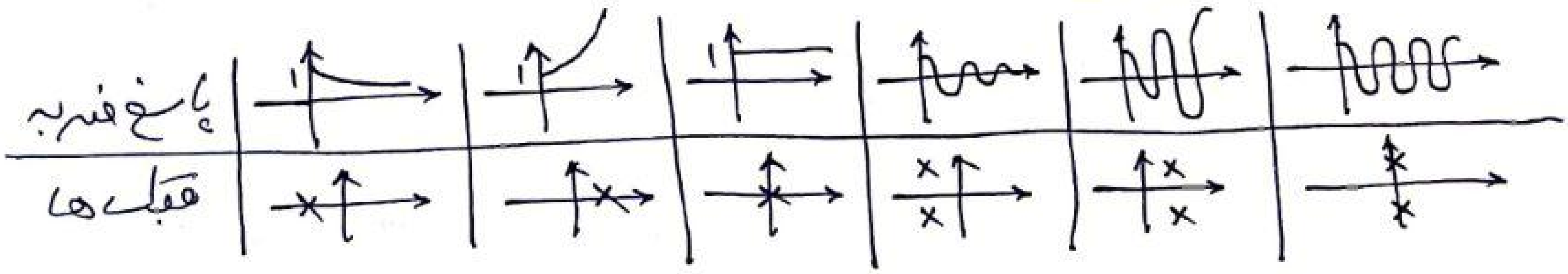
$$H(s)=\frac{s^2+5s+6}{s^2+s+1}, \; Re(s)>\frac{-1}{2} \longrightarrow H(s)=1+\frac{4s+5}{s^2+s+1}=1+\frac{4s+5}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

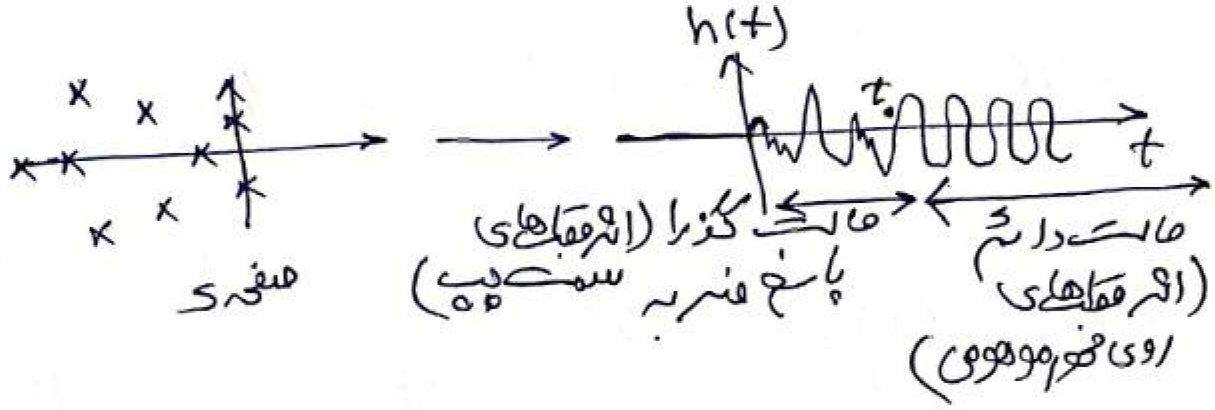
$$P, P^* = \frac{-1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow h(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(4\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+2\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

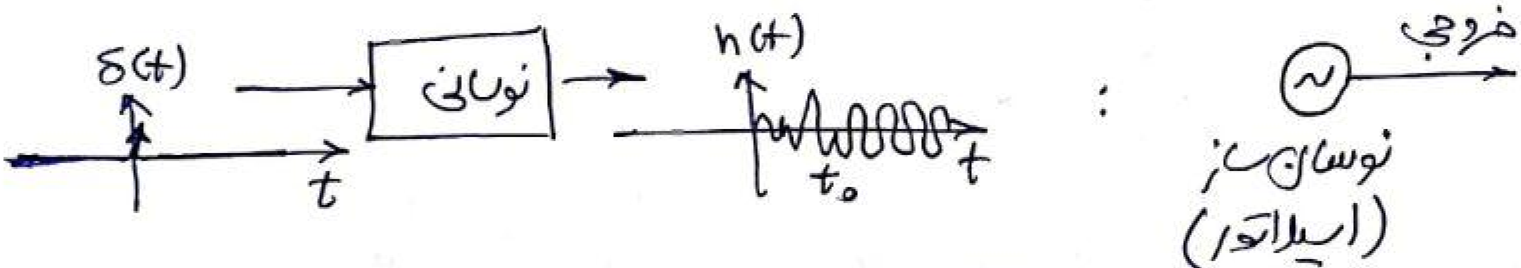
$$S(s)=\frac{H(s)}{s}=\frac{s^2+5s+6}{s(s^2+s+1)}=\frac{6}{s}+\frac{-5s-1}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \xrightarrow{LT^{-1}}$$

$$s(t)=6u(t)+e^{-\frac{1}{2}t}\left(-5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

- درباره سیستم نوسانی علّی :







مثال: یک سیستم LTI علّی توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است.
پاسخ ضربه - پاسخ پله - تابع تبدیل و پاسخ فرکانسی سیستم را در صورت وجود بیابید.
همچنین تمام موارد بالا را برای وارون علّی سیستم هم بیابید.

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t) = x(t)+3$$

$$H(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$Re(s)>-1 \rightarrow H(s)=\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$

$$H(j\omega)=\frac{j\omega+3}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2}\ ,\ h(t)=2e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

$$S(s)=\frac{H(s)}{s}=\frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}=\frac{\frac{3}{2}}{s}+\frac{-2}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

$$s(t)=\frac{3}{2}u(t)-2e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

$$H_1(s)=\frac{1}{H(s)}=\frac{s^2+3s+2}{s+3}\ ,Re(s)>-3 \longrightarrow H_1(s)=s+\frac{2}{s+3}$$

$$h_1(t)=\delta'(t)+2e^{-3t}u(t)\ ,\ H_1(j\omega)=\frac{(j\omega)^2+3(j\omega)+2}{(j\omega)+3}$$

$$S_1(s)=\frac{H_1(s)}{s}=\frac{s^2+3s+2}{s(s+3)}=1+\frac{2}{s(s+3)}=1+\frac{\frac{2}{3}}{s}+\frac{-\frac{2}{3}}{s+3}$$

$$s_1(t)=\delta(t)+\frac{2}{3}u(t)-\frac{2}{3}e^{-3t}u(t)$$

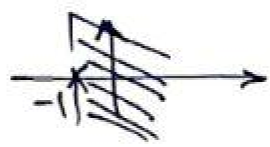
- دید مقدار ویژه نسبت به $H(s)$:

$$e^{st}\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow H(s)\cdot e^{st} \qquad H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

مثال: پاسخ سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-t}u(t)$ را به ورودی های زیر بیابید

$$x_1(t)=e^{-2t}u(t)\ ,\ x_2(t)=e^{2t}u(t)\ ,\ x_3(t)=e^{-2t}\ ,\ x_4(t)=e^{2t}$$

$$H(s)=\frac{1}{s+1}$$



$$X_1(s)=\frac{1}{s+2}\longrightarrow Y_1(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$

$$y_1(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

$$X_2(s)=\frac{1}{s-2}\longrightarrow Y_2(s)=\frac{1}{(s+1)(s-2)}=\frac{-1/3}{s+1}+\frac{1/3}{s-2}$$

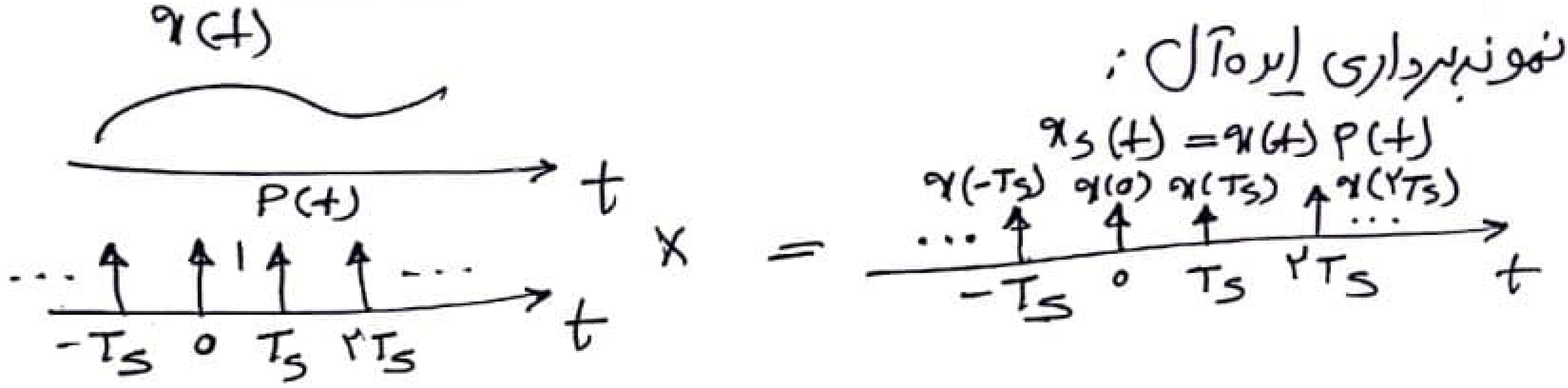
$$y_2(t)=\frac{-1}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

$$x_4(t)=e^{2t}\longrightarrow y_4(t)=H(2)e^{2t}=\frac{1}{2+1}e^{2t}=\frac{1}{3}e^{2t}$$

$$x_3(t)=e^{-2t}\longrightarrow y_3(t)=H(-2)e^{-2t}=\infty e^{-2t}=\infty$$

- نمونه‌برداری ایده‌آل :

$$x_s(t) = x(t)\,p(t)$$



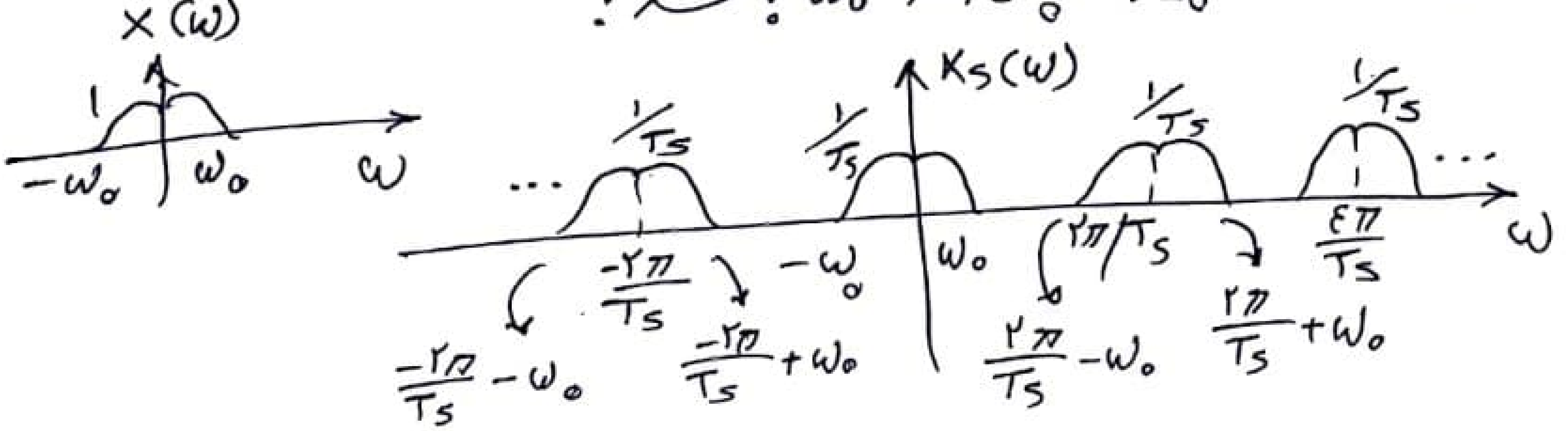
$$x_s(t) = x(t)\cdot p(t) \longleftrightarrow X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * P(\omega)\right]$$

$$C_k = \frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t)\, e^{-j\frac{2k\pi}{T_s}t}\, dt = \frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2}\delta(t)\, dt = \frac{1}{T_s}$$

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T_s}\,\delta(\omega-\omega_k) \qquad \omega_k = \frac{2k\pi}{T_s}$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega) * \delta(\omega-\omega_k) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega-\omega_k)$$

فرض x(t) باند پایه با پهنای باند ω_0 باشد :



شرط بازسازی :

$$\frac{2\pi}{T_s} - \omega_0 \geq \omega_0 \rightarrow \frac{2\pi}{T_s} = \omega_s \geq 2\omega_0$$

بازسازی x(t) از روی نمونه‌هایش :

قضیه نایکوئیست : اگر از سیگنال باند پایه با پهنای باند ω_0 با فرکانس حداقل ۲ برابر پهنای باند سیگنال نمونه‌برداری کنیم آنگاه با عبور سیگنال نمونه‌برداری شده از LPF با فرکانس قطع ω_0 سیگنال بازسازی می‌شود.