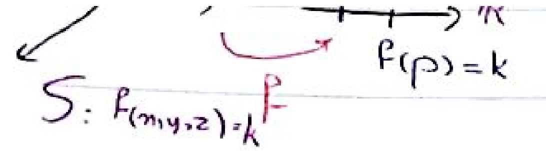
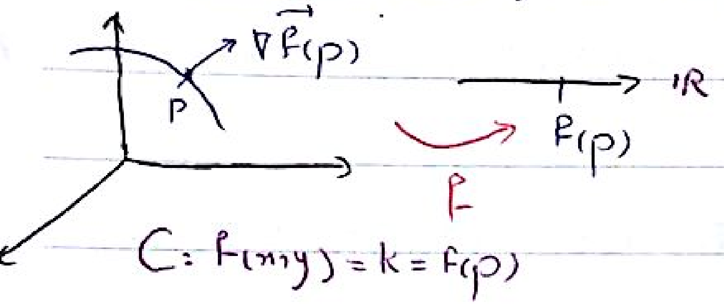


به معادله $f(p)=f(x,y,z)=k$ در نقطه p است.

به همین ترتیب اگر f تابعی دو متغیره باشد، آن گاه: $\nabla f(p)=\frac{\partial f}{\partial x}(p)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(p)\vec{j}$

بردار در صفحه عمود بر خم تراز f به ازای ثابت $k=f(p)$ خواهد بود.



اکسترمم توابع چندمتغیره:

فرض کنیم $D\subset \mathbb{R}^n$، تابع $f: D\to \mathbb{R}$ را در نقطه $p\in D$ max مطلق می‌نامیم هرگاه:

$\forall x\in D \quad f(x)\le f(p)$

در این حالت $f(p)$ را max مطلق f بر D می‌نامیم. مفهوم min مطلق هم به همین صورت است.

تابع $f: D\to \mathbb{R}$ در نقطه $q\in D$ دارای max نسبی یا موضعی نامیم، هرگاه همسایگی چون $B(q,r)\subset D$ وجود داشته باشد:

$\forall x\in B(q,r) \quad f(x)\le f(q)$

در این حالت $f(q)$ را یک max موضعی یا نسبی f بر D خواهیم نامید. مفهوم min نسبی به همین صورت تعریف می‌شود. مقادیر max و min f بر D را در صورت وجود مقادیر اکسترمم f بر D می‌نامیم.

/Extreme Values/

با توجه به تعاریف فوق توجه می‌کنیم که اکسترمم های مطلق یک تابع بر یک دامنه در صورت وجود می‌توانند در نقاط مرزی نیز رخ دهد. در مقابل اکسترمم های موضعی در صورت وجود صرفاً در نقاط درونی یک دامنه اتفاق می‌افتند. فرض کنیم $p \in D$ نقطه‌ای درونی از دامنه D بوده، f در p یک اکسترمم مثلاً ماکزیمم (مطلق یا نسبی) داشته باشد. در این صورت، بنا به تعریف:

$$\exists B(p,r) \in D \quad \forall x \in B(p,r) \quad f(x) \le f(p)$$

اگر $g:(-r,r) \to R$ تابع با ضابطه‌ی $g(t) = f(p+te_i)$. آن‌گاه:

$$\forall t \in (-r,r) \quad (p+te_i) \in B(p,r) \Rightarrow f(p+te_i) \le f(p)$$

$$\text{یا} \quad g(t) \le g(0)$$

به این ترتیب تابع $g:(-r,r) \to \mathbb{R}$ در $t=0$ دارای max مطلق خواهد بود. در نتیجه

در صورتی که g در $t=0$ مشتق پذیر باشد، خواهیم داشت: $g'(0)=0$ اما:

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+te_i)-f(p)}{t} = D_{e_i} f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

قضیه: اگر $f: D \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی درونی $p \in D$ دارای یک مقدار اکسترمم باشد. آن‌گاه یا

f در p مشتق پذیر نیست یا در صورت مشتق پذیری $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$.

مثال:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(0,0) \le f(x,y)$$

$f(0,0)$ min مطلق f بر $\mathbb{R}^2$ است و f در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست.

$$g(x,y) = x^2+y^2$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(0,0) \le g(x,y)$$

$g(0,0)$ min مطلق g بر $\mathbb{R}^2$ است.

در عین حال $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0 \;,\; \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$

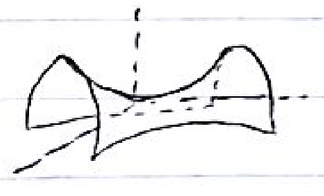
تعریف: نقطه درونی p از دامنه D را یک نقطه بحرانی برای تابع $f:D\to\mathbb{R}$ نامیم، هرگاه یا f در این نقطه مشتق پذیر نباشد یا در صورت مشتق پذیری کلیه مشتقات جزئی مرتبه اول f در این نقطه برابر صفر باشد. بنابر قضیه فوق، نقاط اکسترمم های نسبی f بر دامنه D (در صورت وجود) جزء نقاط بحرانی f بر دامنه هستند ولی عکس این خاصیت لزوماً برقرار نیست. به این معنا که در یک نقطه بحرانی برای یک تابع امکان دارد هیچ اکسترممی از تابع در این نقطه روی ندهد. به طور مثال:

برای تابع مشتق پذیر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y)=x^2-y^2$: $\quad \frac{\partial f}{\partial x}=2x$

$(0,0)$ یک نقطه بحرانی برای f است. $\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y$

$f(0,0)$ max موضعی f بر $\mathbb{R}^2$ نیست. $\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{0\} \quad f(x,0)=x^2>f(0,0)=0$

$f(0,0)$ min موضعی f بر $\mathbb{R}^2$ نیست. $\quad \forall y\in\mathbb{R}-\{0\} \quad f(0,y)=-y^2<f(0,0)=0$



f در نقطه بحرانی $(0,0)$ هیچ اکسترممی ندارد. نقطه بحرانی یک تابع که در آن اکسترمم رخ ندهد را یک نقطه زینی برای f می نامیم.

قضیه ← «آزمون مشتق دوم»

فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^2$ و نقطه درونی $p\in D$ یک نقطه بحرانی برای تابع $f:D\to\mathbb{R}$ باشد. به علاوه فرض کنیم: کلیه مشتقات مرتبه دوم f در اطراف p وجود داشته، در این نقطه پیوسته باشند.

قرار میدهیم: $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)$ ، $C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)$ ، $B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p)$ ، $D=\det\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}=AC-B^2$

در این صورت اگر $D>0$ آنگاه f دارای یک نقطه اکسترمم در نقطه بحرانی p است. در این صورت اگر $A>0$ این اکسترمم min و اگر $A<0$ این اکسترمم max خواهد بود. (امکان ندارد که $A=0$، زیرا آنگاه $D>0$ نیست.) اگر $D<0$ آنگاه نقطه بحرانی p برای f یک نقطه زینی خواهد بود. در حالت $D=0$ نتیجه از این آزمون نتیجه‌ای حاصل نمی شود.

۲شنبه ۹۵/۱/۱۴ مطلوب است تعیین نقاط بحرانی و اکسترمم های نسبی ؟ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

مثال ۸: $f(x,y) = y^4 - x^3 - 3y^2 + 3x + 1$

- با توجه به اینکه f بر $\mathbb{R}^2$ تابعی مشتق پذیر است، نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}^2$ را اکسترمم های تابع

نقاط بحرانی این تابع بر $\mathbb{R}^2$ جواب های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

خواهند بود.

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ y(y^2-1) = 0 \Rightarrow y = 0,\ y = 1,\ y = -1 \end{cases}$$

بنابراین ترتیب نقاط $(1,0), (1,1), (1,-1), (-1,0), (-1,1), (-1,-1)$ نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}^2$ هستند.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$$

	$A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)$	$B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)$	$C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)$	$D = \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C\end{pmatrix} = AC - B^2$
$P_1(1,0)$	-6	0	-4	$24 > 0 \xrightarrow{A<0}$ f در p یک ماکزیمم دارد.
$P_2(1,1)$	-6	0	8	$-48 < 0$ نقطه زینی
$P_3(1,-1)$	-6	0	8	$-48 < 0$
$P_4(-1,0)$	6	0	-4	$-24 < 0$
$P_5(-1,1)$	6	0	8	$48 > 0$
$P_6(-1,-1)$	مینیمم موضعی			

$f(1,0) = 3 \Downarrow$ ماکزیمم موضعی

$A > 0 \rightarrow$ f در p یک مینیمم دارد، $\Leftarrow$ مینیمم موضعی

$f(-1,1) = -2$

* این تابع بر $\mathbb{R}^2$ ۳ اکسترمم نسبی دارد. با توجه به اینکه $f(1,0) = 3 < f(x,y)$ $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$

ماکزیمم رخ داده در نقطه (۱،۰) مینیمم است. به همین ترتیب $f(-1,1) = -2 > f(x,y)$ ، $\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2$ ، $= f(-1,-1)$

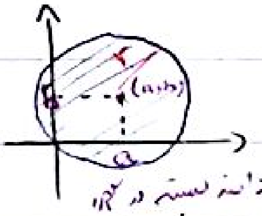
در نتیجه مینیمم رخ داده در نقاط $(-1,1)$ و $(-1,-1)$ نسبی نسبی است. این تابع در $\mathbb{R}^2$ اکسترمم مطلق ندارد.

تعریف: فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^n$ نقطه $p\in\mathbb{R}^n$ را یک نقطه مرزی برای D نامیم هرگاه:

$D\subset\mathbb{R}^n$

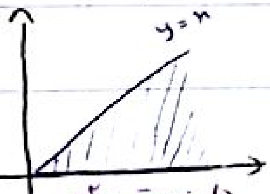
$$\forall r>0\quad B(p;r)\cap D\neq\emptyset$$
$$B(p;r)\cap(\mathbb{R}^n-D)\neq\emptyset$$

دامنه $D\subset\mathbb{R}^n$ را بسته نامیم، هرگاه تمام نقاط مرزی D متعلق به این دامنه باشد.



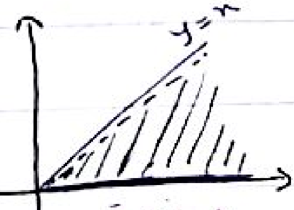
دامنه بسته در $\mathbb{R}^2$

$$D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ (x-a)^2+(y-b)^2\le r^2\}$$



دامنه بسته در $\mathbb{R}^2$

$$D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0\ ,\ 0\le y\le x\}$$



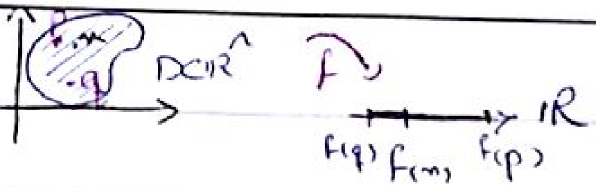
دامنه غیربسته

$$D':=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0\ ,\ 0<y<x\}$$

تعریف: دامنه $D\subset\mathbb{R}^n$ را دامنه کراندار نامیم. هرگاه $\exists M>0:\ D\subset B(0;M)$

قضیه اکسترمم های مطلق: فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^n$ دامنه‌ای بسته و کراندار در فضای $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت اگر $f:D\to\mathbb{R}$ در D پیوسته باشد، آنگاه f اکسترمم های مطلق خود را بر D اتخاذ می‌کند.

به عبارت دیگر:



$\exists\, p,q\in D;\ \forall x\in D \qquad f(q)\le f(x)\le f(p)$

مینیمم مطلق f بر D   ماکزیمم مطلق f بر D

- براساس قضیه فوق دستورالعمل زیر را برای تعیین اکسترمم های مطلق تابع پیوسته بر دامنه ای بسته و کراندار خواهیم داشت:

۱. ابتدا همه نقاط بحرانی f را درون D (نقاط درون D) تعیین می کنیم.

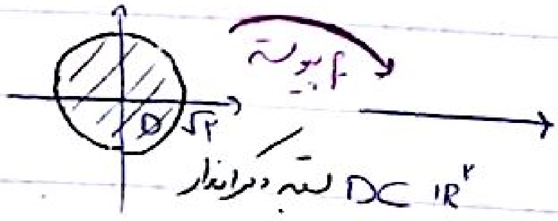
۲. با محدود کردن دامنه تعریف f به مجموعه نقاط مرزی نقاط کاندید مرز را تعیین می کنیم که تابع احتمالا در آن ها کمترین یا بیشترین مقدار ممکن را اختیار کند.

۳. با مقایسه مقادیر f بر مجموعه نقاط بحرانی درون و نقاطی که در مرحله قبل حاصل شده اند بیشترین و کمترین مقدار f را بر D تعیین می کنیم.

مثال) اکسترمم های مطلق هر یک از توابع زیر را بر دامنه های داده شده تعیین کنید.

الف) $f(x,y)=x^2-y^2-2xy$

$D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 2\}$



ابتدا تعیین نقاط بحرانی f درون دامنه D: چون f بر $\mathbb{R}^2$ مشتق پذیر است، نقاط بحرانی f در $\mathbb{R}^2$

Subject:

درصورت وجود جواب این دستگاه

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$ خواهند بود.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y - 2x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow (x,y) = (0,0)$$

تنها نقطه بحرانی f بر $\mathbb{R}^2$ که درون دامنه D نیز قرار دارد.

نقاط مرزی:

$$C := \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\forall t \in [0,2\pi] \quad f(x(t), y(t)) = f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$$

$$= 2\cos^2 t - 2\sin^2 t - 4\sin t\cos t$$

بنابراین باید اکستریمم های مطلق تابع $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $g(t) = 2\cos(2t) - 2\sin(2t)$ را بررسی کنیم.

$$\forall x \in (0, 2\pi) \quad g'(t) = 2(-2\sin 2t - 2\cos 2t) = 0$$

$$\hookrightarrow \tan 2t = -1 \rightarrow 2t = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \\ t_2 = \pi - \frac{\pi}{8} \\ t_3 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \\ t_4 = 2\pi - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

t	0	$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$	$\pi - \frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$	$2\pi - \frac{\pi}{8}$	2π
$g(t)$	2	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	2

$g(t) = 2(\cos 2t - \sin 2t)$

$$\Rightarrow \max_C f = 2\sqrt{2} = f\left(x\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right), y\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)\right) = f\left(-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}, \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\min_C f = -2\sqrt{2} = f\left(x\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right), y\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) = f\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}, \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\right)$$

مقایسه مقادیر تابع در نقاط بحرانی درون دامنه انتخاب شده بر مرز:

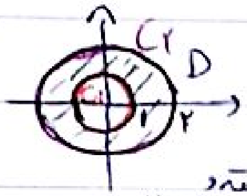
Pixel

نقطه	مقدار تابع
$P_0(0,0)$	$f(P_0)=0$
$P_1(-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8},\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8})$	$f(P_1)=2\sqrt{2}$
$P_2(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8},\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8})$	$f(P_2)=-2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \min_D f=-2\sqrt{2} \qquad \max_D f=2\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \forall(x,y)\in D \qquad -2\sqrt{2}\le f(x,y)=x^2-y^2-2xy\le 2\sqrt{2}$$

ب) $f(x,y)=xe^{(x^2+y^2)}$ $\qquad D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$



$\xrightarrow{f \text{ پیوسته}}$ بسته و کراندار

ابتدا نقاط بحرانی f درون D : با توجه به اینکه f بر $\mathbb{R}^2$ تابعی مشتق‌پذیر است،

نقاط بحرانی f درون $\mathbb{R}^2$ جواب‌های دستگاه $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ می‌باشد.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=e^{(x^2+y^2)}+2x^2e^{(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}=2xye^{(x^2+y^2)} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (1+2x^2)e^{x^2+y^2}=0 & \text{جواب ندارد} \\ 2xye^{(x^2+y^2)}=0 \end{cases}$$

$\hookleftarrow$ f بر $\mathbb{R}^2$ هیچ نقطه بحرانی ندارد.

$\hookleftarrow$ f درون دامنه D نقطه بحرانی ندارد.

نقاط مرزی:

$$C:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x^2+y^2=1 \text{ یا } x^2+y^2=4\}$$

$$=\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x^2+y^2=1\}}_{C_1}\cup\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x^2+y^2=4\}}_{C_2}$$

$\forall (x,y) \in C_1 \qquad f(x,y) = x e^{x^2+y^2} = e \cdot x \Rightarrow \max\limits_{C_1} f = e \cdot 1 = f(1,0)$,

$\min\limits_{C_1} f = -e \cdot 1 = f(-1,0)$

$\forall (x,y) \in C_2 \qquad f(x,y) = x e^{x^2+y^2} = (e^4)\, x$

$\Rightarrow \max\limits_{C_2} f = 2e^4 = f(2,0)$

$\Rightarrow \min\limits_{C_2} f = -2e^4 = f(-2,0)$

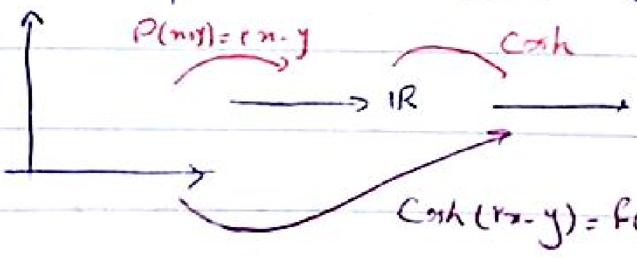
با مقایسه مقادیر f بر مجموعه نقاط حاصل در دو قسمت قبل (نقاط بحرانی درون و نقاط انتخاب شده بر مرز)

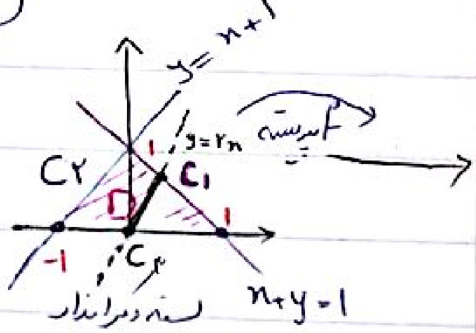
$\min\limits_{D} f = -2e^4 = f(-2,0) \quad , \quad \max\limits_{D} f = 2e^4 = f(2,0)$

$\forall (x,y) \in D \qquad -2e^4 \leq x e^{x^2+y^2} \leq 2e^4$

ج) $f(x,y) = \cosh(2x-y)$

$D := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ y \geq 0 \ , \ y-1 \leq x \leq 1-y$





ابتدا نقاط بحرانی درون : با توجه به مشتق پذیری f بر $\mathbb{R}^2$ نقاط بحرانی تابع در صورت وجود جواب‌های

دستگاه معادلات $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$) است .

$f(x,y) = \cosh(2x-y) \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2\sinh(2x-y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\sinh(2x-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \sinh(2x-y) = 0$$

$\Rightarrow 2x - y = 0$ یا $y = 2x$

در نتیجه نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}^2$ مجموعه نقاط واقع بر $y = 2x$ (خط) در صفحه است .

مشترکات این خط‌ها را در نظر نگیریم که درون ناحیه D قرار نمی‌گیرند.

نقاط مرزی :

فرض می‌کنیم C مرز ناحیه D باشد، در این صورت $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

$$C_1 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x+y=1 \ ,\ x \in [0,1] \}$$

$$C_2 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y=x+1 \ ,\ x \in [-1,0] \}$$

$$C_3 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y=0 \ ,\ x \in [-1,1] \}$$

$$* \ \forall (x,y) \in C_1 \quad f(x,y) = \cosh(2x-y) \overset{y=1-x}{=} \underbrace{\cosh(3x-1)}_{g_1(x)} \qquad x \in [0,1]$$

$$\forall x \in (0,1) \quad g_1'(x) = 3\sinh(3x-1) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

x	0	$\frac{1}{3}$	1
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\cosh(-1)$ ↘		↗ $\cosh(2)$

$\cosh(0)=1$

$$\Rightarrow \min_{[0,1]} g = 1 = g\left(\tfrac{1}{3}\right) = \min_{C_1} f = f\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)$$

$$\max_{[0,1]} g = \cosh(2) = g(1) = \max_{C_1} f = f(1,0)$$

$$* (x,y) \in C_2 \quad f(x,y) = \cosh(2x-y) \overset{y=x+1}{=} \underbrace{\cosh(x-1)}_{g_2(x)} \qquad x \in [-1,0]$$

$\forall x \in (-1,0) \quad g_2'(x) = \sinh(x-1) < 0 \rightarrow$ g_2 بر $[-1,0]$ اکیداً نزولی است.

$$\Rightarrow \min_{[-1,0]} g_2 = g_2(0) = \cosh(-1) = \min_{C_2} f = f(0,1)$$

$$\max_{[-1,0]} g_2 = g_2(-1) = \cosh(-2) = \max_{C_2} f = f(-1,0)$$

* $\forall (x,y)\in C_3 \quad f(x,y)=\cosh(2x-y)\overset{y=0}{\downarrow=}\underbrace{\cosh(2x)}_{g_3(x)} \qquad x\in[-1,1]$

$$\begin{cases} \min\limits_{[-1,1]} g_3 = g_3(0)=1=\min\limits_{C_3} f = f(0,0) \\ \max\limits_{[-1,1]} g_3 = g_3(1)=g_3(-1)=\cosh(2)=\max\limits_{C_3} f = f(1,0)=f(-1,0) \end{cases}$$

	نقاط D	مقدار f
نقاط بحرانی f درون D	$y=2x$	$f(x,y)=\cosh(0)=1$
C_1	$(1/2, 2/2)$	$f(\frac{1}{2},\frac{2}{2})=\cosh(0)=1$
	$(1,0)$	$f(1,0)=\cosh(2)$
C_2	$(0,1)$	$f(0,1)=\cosh(-1)$
	$(-1,0)$	$f(-1,0)=\cosh(-2)$
$C_3 \to$	$(0,0)$	$f(0,0)=\cosh(0)=1$

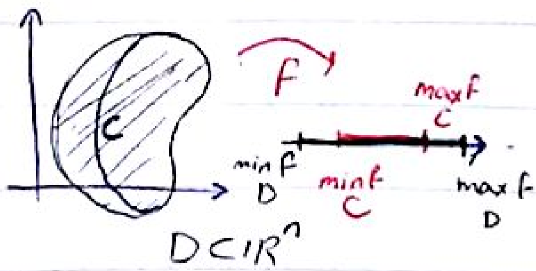
* $f(x,y)=\cosh(2x-y)$

$\min\limits_{D} f=\cosh(0)=1$ و $\max\limits_{D} f=\cosh(2)$

$\forall (x,y)\in D \qquad 1\leq f(x,y)=\cosh(2x-y)\leq \cosh(2)$

اکسترمم‌های مقید یا مشروط فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^n$ و $f: D\to\mathbb{R}$ تابعی تعریف شده.

D، اکسترمم مطلق $\min\limits_{D} f$ و $\max\limits_{D} f$ باشد. برای زیرمجموعه‌ای چون C از D، با در نظر



گرفتن $f: C\to\mathbb{R}$، روشن است که داریم

$$\min_D f\leq \min_C f\leq \max_C f\leq \max_D f$$

Subject: Year: Month: Day :

درحالی که C مجموعه تراز تابعی چون $g: D \to \mathbb{R}$ باشد. (به این معنی که شامل چون $k \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که: $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in D \ , \ g(x_1, \dots, x_n) = k\}$) آن گاه اکسترمم های

اکسترمم تابع $f: C \to \mathbb{R}$ را اکسترمم های مقید یا مشروط f تحت شرط $g=k$ می نامیم.

قضیه لاگرانژ: فرض کنیم $f, g: D \to \mathbb{R}$ توابعی مشتق پذیر بر D بوده f در نقطه $p_0 \in D$ یک اکسترمم مقید تحت شرط $g=k$ داشته باشد. (به عبارت دیگر $C := \{x \in D ; g(x) = k\}$

آنگاه $p_0 \in C$ و تابع $f: C \to \mathbb{R}$ در p_0 دارای یک مقدار اکسترمم باشد.)

اگر $\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(p_0)\right) \neq (0, \dots, 0)$ آن گاه $\lambda \in \mathbb{R}$ وجود دارد که

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)\right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(p_0)\right)$$

$\exists g: D \to \mathbb{R}$
مشتق پذیر

$\exists f: D \to \mathbb{R}$
مشتق پذیر

حکم قضیه $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$

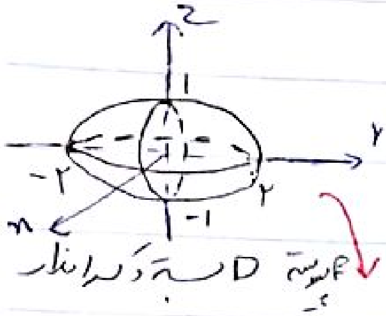
$\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(p_0)\right) \neq (0, \dots, 0)$

$C := \{(x_1, \dots, x_n) \in D \ , \ g(x_1, \dots, x_n) = k\}$

* $\exists p_0 \in C$ که $f|_C$ اکسترمم مقید در p_0 داشته باشد

مثال) اکسترمم های کلی(مطلق) تابع $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=xy-z^2$ را بر مجموعه

$D:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,;\, x^2+y^2+4z^2\le 4\}$ تعیین کنید.



- ابتدا نقاط بحرانی f درون دامنه: با توجه به مشتق‌پذیری f بر $\mathbb{R}^3$،

نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}^3$ جواب‌های معادله $\vec{\nabla f}=\vec{0}$ خواهند بود.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=y=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=x=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z}=-2z=0\end{cases}\Longrightarrow (x,y,z)=(0,0,0)$$

* تنها نقطه بحرانی f بر $\mathbb{R}^3$ که درون D نیز قرار دارد.

ب) اکسترمم های f بر مرز ناحیه: اکسترمم های مشروط $f(x,y,z)=xy-z^2$ را تحت شرط

$g(x,y,z)=x^2+y^2+4z^2=4$ تعیین می‌کنیم. برای این منظور کلیه نقاطی از مرز D را تعیین می‌کنیم

که در معادله‌ی $\vec{\nabla f}=\lambda\vec{\nabla g}$ صدق نمایند.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z}=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial z}\end{cases}\quad,\quad g(x,y,z)=4$$

$$\begin{cases}y=2\lambda x & (1)\\ x=2\lambda y & (2)\\ -2z=8\lambda z & (3)\\ x^2+y^2+4z^2=4 & (4)\end{cases}$$

- $x=0$
  - $y=0$
    - $z=0$ تناقض با (4)
    - یا $z\neq 0$: $(3)\Rightarrow \lambda=-\frac{1}{4}$ ، $(4)\Rightarrow 4z^2=4\to z=\pm1$ → $P_1(0,0,1)$ ، $P_2(0,0,-1)$
  - یا $y\neq 0$
    - $z=0$ تناقض با (2)
    - یا $z\neq 0$ تناقض با (2)
- یا $x\neq 0$
  - $y=0$
    - $z=0$ 〃
    - یا $z\neq 0$ 〃
  - یا $y\neq 0$
    - $z=0$: (1) و (2) ↳ $x=4\lambda^2 x\to\lambda=\pm\frac{1}{2}$ ؛ $(4)\Longrightarrow x^2+y^2=4$
    - یا $z\neq 0$: ↲ (1) و (2) ⟵ $\lambda=\pm\frac{1}{2}$ ، (3) ⟵ $z=0$ تناقض

ادامه

$\Longrightarrow \lambda = \frac{۱}{۲} \quad (۱) \Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^۲ + y^۲ = ۴ \end{cases} \rightarrow ۲x^۲ = ۴$ یا $x = \pm\sqrt{۲}$

$\Longrightarrow \begin{cases} P_۳(\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, ۰) \\ P_۴(-\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}, ۰) \end{cases}$

$\lambda = -\frac{۱}{۲} \quad (۱) \Longrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^۲ + y^۲ = ۴ \end{cases} \rightarrow ۲x^۲ = ۴$ یا $x = \pm\sqrt{۲}$

$\Longrightarrow \begin{cases} P_۵(\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}, ۰) \\ P_۶(-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, ۰) \end{cases}$

ج) مقایسه مقادیر f در نقاط بحرانی درون و نقاط انتخاب شده برای مرز دامنه

$f(x,y,z) = xy - z^۲$

نقاط	مقادیر f	
$P_۰(۰,۰,۰)$	$f(P_۰) = ۰$	
$P_۱(۰,۰,۱)$	$f(P_۱) = ۱$	
$P_۲(۰,۰,-۱)$	$f(P_۲) = -۱$	
$P_۳(\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, ۰)$	$f(P_۳) = ۲$	max مطلق f بر D
$P_۴(-\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}, ۰)$	$f(P_۴) = ۲$	
$P_۵(\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}, ۰)$	$f(P_۵) = -۲$	min مطلق f بر D
$P_۶(-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, ۰)$	$f(P_۶) = -۲$	

$\max_D f : ۲ = f(\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, ۰) = f(-\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}, ۰)$

$\min_D f : -۲ = f(\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}, ۰) = f(-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, ۰)$

مثال ۱) نزدیک‌ترین نقطه و دورترین نقطه از رویه S به معادله $x^2+2x+4y^2+z^2=1$

را نسبت به مبدأ مختصات تعیین کنید. اکسترمم‌های تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را تحت

شرط $1=x^2+2x+4y^2+z^2=g(x,y,z)$ تعیین می‌کنیم. با استفاده از روش لاگرانژ:

$$\begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla g\\ ,\\ g(x,y,z)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=\lambda(2x+2) & (1)\\ 2y=\lambda(8y) & (2)\\ 2z=\lambda(2z) & (3)\\ x^2+2x+4y^2+z^2=1 & (4)\end{cases}$$

$x=0$:
- $y=0$:
  - $z=0$ تناقض با (4)
  - $z\neq0 \xrightarrow{(1)} 2\lambda=0\to\lambda=0 \xrightarrow{(3)} z=0$ تناقض
- $y\neq0$:
  - $z=0 \xrightarrow{(1)} 2\lambda=0\to\lambda=0 \xrightarrow{(2)} y=0$ تناقض
  - $z\neq0 \xrightarrow{(1)} 2\lambda=0\to\lambda=0 \xrightarrow{(2)} y=0$ تناقض

$x\neq0$:
- $y=0$:
  - $z=0 \xrightarrow{(4)} x^2+2x=1 \Rightarrow x^2+2x-1=0 \to x=-1\pm\sqrt{1+1} \to x=-1\pm\sqrt2$
  - $z\neq0 \xrightarrow{(3)} \lambda=1 \xrightarrow{(1)} 2x=2x+2 \Rightarrow 0=2$ (غ)
- $y\neq0$:
  - $z=0 \xrightarrow{(2)} \lambda=\frac14 \xrightarrow{(1)} 8x=2x+2 \to x=1/3$
  - $z\neq0$ تناقض ← $(2)\to\lambda=\frac14$ ، $(3)\to\lambda=1$

$x=-1\pm\sqrt2 \xrightarrow{(1)} \lambda=\frac{2x}{2x+2} \to \lambda=\frac{2(-1\pm\sqrt2)}{2(-1\pm\sqrt2)+2}$

$\to P_1(-1+\sqrt2,0,0)$ ، $P_2(-1-\sqrt2,0,0)$

$x=1/3 \xrightarrow{(4)} 4y^2=\frac{2}{9}\to y=\pm\frac{\sqrt2}{2\times3}$

$\to P_3(\frac13,\frac{\sqrt2}{6},0)$ ، $P_4(\frac13,-\frac{\sqrt2}{6},0)$

نقاط	مقدار تابع
$P_1(-1+\sqrt2,0,0)$	$f(P_1)=(-1+\sqrt2)^2=0.171$
$P_2(-1-\sqrt2,0,0)$	$f(P_2)=(1+\sqrt2)^2$ max مطلق
$P_3(\frac13,\frac{\sqrt2}{6},0)$	$f(P_3)=\frac19+\frac{2}{36}=\frac16\simeq0.166$ min مطلق
$P_4(\frac13,-\frac{\sqrt2}{6},0)$	$f(P_4)=\frac19+\frac{2}{36}=\frac16$

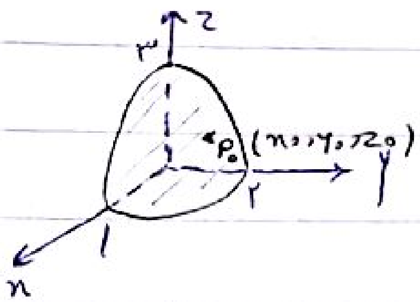
$\Rightarrow \min\limits_{S} f = 0{,}122 = f(P_3) = f(P_4)$

* پس P_3 و P_4 نزدیک‌ترین نقطه به مبدأ مختصات با فاصله $\sqrt{0{,}122}$

$\max\limits_{S} f = (1+\sqrt{2})^2 = f(P_2)$

و P_2 دورترین نقطه از مبدأ با فاصله $1+\sqrt{2}$ است.

مثال) فرض کنید S قسمتی از بیضی‌گون $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ در $\frac{1}{8}$ اول فضا (یعنی $x>0$, $y>0$, $z>0$) باشد. نقطه‌ای از این رویه را تعیین کنید که صفحه مماس بر S در این نقطه با صفحات مختصات، هرم با کمترین حجم ممکن تولید کند.



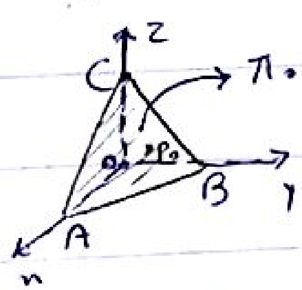
برای نقطه دلخواه $(x_0, y_0, z_0)\in S$ ابتدا صفحه مماس بر S در این نقطه را تعیین می‌کنیم. اگر π_0 این صفحه مماس باشد، آن‌گاه:

$g(x,y,z) = x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9} \to S: g(x,y,z)=1$

$\Rightarrow \nabla g(P_0) \perp \pi_0 \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{y}{2} \\ \frac{2z}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_0 \\ \frac{y_0}{2} \\ \frac{2z_0}{9} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} g(P_0) \perp \pi_0$

$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi_0$

$\Rightarrow \pi_0 = 2x_0(x-x_0)+\frac{y_0}{2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{9}(z-z_0)$



حجم هرم: $V_0 = \frac{1}{6}(OA)(OB)(OC)$

$2x_0(x_A - x_0)+\frac{y_0}{2}(0+y_0)+\frac{2z_0}{9}(0-z_0)=0$

$\Rightarrow x_A = \frac{2x_0^2+2y_0^2/4+2z_0^2/9}{2x_0} = \frac{2}{2x_0} = \frac{1}{x_0}$

$$2x_0(0-x_0)+\frac{y_0}{2}(y_B-y_0)+\frac{2z_0}{9}(0-z_0)=0$$

$$y_B=\frac{2\left(x_0^2+\frac{y_0^2}{4}+\frac{z_0^2}{9}\right)}{\frac{y_0}{2}}=\frac{4}{y_0} \qquad B=\left(0,\frac{4}{y_0},0\right)$$

به همین ترتیب $C\left(0,0,\frac{9}{z_0}\right)$.

$$V_0=\frac{1}{6}x_A y_B z_C=\frac{1}{6}\times\frac{36}{x_0y_0z_0}=\frac{6}{x_0y_0z_0}$$

بدین ترتیب کمترین مقدار تابع $V(x,y,z)=\frac{6}{xyz}$ را با شرط $g(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$

والبته $(x>0 , y>0 , z>0)$ تعیین می‌کنیم .

* با استفاده از روش لاگرانژ :

$$\begin{cases}\nabla V=\lambda\nabla g\\ g(x,y,z)=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\frac{-6}{x^2yz}=2\lambda x & (1)\\ \frac{-6}{xy^2z}=\lambda\left(\frac{2}{4}y\right) & (2)\\ -\frac{6}{xyz^2}=\lambda\left(\frac{2z}{9}\right) & (3)\\ x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1 & (4)\end{cases}$$

توجه داشته باشیم که در این دستگاه $(x\neq0 , y\neq0 , z\neq0)$.

$$\frac{(1)}{(2)}:\ \frac{y}{x}=\frac{x}{\frac{y}{4}} \rightarrow y^2=4x^2 \text{ یا } y=\pm 2x \rightarrow x=\pm\frac{1}{2}y$$

$$\frac{(2)}{(3)}:\ \frac{z}{y}=\frac{9y}{4z} \rightarrow 4z^2=9y^2 \text{ یا } z=\pm\frac{3}{2}y$$

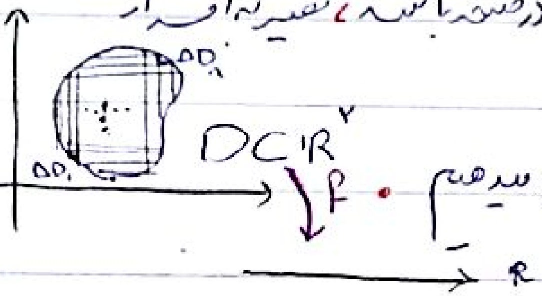
$$\xrightarrow{(4)}\ y=\pm\frac{2}{\sqrt3} \xrightarrow[\substack{y>0\\ z>0}]{x>0 \text{ فرض}} y=\frac{2}{\sqrt3} ,\ x=\frac{1}{\sqrt3} ,\ z=\sqrt3$$

نظیر به مقدار کمترین حجم هرم حاصل $P_0\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3},\sqrt3\right)$

« بیشترین حجم را نمی‌توان یافت ».

فصل دوم : انتگرال های چندگانه

انتگرال دوگانه : فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای بسته و کراندار در صفحه باشد، نظیر به افراز

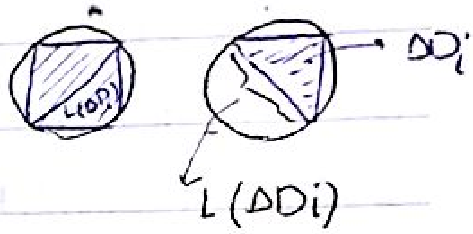


$P=\{\Delta D_1,\dots,\Delta D_n\}$ از این ناحیه به نواحی کوچک‌تر قرار میدهیم .

$\forall i=1,\dots,n \,,\quad \Delta A_i := \Delta D_i$ مساحت قطعه

$l(\Delta D_i) := \Delta D_i$ قطر ناحیه

$\|P\| := \max\{l(\Delta D_1), l(\Delta D_2), \dots, l(\Delta D_n)\}$

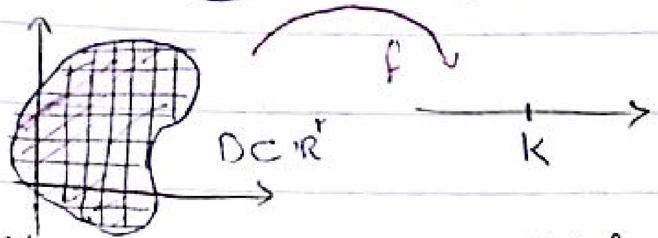


فرض کنیم $f: D\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار تعریف شده بر ناحیه D باشد . نظیر نقاط $p_1\in\Delta D_1,\dots,p_n\in\Delta D_n$ عبارت $\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta A_i$ را یک حاصل جمع ریمان تابع f بر ناحیه D و نظیر افراز P نامیده آن را با نماد $S(f,P)$ نشان میدهیم .

اکنون با تغییر افراز P به گونه ای که $\|P\|\to 0$، اگر عبارت $S(f,P)$ همگرا به عددی معین شوند، آن‌گاه f را بر D انتگرال پذیر ریمان نامیده، عدد فوق را با نماد $\iint_D f\,dA$ یا $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ نشان میدهند . پس :

$$\iint_D f\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P) = \lim \sum_{i=1}^{n} f(p_i)A_i$$

مثال) فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای بسته و کراندار (و مساحت پذیر) باشد. برای تابع ثابت $f=k$ بر D



انتگرال پذیری f بر D را بررسی کنید.

$\forall P=\{\Delta P_1,\dots,\Delta P_n\}$ $\qquad S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta A_i=\overset{k}{\cancel{f(p_1)}}\Delta A_1+\dots+\overset{k}{\cancel{f(p_n)}}\Delta A_n$

$\forall p_i\in\Delta D_i$ $\qquad = kA$

مساحت ناحیه D

$\Rightarrow \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P)=kA \Rightarrow$ $f=k$ بر D انتگرال پذیر است

$$\iint_D f\,dA=\iint_D k\,dA=kA$$

* خواص عمومی انتگرال دوگانه: خاصیت‌های زیر با استفاده از تعریف قابل تحقیق هستند.

۱. اگر توابع $f,g:D\to\mathbb{R}$ بر D انتگرال پذیر باشند آنگاه برای هر دو ثابت α,β،

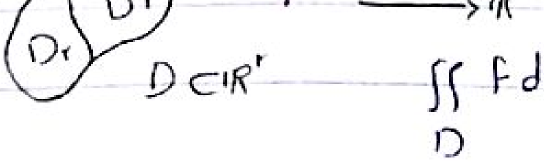
تابع $\alpha f+\beta g$ نیز بر D انتگرال پذیر بوده، داریم:

$$\iint_D(\alpha f+\beta g)\,dA=\alpha\left(\iint_D f\,dA\right)+\beta\left(\iint_D g\,dA\right)$$

۲. اگر توابع $f,g:D\to\mathbb{R}$ بر D انتگرال پذیر بوده، برای هر $(x,y)\in D$، $f(x,y)\le g(x,y)$

آنگاه $\iint_D f\,dA\le\iint_D g\,dA$

۳. فرض کنید f بر دو ناحیه D_1 و D_2 انتگرال پذیر بوده، $D_1\cap D_2$ حداکثر مجموعه‌ای از نقاط

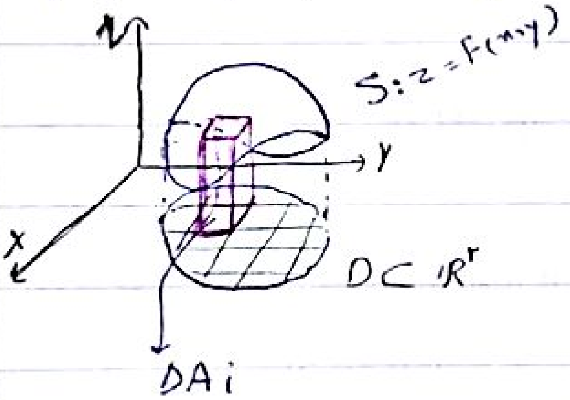


باشد. اگر قرار دهیم $D=D_1\cup D_2$ آنگاه

$$\iint_D f\,dA=\iint_{D_1} f\,dA+\iint_{D_2} f\,dA$$

همچنین می‌توان ثابت کرد که اگر $D\subset \mathbb{R}^2$ دامنه‌ای بسته، کراندار و مساحت‌پذیر بوده و $f:D\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ بر این دامنه پیوسته باشد آنگاه f بر D انتگرال‌پذیر است.

تعبیر هندسی انتگرال دوگانه: فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای بسته و کراندار (مساحت‌پذیر) و $f:D\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نامنفی باشد هم‌چنین فرض کنیم S رویه نمایش f یا رویه به معادله $z=f(x,y)$ بر دامنه D است در این صورت نظیر افرازی چون $P=\{\Delta D_1,\dots,\Delta D_n\}$ در ناحیه D و نظیر نقاط $p_1\in\Delta D_1$ و ... $p_n\in\Delta D_n$.



$S(f,P)=f(p_1)\Delta A_1+\dots+f(p_n)\Delta A_n$

$\simeq$ حجم زیر رویه S بالای ناحیه D

$\Rightarrow \iint_D f\,dA=\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P)=$ حجم زیر رویه S بالای ناحیه D

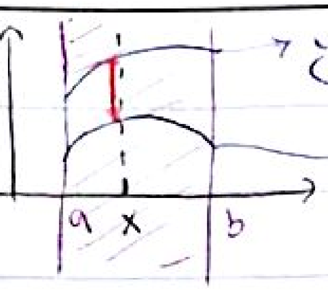
محاسبه انتگرال دوگانه:

نواحی ساده عمودی: ناحیه $D\subset\mathbb{R}^2$ را یک ناحیه ساده عمودی نامیم، هرگاه نظیر این ناحیه بازه‌ای چون $[a,b]$ و توابع $g_1, g_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ با شرط $g_1(x)\leq g_2(x)$ و $\forall x\in[a,b]$ وجود داشته باشند که: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$(x,y)\in D \Leftrightarrow \begin{cases} a\leq x\leq b \\ g_1(x)\leq y\leq g_2(x)\end{cases}$$

Year: Month: Day :

Subject:

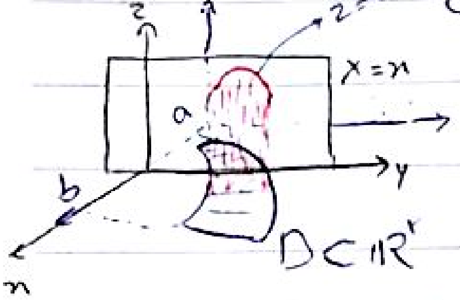


برای چنین ناحیه‌ای در صفحه فرض کنیم $f: D \to \mathbb{R}$:

تابعی پیوسته و نامنفی و $S \subset \mathbb{R}^3$ رویه نمایش

$\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 ;\ a\le x\le b\}$

f بر D باشد. در این صورت برای هر $x \in [a,b]$ ، عبارت



$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$ بیانگر مساحت بین نمودار $C = S\cap \pi_{x=x}$

بالای محور y بین $g_1(x)$ و $g_2(x)$ خواهد بود، به این ترتیب:

حجم زیر رویه S بالای D $= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$

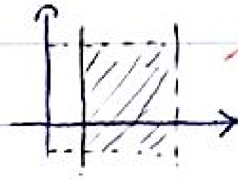
بر این اساس:

$$\iint_D f\,dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

مثال) مطلوبست محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر

الف) $\iint_D (2xy - y^2)\,dA$

D ناحیه محدود بین خطوط $x=-1$ ، $x=2$ ، $y=1$ ، $y=3$



$$(x,y)\in D \iff \begin{cases} -1 \le x < 2 \\ \underset{g_1(x)}{1} \le y < \underset{g_2(x)}{3} \end{cases}$$

$$\iint_D (2xy - y^2)\,dA = \int_{-1}^{2} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{-1}^{2} \left(\int_1^3 (2xy - y^2)\,dy \right) dy$$

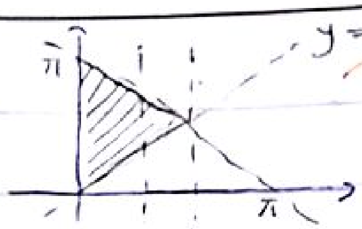
$$= \int_{-1}^{2} \left(xy^2 - \frac{1}{3}y^3 \Big|_1^3 \right) dx = \int_{-1}^{2} \left((9x-9) - (x - \tfrac{1}{3}) \right) dx = \int_{-1}^{2} \left(8x - \frac{26}{3} \right) dx$$

$$= 4x^2 - \frac{26}{3}x \Big|_{-1}^{2} =$$

Pixel notebook

Subject: Year: Month: Day :

ب) $\iint_D \sin(2x+y)\, dA$



$f(x,y) = \sin(2x+y)$

D ناحیه محصور توسط خطوط $x=0$, $y=x$, $x+y=\pi$

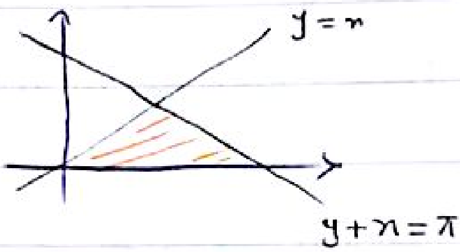
$$D: \begin{cases} 0 \le x < \pi/2 \\ \underbrace{x}_{g_1(x)} < y < \underbrace{\pi - x}_{g_2(x)} \end{cases}$$

$$\iint_D \sin(2x+y)\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_x^{\pi - x} \sin(2x+y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(2x+y) \Big|_x^{\pi - x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos(x+\pi) + \cos(3x) \right) dx = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

ج) $\iint \sin(2x+y)\, dA$



D ناحیه محصور توسط خطوط $y=0$, $y=x$, $x+y=\pi$

$$\iint_D \sin(2x+y)\, dA = \iint_{D_1} \sin(2x+y)\, dA + \iint_{D_2} \sin(2x+y)\, dA$$

$$D_1: \begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le x \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \pi - x \end{cases}$$

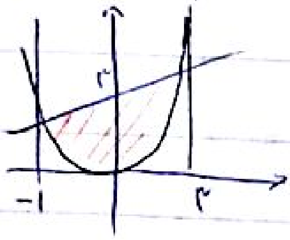
$$\iint_D \sin(2x+y)\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^x \sin(2x+y)\, dy\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\pi - x} \sin(2x+y)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(2x+y) \Big|_0^x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos(2x+\pi) \Big|_0^{\pi - x} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x - \cos 3x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos 2x - \cos(x+\pi))\, dx$$

د) $\iint_D x e^y\, dA$

D ناحیه محصور بین سهمی $y = x^2$ و خط $y = 2x + 3$



Pixel notebook

$$\begin{cases} -1\le x\le 3 \\ x^2< y< 2x+3 \end{cases} \qquad \iint_D xe^y\,dA=\int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} xe^y\,dy\,dx$$

$$=\int_{-1}^{3} x\int_{x^2}^{2x+3} e^y\,dy=\int_{-1}^{3} xe^y\Big|_{x^2}^{2x+3}=\int_{-1}^{3} xe^{2x+3}\,dy-\int_{-1}^{3} xe^{x^2}\,dx$$

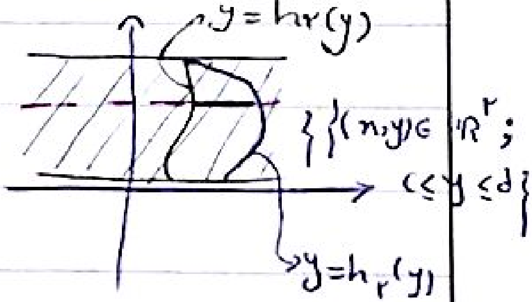
$$=\int_{-1}^{3} xe^{3}e^{2x}\,dx-\int_{-1}^{3} xe^{x^2}\,dx=e^3\int_{-1}^{3} xe^{2x}\,dx-\int_{-1}^{3} xe^{x^2}\,dx$$

تغییر متغیر

نواحی ساده افقی) ناحیه $D\subset\mathbb{R}^2$ را یک ناحیه ساده افقی نامیم هرگاه بازه‌ای چون $[c,d]\subset\mathbb{R}$ و توابع $h_1,h_2:[c,d]\to\mathbb{R}$ با شرط $h_1(y)\le h_2(y)$ برای هر $y\in[c,d]$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که:

$$(x,y)\in D \iff \begin{cases} c\le y\le d \\ h_1(y)\le x\le h_2(y) \end{cases}$$

شکل کامل نیست!



اگر $f:D\to R$ بر این ناحیه تماماً پیوسته باشد آنگاه می‌توان نشان داد که:

$$\iint_D f\,dA=\int_c^d\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

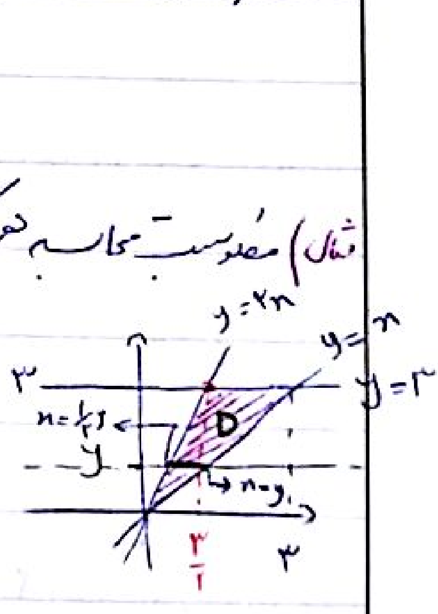
مثال) مطلوبست محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر؟

الف) $\iint_D 2xy\,dA$

D ناحیه محصور توسط خطوط $y=x$، $y=3$، $y=2x$.

به عنوان ناحیه ساده عمودی

$D=D_1\cup D_2$



$$D_1: \begin{cases} 0 \le x \le \frac{3}{2} \\ x \le y \le 2x \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} \frac{3}{2} \le x \le 3 \\ x \le y \le 3 \end{cases}$$

$$\iint_D f\, dA = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\int_x^{2x} 2xy\, dy \right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left(\int_x^{3} 2xy\, dy \right) dx$$

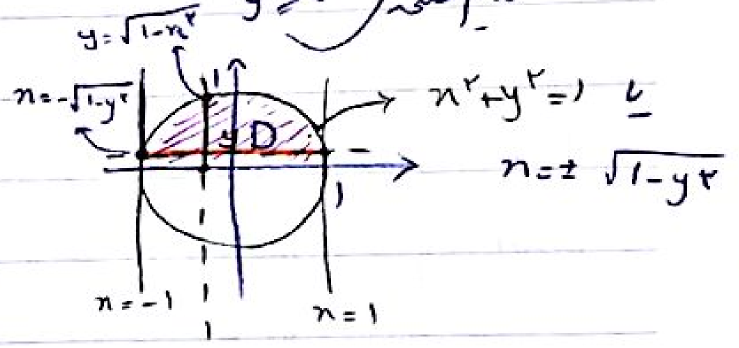
D به عنوان ناحیه ساده افقی: $\begin{cases} 0 \le y \le 3 \\ \underbrace{\frac{1}{2}y}_{h_1(y)} \le x \le \underbrace{y}_{h_2(y)} \end{cases}$

$$\iint_D 2xy\, dA = \int_0^3 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^{y} 2xy\, dx \right) dy = \int_0^3 y \left(\int_{\frac{1}{2}y}^{y} 2x\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^3 y\, x^2 \Big|_{\frac{1}{2}y}^{y} dy = \int_0^3 \frac{3}{4} y^3 dy = \frac{3}{16} y^4 \Big|_0^3 = \cdots \frac{243}{16}$$

ب) $\iint_D x^2 \sqrt{1-y^2}\, dA$ $\quad x^2+y^2=1$ D ناحیه محصور توسط دایره در نیم صفحه $y \ge 0$

$$\left(= \iint_D x^2 \sqrt{1-y^2}\, dx\, dy \right)$$



D به عنوان ناحیه ساده عمودی: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{cases}$

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 \sqrt{1-y^2}\, dy \right) dx$$ سخت است.

D به عنوان ناحیه ساده افقی: $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \end{cases}$

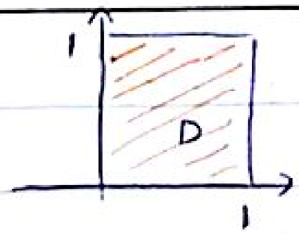
$$I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2 \sqrt{1-y^2}\, dx \right) dy = \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2 dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \left((1-y^2)^{\frac{3}{2}} + (1-y^2)^{\frac{3}{2}} \right) dy = \frac{2}{3} \int_0^1 (1-y^2)^2 dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 (1 + y^4 - 2y^2)\, dy = \cdots$$

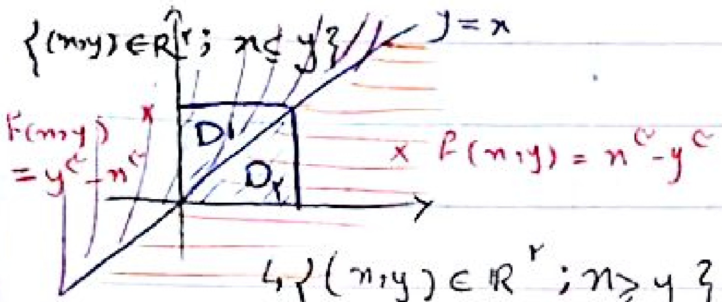
Subject: Year: Month: Day :

ج) $\iint\limits_D |x^2-y^2|\, dx dy$



$D := [0,1]\times[0,1] = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ 0\le x\le 1 ,\quad 0\le y\le 1\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2-y^2 & x\geq y \\ y^2-x^2 & x<y \ \ \underline{!}\ (x\le y) \end{cases}$$



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_1} (y^2-x^2)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (x^2-y^2)\,dxdy$$

انتی $D_1 = \begin{cases} 0\le y\le 1 \\ 0\le x\le y \end{cases}$ $\quad I = \int_0^1\int_0^y (y^2-x^2)\,dx\,dy$

انتی $D_2 = \begin{cases} 0\le y\le 1 \\ y\le x\le 1 \end{cases}$ $\quad + \int_0^1\int_y^1 (x^2-y^2)\,dx\,dy$

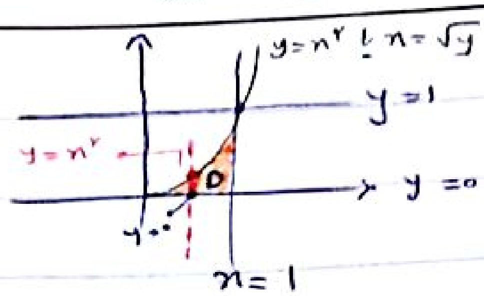
$$= \int_0^1 \left(y^2x - \tfrac{1}{4}x^4 \Big|_0^y\right) dy + \int_0^1 \left(\tfrac{1}{4}x^4 - xy^2 \Big|_y^1\right) dy = \dots$$

مثال) مطلوبست محاسبه هر یک از عبارات زیر:

الف) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{y/x}\,dx\,dy \qquad \left(\int e^{\frac{k}{x}}dx\right)$

Subject: Year: Month: Day :

$$D:\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ \sqrt{y}\le x\le 1 \end{cases}$$

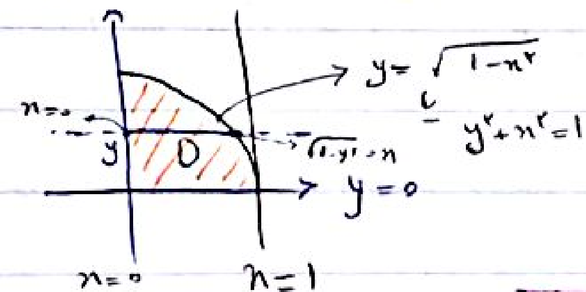


$$I=\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dA$$ [illegible] D : $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le x^2 \end{cases}$

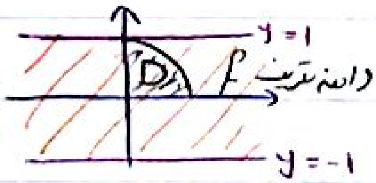
$$I=\iint_D e^{y/x}\,dA=\int_0^1\int_0^{x^2} e^{y/x}\,dy\,dx=\int_0^1 x e^{y/x}\Big|_0^{x^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 x(e^x-1)\,dx=\int_0^1 xe^x\,dx-\int_0^1 x\,dx=\dots$$

ب) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}dy\,dx$ $\quad D:\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2} \end{cases}$



$$=\iint_D \underbrace{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}_{f(x,y)}\,dy\,dx$$



$$D:\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ 0\le x\le \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$ $\iint_D (1-y^2)^{\frac{3}{2}}\underbrace{dx\,dy}_{dA}=\int_0^1\int_0^{\overbrace{\sqrt{1-y^2}}^{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}dx\,dy$

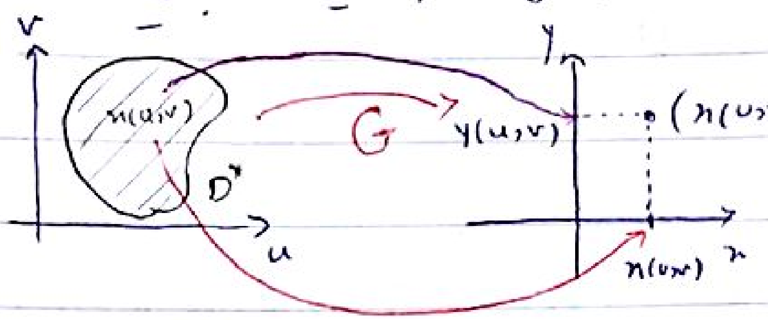
$$=\int_0^1 (1-y^2)^{3/2}\left(\int_0^{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}dx\right)dy=\int_0^1(1-y^2)^2\,dy=\dots$$

Subject: Year: Month: Day :

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه ۸ فرض کنیم $D^* \subset \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای از صفحه متغیرهای u و v

بوده، توابع $x = x(u,v)$ و $y = y(u,v)$ توابعی تعریف شده بر این دامنه مشترک

D^* باشند. در این صورت: $(x(u,v), y(u,v))$



تابع G با دستور $G(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ تابعی با دامنه D^* و مقادیر در

صفحه $\mathbb{R}^2$ (صفحه متغیرهای x و y) خواهد بود. به علاوه فرض کنیم: الف) تابع $G: D^* \to \mathbb{R}^2$

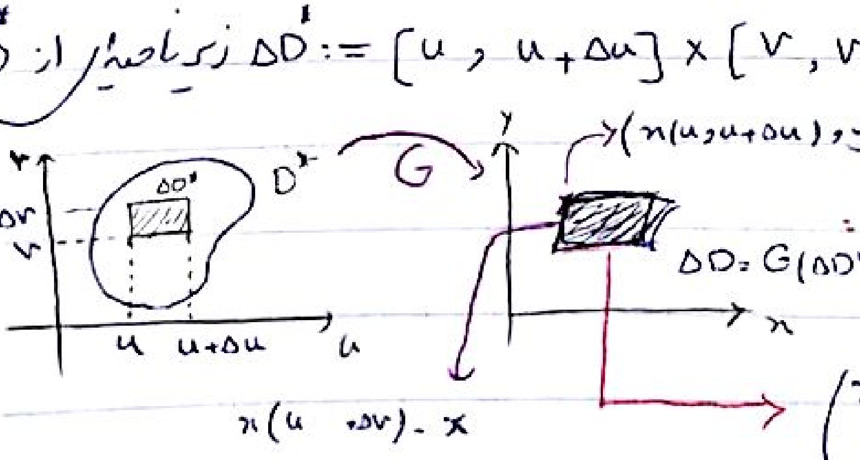
در نقاط درونی D^* یک به یک باشد. ب) توابع $x(u,v)$ و $y(u,v)$ در نقاط درونی D^*

مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشند. ج) برای هر نقطه درونی D^*، $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$

عبارت اخیر را با نماد $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ نشان داده، آن را ژاکوبین تبدیل متغیر می‌نامیم.

تحت شرایط فوق، فرض کنیم $\Delta D^* := [u, u+\Delta u] \times [v, v+\Delta v]$ زیرناحیه‌ای از D^*

بوده، $G(\Delta D^*) = \Delta D$. در این صورت:



$$\begin{pmatrix} x(u,u+\Delta u) - x(\ ,\ ) \\ y(\ ,v+\Delta v) - y(\ ,\ ) \end{pmatrix}$$

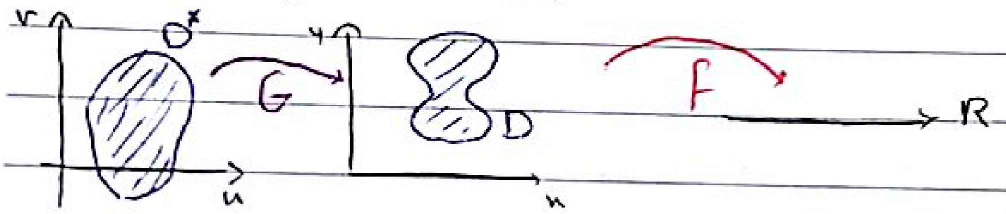
ناقص

ΔA مساحت ناحیه ΔD $\simeq \left\| \begin{pmatrix} x(u+\Delta u, v) - x(u,v) \\ y(u+\Delta u, v) - y(u,v) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(u, v+\Delta v) - x(u,v) \\ y(u, v+\Delta v) - y(u,v) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$

$$\simeq \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u \\ \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v \\ \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \Delta u \Delta v$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{pmatrix} \right\| \Delta u \Delta v = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \underbrace{\Delta A^*}_{\Delta u \Delta v}$$

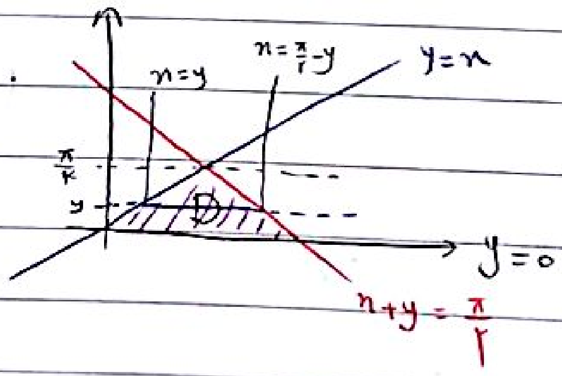
بر این اساس؛ اگر $D = G(D^*)$ ، $f: D \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته روی ناحیه باشد، میتوان ثابت کرد که:



$$\iint_D f\,dA = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \underbrace{dA^*}_{du\,dv}$$

مثال) مطلوبست محاسبه هر یک از انتگرال های زیر؟

الف) $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\,dy$



ناحیه D محصور توسط خطوط $y=x$ ، $y=0$ و $x+y=\frac{\pi}{2}$

به عنوان ساده افقی : $D: \begin{cases} 0 \le y \le \frac{\pi}{4} \\ y \le x \le \frac{\pi}{2} - y \end{cases}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\,dy$$

با فرض تغییر u و v

به صورت:

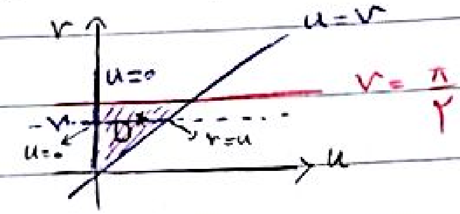
Subject:

خواهیم داشت: $\begin{cases} x = x(u,v) = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = y(u,v) = \frac{1}{2}(v-u) \end{cases}$ یا $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$

$y = x$ یا $y - x = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$x + y = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow v = \frac{\pi}{2}$

$y = 0 \Leftrightarrow u = v$



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$$

در نتیجه:

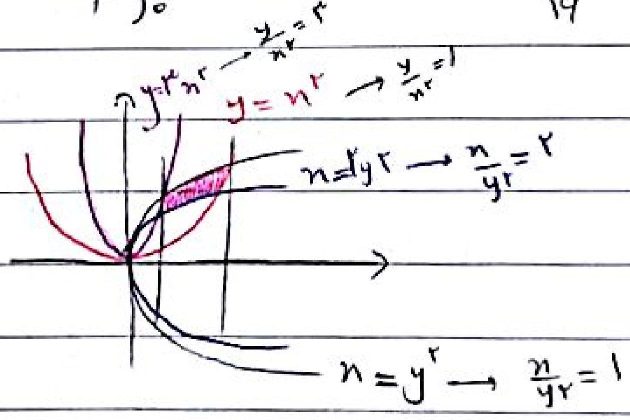
$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\,dy = \iint_{D'} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D^*} \cos\left(\frac{u}{v}\right) du\,dv$$

D^* به عنوان ساده است: $\begin{cases} 0 \leq v \leq \pi/2 \\ 0 \leq u \leq v \end{cases} \rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) du\,dv$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v \sin\left(\frac{u}{v}\right)\Big|_0^v dv = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} v\sin(1)\,dv = \frac{\pi^2}{16}\sin(1)$$

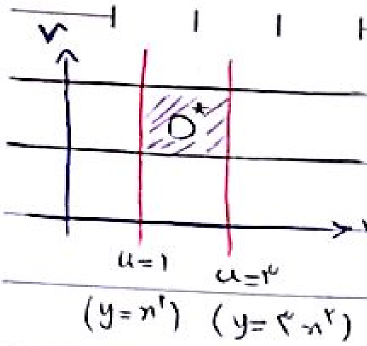
ب) $\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy$



D ناحیه محصور توسط $x = 2y^2$, $x = y^2$, $y = 2x^2$, $y = x^2$.

با تعریف متغیرهای u, v به صورت $\begin{cases} u = \frac{y}{x^2} \\ v = \frac{x}{y^2} \end{cases}$ و یا $\begin{cases} x = u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \\ y = u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \end{cases}$

$$\frac{u}{v} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 \Rightarrow \frac{y}{x} = u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}}}{u} = u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}}$$



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}u^{-5/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{-4/3}\\ -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{-2/3} & -\frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-5/3}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{4}{9}u^{-2}v^{-2}-\frac{1}{9}u^{-2}u^{-2}=\frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}$$

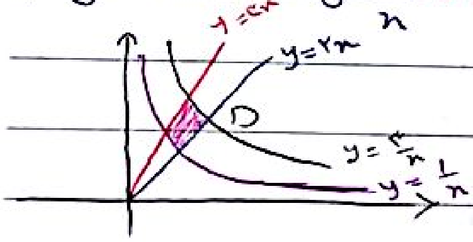
$$\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy=\iint_{D^*}\frac{x(u,v)}{y(u,v)}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv=\iint_{D^*}\frac{u^{-2/3}v^{-1/3}}{u^{-1/3}v^{-2/3}}\left|\frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}\right|du\,dv$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{D^*}u^{-7/3}v^{-5/3}\,du\,dv=\frac{1}{3}\int_1^3\int_1^2 u^{-7/3}v^{-5/3}\,dv\,du$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^3 u^{-7/3}\left(\int_1^2 v^{-5/3}dv\right)du=\frac{1}{3}\left(\int_1^2 v^{-5/3}dv\right)\left(\int_1^3 u^{-7/3}du\right)$$

$$=\dots$$

مثال 8 مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه محصور توسط منحنی‌های $y=\frac{1}{x}$ ، $y=\frac{3}{x}$ و خطوط $y=2x$ و



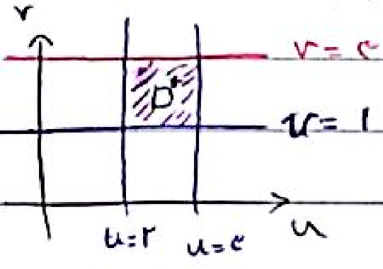
$y=4x$ در $\frac{1}{4}$ اول صفحه .

$$\text{مساحت ناحیه } D=\iint_D 1\,dxdy$$

با تعریف متغیر $\begin{cases}u=y/x\\ v=xy\end{cases}$

یا $\begin{cases}x=u^{-1/2}v^{1/2}\\ y=u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\end{cases}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}u^{-3/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2}\\ \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-1/2}\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}u^{-1}$$

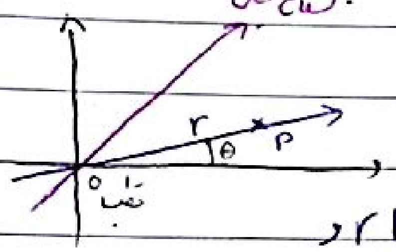


$$\Rightarrow \text{مساحت ناحیه } D=\iint_D 1\,dxdy=\iint_{D^*}1\left|-\frac{1}{2}u^{-1}\right|du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D^*} \frac{1}{u}\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_2^3\int_1^3 \frac{1}{u}\, dv\, du = \frac{1}{2}\left(\int_2^3 \frac{1}{u}\, du\right)\left(\int_1^3 dv\right) = \dots$$

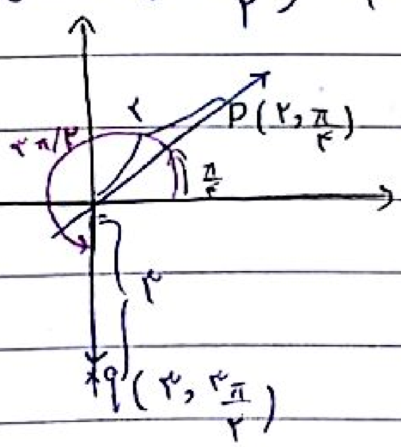
۸ . تغییر متغیر قطبی

برای مشخص کردن نقاط در یک صفحه دکارتی علاوه بر استفاده از سیستم مختصات دکارتی می‌توانیم از روش دیگری به شرح زیر نیز استفاده کنیم، در دستگاه جدید، مبدأ مختصات را قطب و هر خط جهت دار گذرنده از قطب را یک شعاع قطبی می‌نامیم.



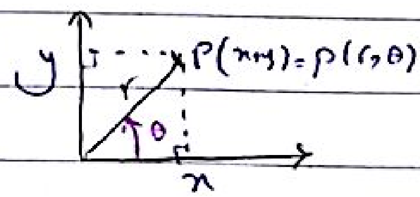
اکنون برای نقطه‌ای چون P واقع در این صفحه اگر فاصله P تا قطب را با r و زاویه بین شعاع قطبی در برگیرنده نقطه P با جهت مثبت محور xها را با θ نشان دهیم آنگاه زوج (r, θ) نقطه P را به نحو منحصر به فردی نسبت به سایر نقاط صفحه متمایز می‌کند. روش اخیر مختصات دهی نقاط را سیستم مختصات قطبی می‌نامیم.

مثال) به عنوان مثال نقاط P و q با مختصات قطبی $(2, \frac{\pi}{4})$ و $(3, \frac{3\pi}{2})$ در شکل زیر مشاهده میشوند.



فرض کنیم نقطه P در صفحه دکارتی دارای مختصات دکارتی (x, y) و مختصات قطبی (r, θ) باشد.

در این صورت



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \tan\theta = x/y \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

براساس بحث فوق تبدیل r و θ را تبدیل قطبی (تغییر متغیر

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$$

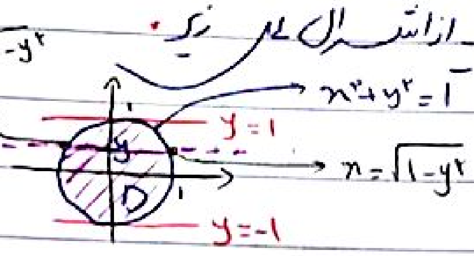
را تغییر متغیر قطبی می‌نامیم. در این تغییر متغیر:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

مثال) مطلوبست محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر:

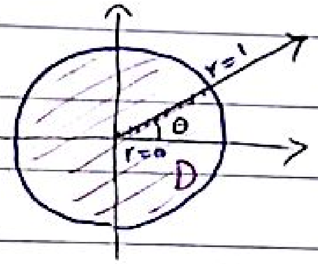
الف) $\iint_D x^2\,dx\,dy$

D ناحیه محصور توسط دایره $x^2+y^2=1$



D به عنوان ناحیه ساده افقی:
$$\begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2\,dx\,dy$$



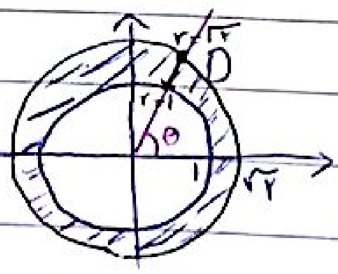
در تغییر متغیر قطبی

$$(r,\theta)\in D \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta)^2 \underbrace{|r|}_{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|} dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)d\theta = \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)$$

ب) $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$



D ناحیه محصور بین دو دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=2$.

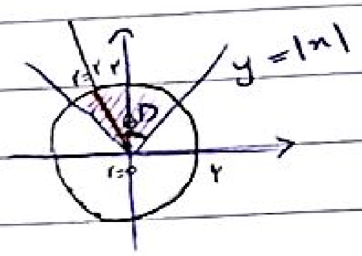
با تغییر متغیر قطبی:

$$(r,\theta)\in D \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le r \le \sqrt{2} \end{cases}$$

Subject:

$I=\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt2} r^2|r|\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_1^{\sqrt2} r^3\,dr\right.$

ج) $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$

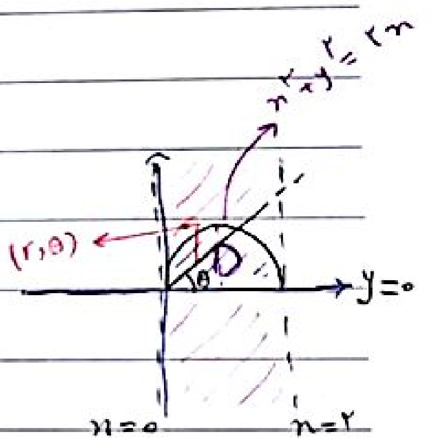


D ناحیه بالای $y=|x|$ ، زیر دایره $x^2+y^2=4$

$D:\begin{cases} \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4} \\ 0\le r\le 2\end{cases}$ $\quad\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^2 \frac{1}{1+r^2}\,r\,dr\,d\theta$

$=\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi/4} d\theta\right)\left(\underbrace{\int_0^2 \frac{r}{1+r^2}\,dr}_{\frac12 \ln(1+r^2)\big|_0^2}\right)$

د) $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$



$D\begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le \sqrt{2x-x^2}\end{cases}$ $\quad y=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow x^2+y^2=2x$

$\Downarrow$

$(x-1)^2+y^2=1$

$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

$r^2=2r\cos\theta$

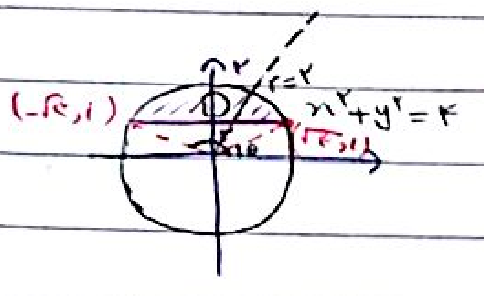
$\Downarrow$

$r=2\cos\theta \longrightarrow D:\begin{cases} 0\le\theta\le\pi/2 \\ 0\le r\le 2\cos\theta\end{cases}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r\,|r|\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta} r^2\,dr\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac13 r^3\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$

$=\frac83\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \frac83\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,(1-\sin^2\theta)\,d\theta = \dots$

ه) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$



D ناحیه بالای خط $y=1$ ، محصور توسط دایره $x^2+y^2=4$.

Subject:

ساده عکس D : $\begin{cases} -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3} \\ 1 \le y \le \sqrt{4-x^2} \end{cases}$ $\qquad I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{1}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx$

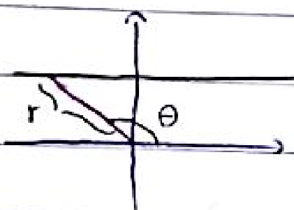
* محاسبه انتگرال سخت است بنابراین با استفاده از تغییر متغیر قطبی می‌رویم .

با استفاده از تغییر متغیر قطبی :

$\begin{cases} \tan\theta = \frac{y}{x} \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ برای قطبی

$\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ داریم

$D: \begin{cases} \pi/4 \le \theta \le 5\pi/6 \\ \frac{1}{\sin\theta} \le r \le 2 \end{cases}$



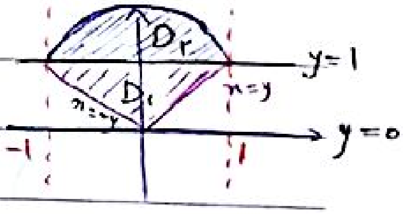
مثلاً : $y=1 \quad \{(x,y) : y=1\} = \{(r,\theta) ; \ r\cos\theta = 1\}$

$r = \frac{1}{\cos\theta}$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{5\pi/6} \int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2} \frac{1}{r}\, r\, dr\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{5\pi/6} \int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2} 1\, dr\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(2 - \frac{1}{\sin\theta}\right) d\theta = \dots$$

و) $\int_0^1 \int_{-y}^{y} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy + \int_{-1}^{1} \int_{1}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dy\, dx$. تمرین

$D_1 : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ -y \le x \le y \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 1 \le y \le \sqrt{2-x^2} \end{cases}$



$D := D_1 \cup D_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \le \theta \le 3\pi/4 \\ 0 \le r \le \sqrt{2} \end{cases}$

ادامه «تمرین»

مثال) مطلوبست تعیین مساحت هر یک از نواحی زیر :

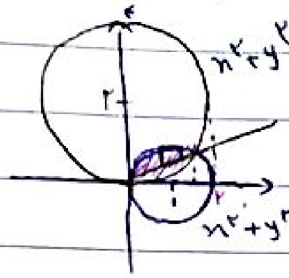
الف) مساحت محصور بین دو دایره $x^2+y^2=2x$ و $x^2+y^2=2y$.

$x^2+y^2 = 2x \quad$ یا $\quad (x-1)^2 + y^2 = 1$

$x^2+y^2 = 4y \quad$ یا $\quad x^2 + (y-2)^2 = 4$

Subject:

$r=4\sin\theta$ یا $r^2=4r\sin\theta$ یا $x^2+y^2=4y$



D مساحت ناحیه $= \iint_D 1\,dx\,dy$

$x^2+y^2=2x$ یا $r^2=2r\cos\theta$ یا $r=2\cos\theta$

محل برخورد $\begin{cases} r=2\cos\theta \\ r=4\sin\theta \end{cases}$ $\quad \tan\theta=1/2 \rightarrow \theta_0=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

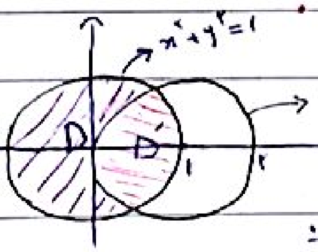
$D=D_1\cup D_2 \qquad D_1:\begin{cases} 0\leq\theta\leq\theta_0 \\ 0\leq r\leq 4\sin\theta \end{cases} \qquad D_2:\begin{cases} \theta_0\leq\theta\leq\pi/2 \\ 0\leq r\leq 2\cos\theta \end{cases}$

D مساحت ناحیه $=\int_0^{\theta_0}\int_0^{4\sin\theta} 1\times r\,dr\,d\theta+\int_{\theta_0}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} 1\times r\,dr\,d\theta$

$=\int_0^{\theta_0}\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{4\sin\theta}d\theta+\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta=\left(8\int_0^{\theta_0}\sin^2\theta\,d\theta\right.$

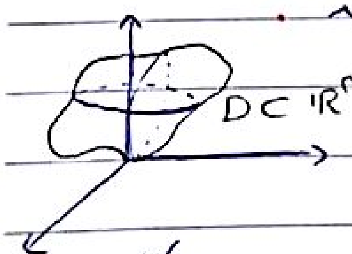
$\left.+2\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\right)=\dots$

ب) ناحیه خارج دایره $x^2+y^2=2x$ و محصور توسط دایره $x^2+y^2=1$.



تمرین. D مساحت $=\pi\times 1^2-$ D' مساحت

انتگرال سه گانه: فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^3$ ناحیه بسته و کراندار باشد.



نظیر افراز $P=\{\Delta D_1,\dots,\Delta D_n\}$ از این ناحیه به قطعات کوچک‌تر

قرار می‌دهیم. $\forall i=1,\dots,n \quad \Delta v_i=\Delta D_i$ حجم ناحیه

$\|P\|:=$ بیشترین قطر نواحی ΔD_i نظیر افراز فوق

فرض کنیم $f: D \to R$ تابعی کراندار تعریف شده بر ناحیه D باشد. متناظر با افراز فوق از D

و انتخاب نقاط $p_1 \in \Delta D_1, \dots, p_n \in \Delta D_n$ عبارت $f(p_1)\Delta v_1 + \dots + f(p_n)\Delta v_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta v_i$

را یک حاصل جمع ریمان f بر D نامیده، آن را با نماد $S(f,p)$ نشان میدهیم.

اگر با تغییر افراز P به گونه‌ای که $\|P\| \to 0$، اعداد $S(f,p)$ همگرا به عدد معین شوند، آنگاه

f را بر D انتگرال پذیر نامیده، عدد $\lim_{\|P\| \to 0} S(f,p)$ را با نماد $\iiint_D f\,dv$ یا $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

نشان میدهیم.

مثال) فرض کنیم f بر D تابع $f=1$ باشد.

$\forall P = \{\Delta D_1, \dots, \Delta D_n\}$, $\forall p_1 \in \Delta D_1, \dots, p_n \in \Delta D_n$

$$S(f,p) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta v_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = V(\text{حجم ناحیه } D)$$

$\Rightarrow \lim_{\|P\| \to 0} S(f,p) = V \Rightarrow$ تابع ثابت $f=1$ انتگرال پذیر بوده (بر D)

و داریم، حجم ناحیه D ، $V = \iiint_D 1\,dv$

تذکر: مثال فوق (یعنی تابع ثابت $f=1$) تنها حالتی است که انتگرال نشانه دارای

تعبیر هندسی است.

قضیه: اگر $D \subset \mathbb{R}^3$ ناحیه‌ای بسته و کراندار (و اندازه پذیر ژوردان) باشد و $f: D \to \mathbb{R}$
Jordan

بر D تابعی پیوسته باشد، آنگاه f بر D انتگرال پذیر خواهد بود.

Subject:

میتوان ثابت کرد که تمام خاصیت‌های مشابهی که برای انتگرال دوگانه بیان شد، برای انتگرال سه‌گانه نیز برقرار هستند. به‌طور مثال:

الف) $\iiint_D (\alpha f+\beta g)\,dv$

$= \alpha\left(\iiint_D f\,dv\right)+\beta\left(\iiint_D g\,dv\right)$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ثابت ، $f,g:D\to\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر

ب) $D=D_1\cup D_2$

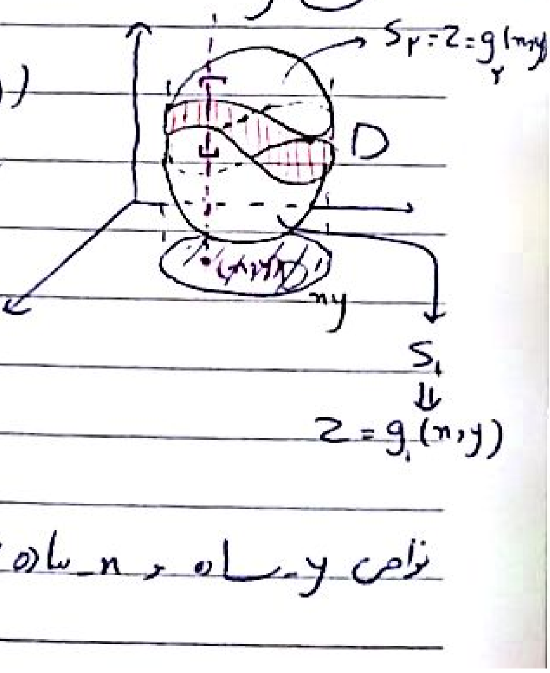
$0=(D_1\cap D_2)$ حجم $\Rightarrow \iiint_D f\,dv=\iiint_{D_1} f\,dv+\iiint_{D_2} f\,dv$

محاسبه انتگرال سه‌گانه

محاسبه انتگرال سه‌گانه را بر روی سه دسته نواحی در فضا به شرح زیر بیان می‌کنیم:

نواحی z-ساده: ناحیه $D\subset\mathbb{R}^3$ را یک ناحیه z-ساده نامیم، هرگاه متناظر این ناحیه دامنه‌ای چون $D_{xy}\subset\mathbb{R}^2$ و توابع $g_1, g_2: D_{xy}\to\mathbb{R}$ به شرط $g_1(x,y)\le g_2(x,y)$ برای هر $(x,y)\in D_{xy}$، به گونه‌ای که: $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)\in D \Leftrightarrow \begin{cases}(x,y)\in D_{xy}\\ g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\end{cases}$$



اگر f در ضمن ناحیه‌ی D پیوسته باشد آنگاه می‌توان ثابت کرد که:

$$\iiint_D f\,dv=\iint_{D_{xy}}\left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

نواحی y-ساده و x-ساده نیز به طور مشابه تعریف شده و انتگرال سه‌گانه روی این نواحی

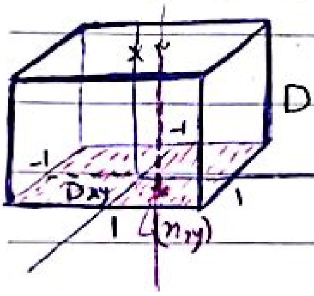
Subject:

باشد فوق قابل بیان خواهد بود.

مثال) مطلوبست محاسبه هر یک از انتگرال های زیر:

الف) $\iiint_D (2x - yz)\, dv$

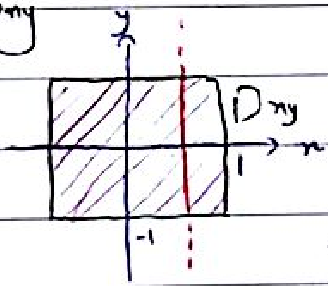
$D = [-1,1]\times[-1,1]\times[0,3] = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \; ; \; -1\leq x\leq 1 \;,\; -1\leq y\leq 1 \;,\; 0\leq z\leq 3\}$



$$D: \begin{cases} (x,y)\in D_{xy} \\ \underbrace{g_1(x,y)}_{0} \leq z \leq \underbrace{g_2(x,y)}_{3} \end{cases}$$

$$\iiint (2x-yz)\, dv = \iint_{D_{xy}} \left(\int_0^3 (2x-yz)\, dz \right) dx\, dy = \iint_{D_{xy}} 2xz - \frac{1}{2} y z^2 \Big|_0^3 \, dx\, dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(6x - \frac{9}{2} y\right) dx\, dy$$

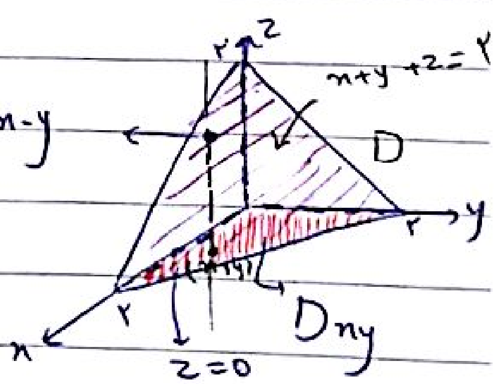


D_{xy} ساده عمودی : $\begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ -1\leq y\leq 1 \end{cases}$

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(6x - \frac{9}{2}y\right) dy\, dx = \int_{-1}^{1} 6xy - \frac{9}{4} y^2 \Big|_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{1} 12x\, dx = 0$$

ب) $\iiint_D \sin(\pi(x+z))\, dv$

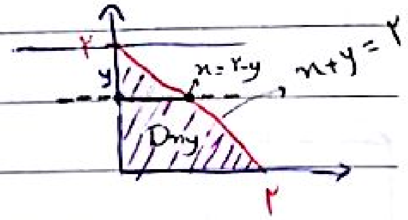
ناحیه محصور توسط صفحه $x+y+z=2$ ، صفحات مختصات. D



$D: \begin{cases} (x,y) \in D_{xy} \\ 0 \leq z \leq 2-x-y \end{cases}$ $\qquad I = \iint_{D_{xy}} \left(\int_0^{2-x-y} \sin(\pi(x+z))\, dz \right) dx\, dy$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x + \pi z) \Big|_0^{2-x-y} \right) dx\, dy = \frac{-1}{\pi} \iint_{D_{xy}} \Big(\overbrace{\cos(\pi x + 2\pi - \pi x - \pi y)}^{\cos(\pi y)} - \cos \pi x \Big) dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint_{D_{xy}} (\cos \pi x - \cos \pi y)\, dx\, dy$$

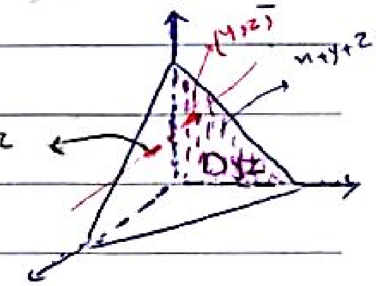


D_{xy} ساده است $D_{xy} = \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 2-y \end{cases}$ $\qquad I = \frac{1}{\pi} \int_0^2 \int_0^{2-y} (\cos \pi x - \cos \pi y)\, dx\, dy$

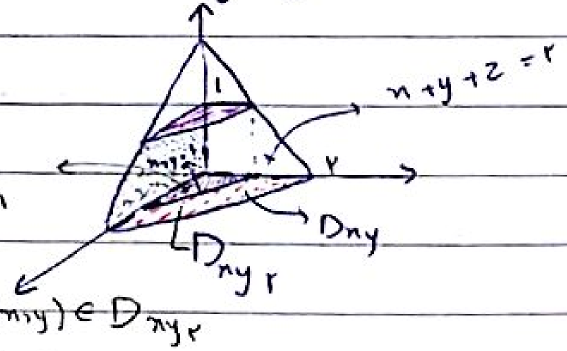
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^2 \left(\frac{1}{\pi} \sin \pi x - x \cos \pi y \Big|_0^{2-y} \right) dy = \ldots$$

در همین مثال اگر D را به عنوان یک ناحیه x-ساده در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$I = \iint_{D_{yz}} \left(\int_0^{2-y-z} \sin(\pi x - \pi z)\, dx \right) dy\, dz$$



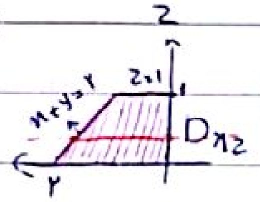
ج) $\iiint_D y\, dv$



D متشکل از ناحیه بالا و پایین صفحه $z=1$

D به عنوان ناحیه z ساده $\quad \underbrace{\begin{cases} (x,y) \in D_{xy_1} \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}}_{D_1} \cup \underbrace{\begin{cases} (x,y) \in D_{xy_2} \\ 0 \leq z \leq 2-x-y \end{cases}}_{D_2}$

D به عنوان ناحیه y - ساده



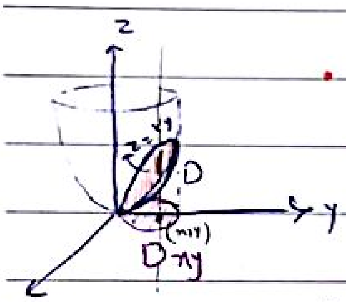
$$\begin{cases} (x,z)\in D_{xz} \\ 0\le y\le 2-x-z \end{cases}$$

$$I=\iint_{D_{xz}}\left(\int_0^{2-x-z} y\,dy\right)dx\,dy=\iint_{D_{xz}}\frac{1}{2}(2-x-z)^2\,dx\,dz$$

D_{xz} افقی : $\begin{cases} 0\le z\le 1 \\ 0\le x\le 2-z \end{cases}$ $\quad I=\int_0^1\int_0^{2-z}\frac{1}{2}(2-x-z)^2\,dx\,dz$

مثال) مطلوبست محاسبه حجم هر یک از نواحی زیر.

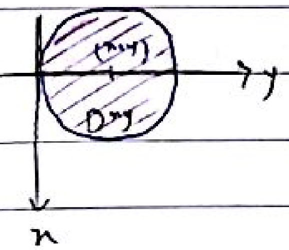
الف) حجم داخل سهمی گون $z=x^2+y^2$ محدود شده توسط صفحه $z=2y$.



$$V=\iiint_D 1\,dV$$

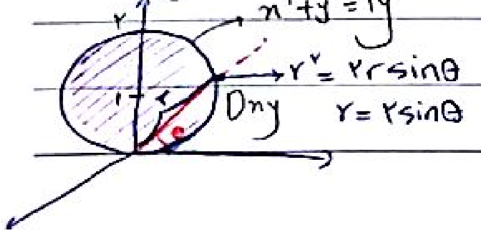
$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2y \end{cases}\rightarrow x^2+y^2=2y \quad \text{یا} \quad x^2+(y-1)^2$$

D به عنوان z-ساده : $\begin{cases} (x,y)\in D_{xy} \\ x^2+y^2\le z\le 2y \end{cases}$



$$V=\iint_{D_{xy}}\left(\int_{x^2+y^2}^{2y}1\,dz\right)dx\,dy=\iint_{D_{xy}} z\Big|_{x^2+y^2}^{2y}\,dx\,dy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(2y-(x^2+y^2)\right)dx\,dy$$



قطبی D_{xy} : $\begin{cases} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le r\le 2\sin\theta \end{cases}$

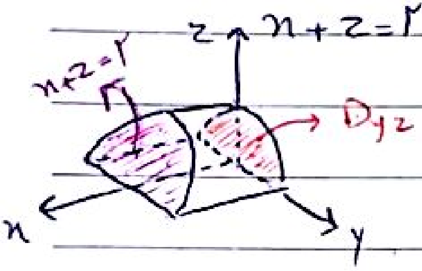
Subject:

$$V=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\left(2r\sin\theta-r^2\right)|r|\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\frac{2}{3}r^3\sin\theta-\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{2\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{16}{3}\sin^4\theta-4\sin^4\theta\right)d\theta$$

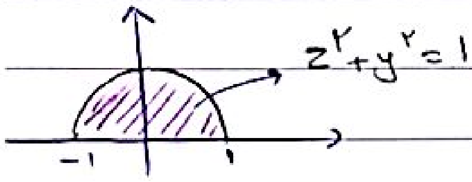
* در محاسبه حجم با استفاده از انتگرال های سه گانه امکان ندارد حاصل منفی باشد.

ب) حجم محصور توسط رویه $z=\sqrt{1-y^2}$ و صفحات $x=0$ ، $z=0$ ، $x+z=2$



$$V=\iiint_D 1\,dv=\iiint_D 1\,dx\,dy\,dz$$

$$D:\begin{cases}(y,z)\in D_{yz}\\ 0\le x\le 2-z\end{cases}$$

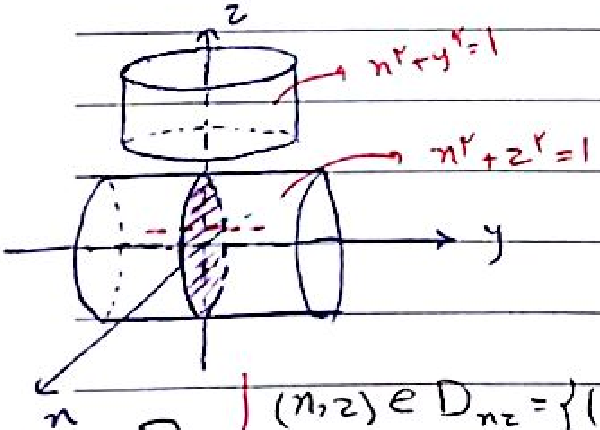


$$V=\iint_D\left(\int_0^{2-z}1\,dx\right)dy\,dz=\iint_{D_{yz}}(2-z)\,dy\,dz$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^1(2-2\sin\theta)r\,dr\,d\theta=\dots$$

$$D_{yz}:\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\ 0\le r\le 1\end{cases},\quad\begin{cases}y=r\cos\theta\\ z=r\sin\theta\end{cases}$$

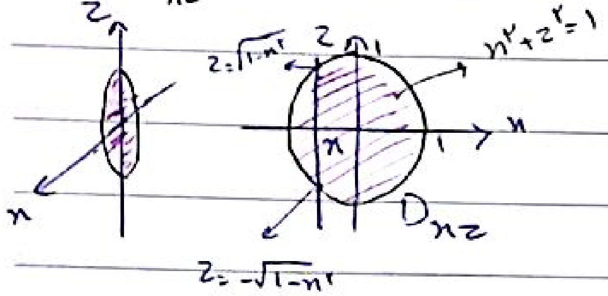
ج) حجم محصور بین استوانه های $x^2+y^2=1$ ، $x^2+z^2=1$



$$V=\iiint_D 1\,dv=\iiint_D 1\,dx\,dy\,dz$$

$$D:\begin{cases}(x,z)\in D_{xz}=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2\,;\,x^2+z^2\le 1\}\\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

$$V=\iint_{D_{xz}} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\, dy \right) dx\, dz = \iint_{D_{xz}} 2\sqrt{1-x^2}\, dx\, dz$$



D_{xz} ساده عمودی $= \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2} \end{cases}$

$$V=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2}\, dz\, dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\, dz\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)\, dx = \dots$$

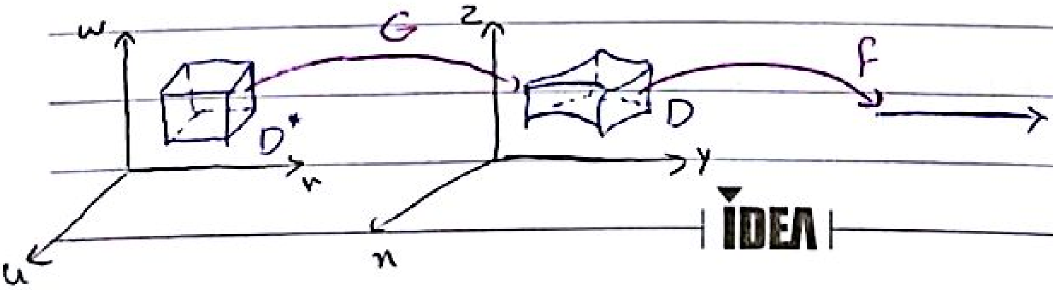
تغییر متغیر در انتگرال سه‌گانه:

فرض کنیم $D^* \subset \mathbb{R}^3$ ناحیه‌ای بسته و کراندار از فضای متغیرهای u، v و w بوده، توابع $x=x(u,v,w)$ و $y=y(u,v,w)$ و $z=z(u,v,w)$ در D^* پیوسته و در نقاط درونی D^* مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. به علاوه فرض می‌کنیم برای هر نقطه (u,v,w) درون D^*:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \neq 0$$

و تابع $G: D^* \to \mathbb{R}^3$ با دستور $G(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$

در نقاط درونی D^* یک به یک باشد. اگر $D := G(D^*)$، $f: D \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، آنگاه



می‌توان ثابت کرد که:

Subject:

$$\iiint_D f\,dv = \iiint_{D^*} f\big(x(u,v,w),\,y(u,v,w),\,z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

مثال) مطلوبست محاسبه $\iiint_D y\,dx\,dy\,dz$ که در آن D ناحیه محصور توسط صفحات $x+y+z=\pm 1$ و $x-y+z=-1$ و ۳ و $x-y-z=2$ و ۴ است. فرض کنیم u، v، w متغیرهای تعریف شده توسط معادلات

$$\begin{cases} u := x+y+z \\ v := x-y+z \\ w := x-y-z \end{cases}$$

باشد در این صورت ناحیه D در متغیرهای x,y,z متناظر با ناحیه $(u\,v\,w)$

$D^* = \{(u,v,w)\in \mathbb{R}^3 ;\ -1\le u\le 1 \text{ و } -1\le v\le 3 \text{ و } 2\le w\le 4\}$ از فضای u,v,w

خواهد بود. برای محاسبه $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ میتوان از رابطه ی $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$ استفاده کرد.

بر این اساس:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1-(-3) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{4}$$

همچنین با استفاده از رابطه های فوق $u-v=2y$ یا $y=\frac{1}{2}(u-v)$. در نتیجه با توجه به رابطه ی

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f\big(x(u,v,w),\,y(u,v,w),\,z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

خواهیم داشت:

$$\iiint_D y\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} \frac{1}{2}(u-v)\left|\frac{1}{4}\right| du\,dv\,dw = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{3}\int_{2}^{4}(u-v)\,dw\,dv\,du$$

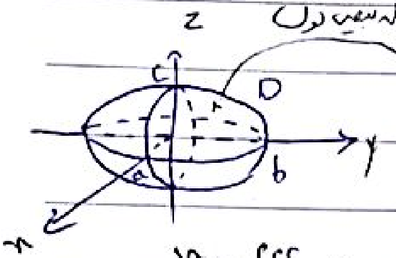
$$=\frac{1}{8}\left(\left(\int_{-1}^{1}u\,du\right)\left(\int_{-1}^{3}dv\right)\left(\int_{2}^{4}dw\right)-\left(\int_{-1}^{1}du\right)\left(\int_{-1}^{3}v\,dv\right)\left(\int_{2}^{4}dw\right)\right)=\cdots$$

توضیح: $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{3}\int_{2}^{4}u\,dw\,dv\,du=\int_{-1}^{1}u\int_{-1}^{3}\underbrace{\left(\int_{2}^{4}dw\right)}_{\text{ثابت}}dv\,du$ وقتی کران‌ها اعداد ثابت و مستقل از هم و تابع به صورت متصل C^3 باشد.

ثابت: از انتگرال خارج میشود.

مثال) مطلوب است تعیین حجم بیضیوی

معادله بیضی گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



$$v=\iiint_D 1\,dx\,dy\,dz$$

با معرفی متغیرهای u و v و w به صورت
$$\begin{cases}u=x/a\\ v=y/b\\ w=z/c\end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$$

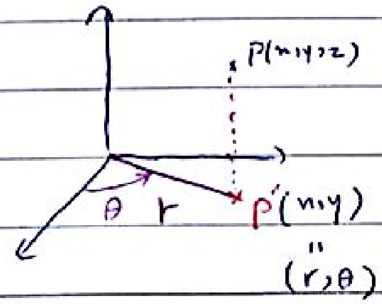
$$D^*=\left\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3;\ u^2+v^2+w^2\le 1\right\}$$

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\det\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&\frac{1}{b}&0\\0&0&\frac{1}{c}\end{pmatrix}=\frac{1}{abc}\Rightarrow\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=abc$$

$$v=\iiint_D 1\,dx\,dy\,dz\xrightarrow{a,b,c>0}v=\iiint_{D^*}1\,abc\,du\,dv\,dw=abc\iiint_{D^*}1\,du\,dv\,dw$$

$$=abc\left(\frac{4}{3}\pi\underset{(1^3)}{\underset{\shortparallel}{R^3}}\right)=\frac{4}{3}\pi abc$$

تغییر متغیر استوانه‌ای: فرض کنیم P نقطه‌ای در فضای دکارتی به مختصات (x,y,z) و P' تصویر این نقطه بر صفحه xoy باشد. اگر برای نمایش نقطه P' در صفحه xoy از سیستم مختصات قطبی استفاده کرده، P' را به صورت



(r,θ) نشان دهیم، می‌توانیم P در فضا را با سه‌تایی (r,θ,z) نیز نشان دهیم. این روش

در نمایش نقاط فضا را سیستم مختصات استوانه‌ای می‌نامیم. اگر P نقطه‌ای در فضا با مختصات دکارتی

(x,y,z) و مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) باشد، آنگاه

$$\begin{cases} x(r,\theta,z) = r\cos\theta \\ y(r,\theta,z) = r\cos\theta \\ z(r,\theta,z) = z \end{cases}$$

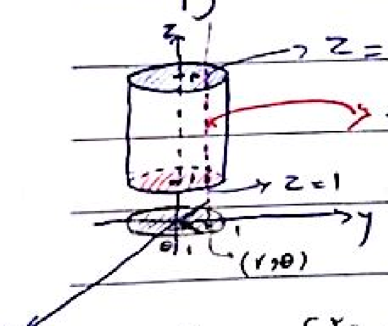
تغییر متغیر ایجاد شده در اثر معادلات فوق، تحت نام تغییر متغیر استوانه‌ای نامیده می‌شود. در این تغییر متغیر

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\ ,\theta,z)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

مثال) مطلوبست محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$

D ناحیه محصور درون استوانه $x^2+y^2=1$ بین صفحات $z=1$، $z=4$.



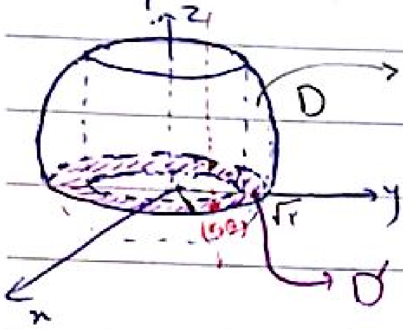
$$D \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 1 \le z \le 4 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^4 \underset{\uparrow \atop \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{r}\ \underset{\uparrow \atop \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|}{r}\ dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\left(\int_1^4 dz\right)dr\,d\theta$$

$$= \left(\int_1^4 dz\right)\left(\int_0^1 r^2\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \cdots$$

ب) $$\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz$$

$$D := \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2+y^2\geq 1 \,,\, x^2+y^2+z^2\leq 2 \,,\, z\geq 0\}$$



$$x^2+y^2+z^2=2 \to r^2+z^2=2 \quad \text{یا} \quad z=\sqrt{2-r^2}$$

$$D: \begin{cases} 0\leq \theta \leq 2\pi \\ 1\leq r\leq \sqrt{2} \\ 0\leq z\leq \sqrt{2-r^2}\end{cases}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-r^2}} \frac{z}{r}\, r \, dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{\sqrt{2-r^2}} dr\,d\theta$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$$

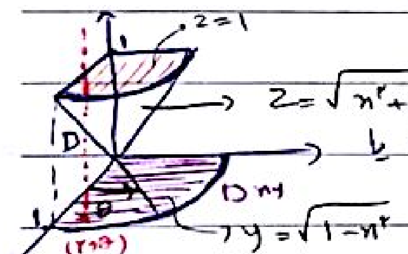
کران‌های انتگرال ثابت و مستقل
هستند پس می‌توان برای محاسبه
انتگرال‌ها را جدا کرد.

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_1^{\sqrt{2}} (2-r^2)\,dr\right)$$

$$=\pi\int_1^{\sqrt{2}} (2-r^2)\,dr = \dots$$

ج) $$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dz\,dy\,dx$$

$$D: \begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1\end{cases}$$

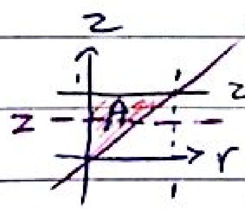


$$D \begin{cases} 0\leq\theta\leq \pi/2 \\ 0\leq r\leq 1 \\ r\leq z\leq 1\end{cases} \qquad I=\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1\int_r^1 \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\, r\,dz\,dr\right)d\theta = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)(\text{〃}) = \left(\frac{\pi}{2}\ \text{〃}\right)$$

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^1\int_r^1 \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,dz\,dr$$

$$A: \begin{cases} 0\leq r\leq 1 \\ r\leq z\leq 1\end{cases}$$



$$A: \begin{cases} 0\leq z\leq 1 \\ 0\leq r\leq z\end{cases}$$

Subject:

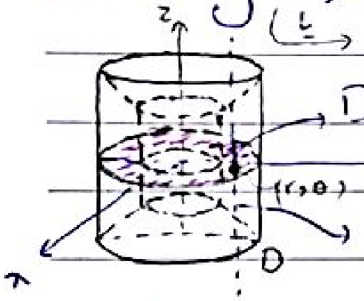
$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^1\int_0^z \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,dr\,dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sqrt{r^2+z^2}\,\Big|_0^z\,dz$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 (\sqrt{2}z - z)\,dz = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)\int_0^1 z\,dz = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}-1)$$

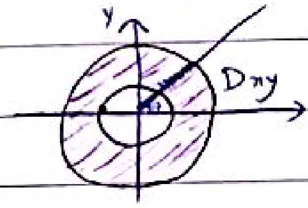
مثال) مطلوبست تعیین حجم هریک از نواحی زیر.

الف) حجم بین استوانه‌های $x^2+y^2=1$ ، $x^2+y^2=4$ محدود شده توسط مخروط $z^2=x^2+y^2$.

$\xrightarrow{\text{قطبی}} z=\pm\sqrt{x^2+y^2}=\pm r$



$$V=\iiint_D 1\,dx\,dy\,dz$$



$$V=\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{-r}^{r} 1\,|r|\,dz\,dy\,dx$$

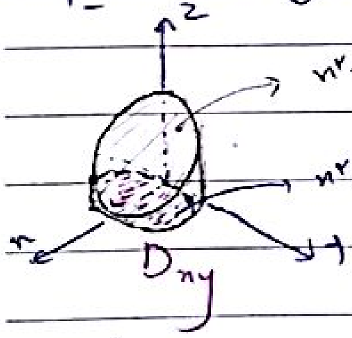
$$D\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 1\le r\le 2 \\ -r\le z\le r \end{cases}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_1^2 r\underbrace{\int_{-r}^{r} dz}_{2r}\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}r^3\Big|_1^2\right)d\theta$$

$$=\frac{14}{3}\,2\pi$$

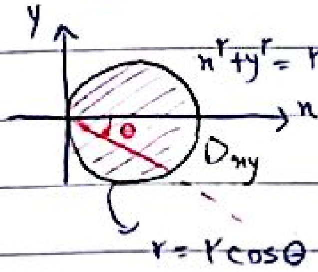
ب) ناحیه درون استوانه $x^2+y^2=2x$ محدود شده توسط کره $x^2+y^2+z^2=4$ در نیم فضای $z\geq 0$.

$x^2+y^2+z^2=4 \xrightarrow{\text{قطبی}} r^2+z^2=4 \Rightarrow z=+\sqrt{4-r^2}$



$$V=\iiint_D 1\,dx\,dy\,dz$$

$$D:\begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le r\le 2\cos\theta \\ 0\le z\le\sqrt{4-r^2} \end{cases}$$



$x^2+y^2=2x \xrightarrow{\text{قطبی}} r^2=2r\cos\theta$

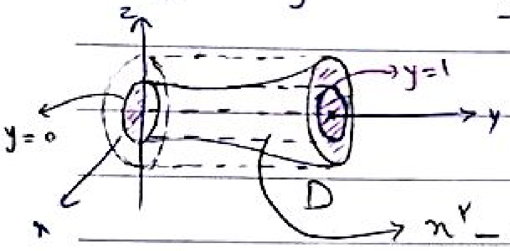
$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} 1\;r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r\underbrace{\sqrt{4-r^2}}_{(4-r^2)^{1/2}}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{-1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(4\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} - 4^{3/2}\right) d\theta = -\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(|\sin\theta|^3-1\right) d\theta$$

$$\frac{8}{3}\pi - \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \, d\theta = \dots$$

ج) حجم محصور توسط هذلولی‌گون یک پارچه $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ بین صفحات $y=0$ و $y=1$.

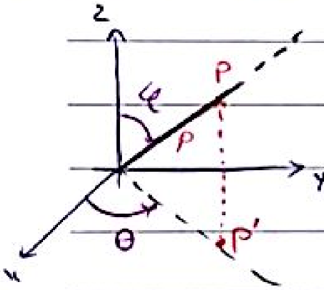


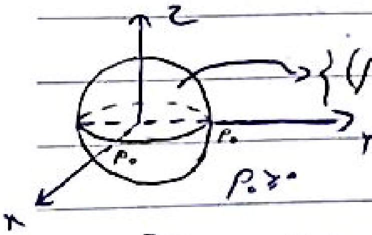
تمرین.

$$V = \iiint_D 1 \, dx\, dy\, dz = \dots$$

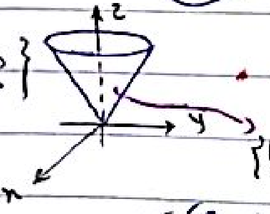
$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2+z^2-1}$$

تغییر متغیر کروی: فرض کنیم P نقطه‌ای در فضای دکارتی $\mathbb{R}^3$ باشد. اگر ρ فاصله نقطه P تا مبدأ مختصات، φ زاویه بین شعاع حامل نقطه P و جهت مثبت محور z و θ زاویه بین شعاع حامل نقطه P' (تصویر P بر صفحه xoy) با جهت مثبت محور x باشد، در این صورت سه‌تایی (ρ, φ, θ) نقطه P در فضا را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کند. در واقع با ثابت گرفتن ρ_0، φ_0، θ_0 نقطه P_0 با مختصات $(\rho_0, \varphi_0, \theta_0)$ حاصل اشتراک سه مجموعه زیر خواهد بود.

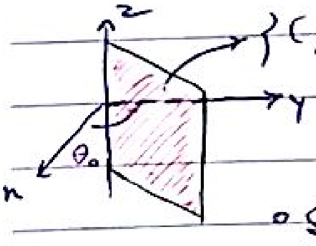




$$\{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \rho = \rho_0\} \qquad \rho_0 > 0$$



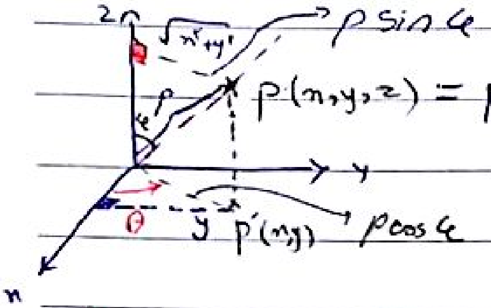
$$\{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \varphi = \varphi_0\} \qquad 0 \le \varphi_0 \le \pi$$



$$\{(\rho, \varphi, \theta) \; ; \; \theta = \theta_0\} \qquad 0 \le \theta_0 \le 2\pi$$

Subject:

روش فوق که در تعیین نقاط فضا را اصطلاحاً سیستم مختصات کروی می‌نامیم. فرض کنیم p نقطه‌ای در فضا به مختصات دکارتی (x,y,z) و مختصات کروی (ρ,φ,θ) باشد، در این صورت



$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\varphi=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

براساس بحث فوق، تغییر متغیر

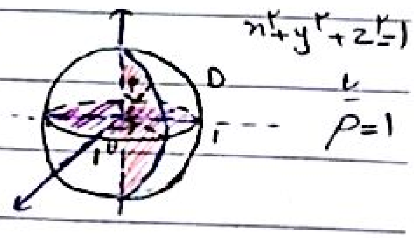
$$\begin{cases} x=x(\rho,\varphi,\theta)=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=y(\rho,\varphi,\theta)=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=z(\rho,\varphi,\theta)=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

که نام متغیر کروی نامیده می‌شود. در این تغییر متغیر

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\rho^2\sin\varphi$$

مثال) مطلوبست محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\iiint_D x\,dxdydz$



D ناحیه محصور توسط کره $x^2+y^2+z^2=1$

$$(\rho,\varphi,\theta)\in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\rho\le 1 \end{cases}$$

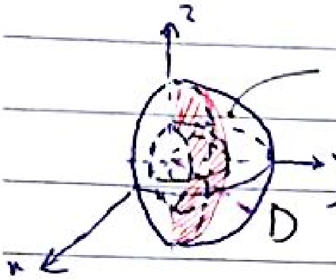
$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho\sin\varphi\cos\theta\,|\rho^2\sin\varphi|\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{1}\rho^3\,d\rho\right)=0$$

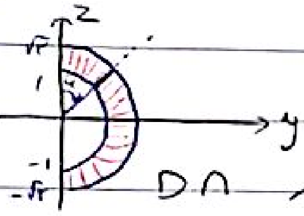
چون کران‌های انتگرال ثابت و مستقل هستند میتوان آن‌ها را جدا کرد.

IDEA

ب) $\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$ ، D ناحیه محصور بین کره‌های $x^2+y^2+z^2=1$ ، $x^2+y^2+z^2=2$ در نیم فضای $y \geq 0$.



D در دستگاه مختصات کروی :
$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 1 \leq \rho \leq \sqrt{2} \end{cases}$$



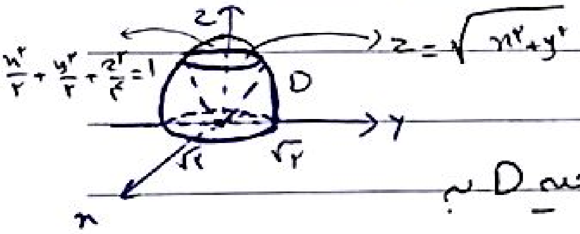
D ∩ نیم صفحه $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho^2}\rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \Big(\underbrace{\int_0^{\pi} d\theta}_{\pi}\Big)\Big(\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi}_{2}\Big)\Big(\underbrace{\int_1^{\sqrt{2}} d\rho}_{\sqrt{2}-1}\Big)$$

$$= 2\pi(\sqrt{2}-1)$$

ج) $\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dv$ ، D ناحیه محصور شده توسط بیضی‌گون $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$ در نیم فضای $z \geq 0$. و خارج مخروط $z^2=x^2+y^2$.

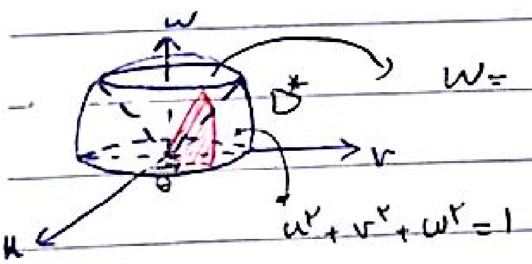


با تغییر متغیرهای
$$\begin{cases} u = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ v = \frac{y}{\sqrt{2}} \\ w = \frac{z}{2} \end{cases}$$
یا
$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\,u \\ y = \sqrt{2}\,v \\ z = 2w \end{cases}$$
ناحیه D به

ناحیه D^* در فضای uvw به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1 \leftrightarrow u^2+v^2+w^2=1$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \leftrightarrow 2w=\sqrt{2(u^2+v^2)} \quad \text{یا} \quad \sqrt{2}\,w=\sqrt{u^2+v^2}$$



$$w=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u^2+v^2} \quad \text{یا} \quad 2w^2=u^2+v^2$$

Subject:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow \iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_{D^*} \frac{2w}{\sqrt{2(u^2+v^2)}}\, 4\, du\, dv\, dw = 4\sqrt{2} \iiint_{D^*} \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}}\, du\, dv\, dw$$

اکنون با استفاده از تغییر متغیر کروی به صورت

$$\begin{cases} u = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ v = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ w = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$u^2+v^2+w^2 = 1 \iff \rho = 1 \qquad w = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u^2+v^2} \iff \rho\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\varphi$$

$$\iff \tan\varphi = \sqrt{2} \iff \varphi = \tan^{-1}(\sqrt{2})$$

$$D^*: \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ \tan^{-1}\sqrt{2} \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases} \qquad I = \int_0^{2\pi}\int_{\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\pi/2}\int_0^1 \frac{\rho\cos\varphi}{\rho\sin\varphi}\, \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

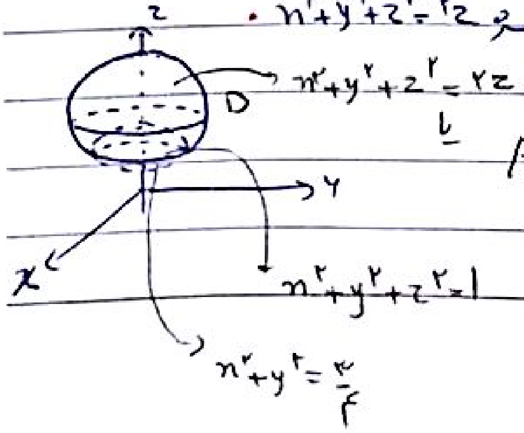
$$= \int_0^{2\pi}\int_{\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \Big(\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi}\Big)\Big(\underbrace{\int_{\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi}_{-\sin(\tan^{-1}\sqrt{2})+1}\Big)\Big(\underbrace{\int_0^1 \rho^2\, d\rho}_{\frac{1}{3}}\Big)$$

$$* \ \sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$$

مثال) مطلوبست تعیین حجم هر یک از نواحی زیر.

الف) حجم خارج کره $x^2+y^2+z^2=1$ محدود شده توسط کره $x^2+y^2+z^2=2z$.



یا $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$ یا $\rho = 2\cos\varphi$

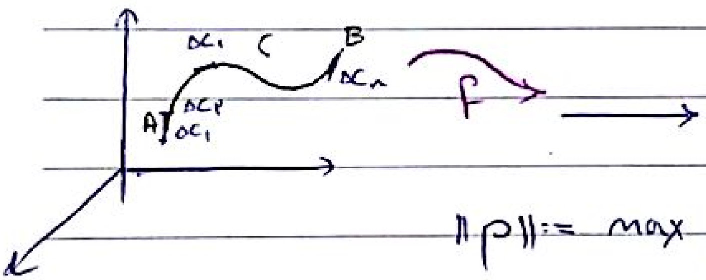
$$D\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 1 \le \rho \le 2\cos\varphi \end{cases}$$

ب) حجم خارج مخروط $z^2=x^2+y^2$ داخل کره $x^2+y^2+z^2=1$ در ناحیه $z\geq |x|$

فصل سوم آنالیز برداری

انتگرال روی مسیر « انتگرال منحنی الخط یا انتگرال خط »

انتگرال خط نوع اول « انتگرال خط میدان‌های اسکالر » فرض کنیم C خمی پیوسته بین دو نقطه A ، B در فضا باشد. متناهی افراز $P=\{\Delta C_1,\dots,\Delta C_n\}$ را از این خم در نظر می‌گیریم.



$\forall i=1,\dots,n$

$\Delta s_i := |\Delta C_i|$ طول قطعه

$\|P\| := \max\{\Delta s_1,\dots,\Delta s_n\}$

در این صورت اگر تابع اسکالر $f:C\to\mathbb{R}$ را انتخاب نقاط $p_1\in\Delta C_1,\dots,p_n\in\Delta C_n$

عبارت $\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta s_i$ را یک حاصل جمع ریمان f نظیر افراز P از خم C می‌نامیم. با تغییر افراز P به گونه‌ای که $\|P\|\to 0$. اگر عبارت فوق مقدار به عدد خاصی میل کند آنگاه f را در امتداد C انتگرال‌پذیر نامیده، حد مزبور را با نماد $\int_C f\,ds$ نشان می‌دهیم. پس:

$$\int_C f\,ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta s_i$$

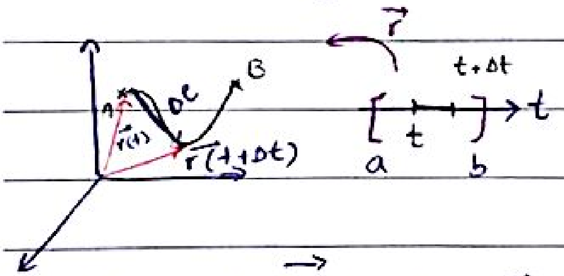
خاصیت های متعارف انتگرال ها برای این انتگرال نیز برقرارند. به طور مثال:

$$\int_C (\alpha f+\beta g)\,ds = \alpha\int_C f\,ds + \beta\int_C g\,ds \qquad (\text{ثابت } \alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

$$C=C_1\cup C_2,\ C_1\cap C_2 \ \text{متناهی} \Rightarrow \int_C f\,ds=\int_{C_1} f\,ds+\int_{C_2} f\,ds$$

$$\forall p\in C \quad f(p)\le g(p) \Rightarrow \int_C f\,ds \le \int_C g\,ds$$

فرض کنیم C قطعه‌ای از منحنی به معادلات پارامتری $x=x(t)$، $y=y(t)$، $z=z(t)$، $t\in[a,b]$، بین دو نقطه A (نقطه $t=a$) و B (نقطه $t=b$) باشد؛ توابع $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ بر $[a,b]$ مشتقات مرتبه اول پیوسته داشته باشند. در این حالت برای نقطه $t+\Delta t\in[a,b]$ و t خواهیم داشت:



$$\Delta s \approx \|\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)\| = \left\|\begin{pmatrix} x(t+\Delta t)-x(t)\\ y(t+\Delta t)-y(t)\\ z(t+\Delta t)-z(t)\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} x'(c_1)\Delta t\\ y'(c_2)\Delta t\\ z'(c_3)\Delta t\end{pmatrix}\right\|$$

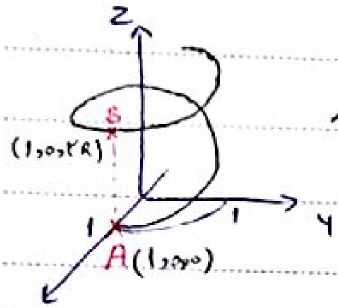
$$\approx \|\vec r'(c)\|\,\Delta t$$

به این ترتیب اگر $f: C\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر چنین مسیری باشد آنگاه:

$$\int_C f\,ds = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta s_i = \int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,\|\vec r'(t)\|\,dt$$

مثال) مطلوبست محاسبه‌ی $\int_C (y+xz)\,ds$ که در آن C قسمتی از مارپیچ $x=\cos t$

$y=\sin t$ و $z=t$ از نقطه‌ی $A(1,0,0)$ به $B(1,0,2\pi)$ است.



$f(x,y,z)=y+xz$

$$\int_C f\,ds=\int_0^{2\pi} f(x(t),y(t),z(t))\,\|\vec r\,'(t)\|\,dt$$

$$\vec r(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{pmatrix},\quad t\in[0,2\pi]$$

$$\vec r\,'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 1\end{pmatrix}\rightarrow \|\vec r\,'(t)\|=\sqrt{2}=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}$$

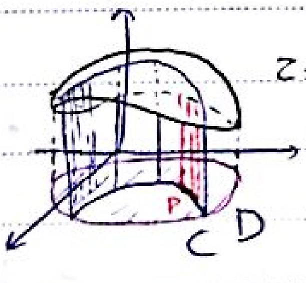
$$\int_C f\,ds=\int_0^{2\pi}(y(t)+x(t)z(t))\,\|\vec r\,'(t)\|\,dt=\int_0^{2\pi}(\sin t+t\cos t)\sqrt{2}\,dt$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt=\dots$$

تعبیر هندسی: فرض کنیم C خمی در صفحه‌ی xoy بین دو نقطه‌ی A و B بوده، f تابعی

در دامنه‌ی تعریف شده در یک همسایگی از خم C باشد. همچنین فرض کنیم f در این همسایگی

پیوسته و نامنفی بوده، S رویه‌ی نمودار f در این ناحیه باشد. در این صورت برای $\Delta C\subset C$ و



نقطه‌ی $p\in\Delta C$، عبارت $f(p)\Delta s$ به طور تقریب برابر $z=f(x,y)$

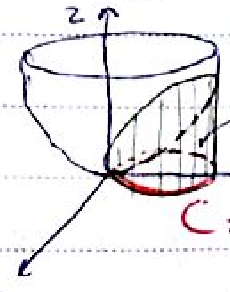
مساحت قسمتی از رویه‌ی استوانه‌ای می‌باشد که بر خم C به موازات محور z

روی ناحیه‌ی ΔC است. به این ترتیب:

$$\int_C f\,ds=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta s_i\;.$$

$=$ مساحت رویه استوانه‌ای فوق

مثال) مساحت سمتی از استوانه $x^2+y^2=2y$ بین صفحه xy و رویه به معادله $z=x^2+y^2$ را تعیین کنید.

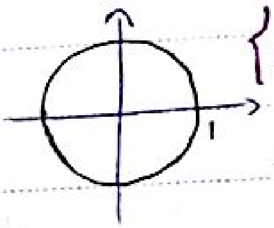


$S: z=f(x,y)=x^2+y^2$

$x^2+y^2=2y$

$C: x^2+y^2=2y$ مساحت رویه استوانه مورد نظر : $\int_C f\,ds$

یا $x^2+(y-1)^2=1$



$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

$$C:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t+1 \end{cases},\quad t\in[0,2\pi]$$

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t+1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\|=1$$

$$\underbrace{\text{مساحت رویه استوانه}} = \int_C f\,ds = \int_0^{2\pi} f(x(t),y(t))\,\|\vec{r}'(t)\|\,dt$$

$$f(x,y)=x^2+y^2 \Rightarrow f(x(t),y(t)) = \cos^2 t + (1+\sin t)^2 = 2+2\sin t$$

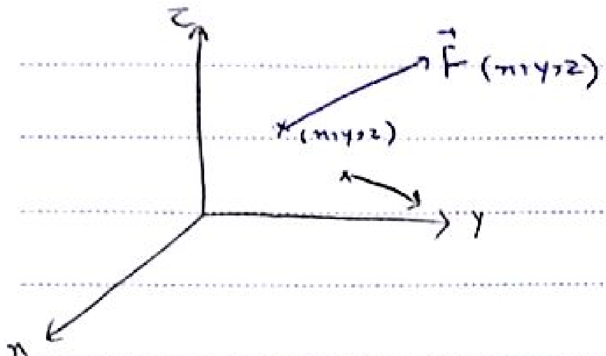
$$\|\vec{r}'(t)\|=1$$

$\Rightarrow$

$$\text{مساحت} = \int_0^{2\pi}(2+2\sin t)\times 1\,dt = \int_0^{2\pi} 2\,dt = 4\pi$$

انتگرال خط نوع دوم «انتگرال خط میدان‌های برداری»

فرض کنیم $P, Q, R : D\to\mathbb{R}$ ، $D\subset\mathbb{R}^3$ توابعی سه متغیره تعریف شده بر این ناحیه باشند در این صورت دستوری چون $\vec{F}$ که به هر نقطه $(x,y,z)\in D$ بردار $P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ با نقطه اش (x,y,z) را نظیر کند. تحت



نام یک میدان برداری بر ناحیه D خوانده میشود.

$$\vec F(x,y,z)=\begin{pmatrix}P(x,y,z)\\Q(x,y,z)\\R(x,y,z)\end{pmatrix}$$

میدان برداری $\vec F=\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}$ را بر ناحیه D پیوسته (مشتق پذیر) نامیم هرگاه توابع مولفه‌ای یعنی P و Q و R بر D پیوسته (مشتق پذیر) باشند. به طور مثال میدان F با دستور

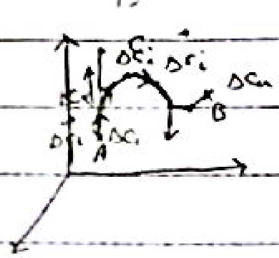
$\vec F(x,y,z)=\begin{pmatrix}x^2-yz\\2y+4\\z-xy\end{pmatrix}$ بر فضای $D=\mathbb{R}^3$ میدانی پیوسته و مشتق پذیر است. به همین ترتیب

میدان $\vec F$ با دستور $\vec F(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\vec i+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\vec j$ بر $D:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

پیوسته و مشتق پذیر است. «جزوه ۲ شنبه»

«جزوه ۴ شنبه»

تعریف: فرض کنیم $\vec F$ یک میدان برداری تعریف شده روی ناحیه $D\subseteq \mathbb{R}^3$ باشد هم چنین فرض کنیم $C\subseteq D$



یک خم پیوسته طی شده از نقطه A به نقطه B در ناحیه D است.

تقسیم افراز $P=\{\Delta c_1,\dots,\Delta c_n\}$ از خم C فرض کنیم $\Delta \vec r_i$ بردارهای جابجایی نظیر قطعه

Δc_i بوده، $p_i\in\Delta c_i$ به طور مثال از نقطه شروع این قطعه باشد در این صورت

عبارت $\sum_{i=1}^{n} \vec F(p_i)\cdot\Delta\vec r_i$ را یک حاصل جمع ریمان میدان $\vec F$ در امتداد مسیر C و تقسیم افراز

P از این مسیر می نامیم. با تغییر افراز P به گونه ای که $\|P\|\to 0$ اگر عبارت حاصل همگرا بوده آن گاه

میدان $\vec F$ را در امتداد مسیر C انتگرال پذیر نامیده، حد مزبور را با $\int_C \vec F\cdot d\vec r$ نشان می دهیم پس

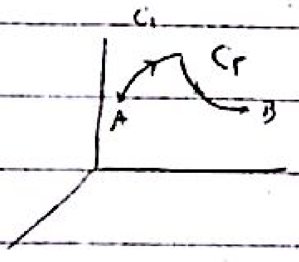
$$\int_C \vec F\cdot d\vec r=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec F(p_i)\cdot\Delta\vec r_i$$

با توجه به تعریف مشاهده می شود که

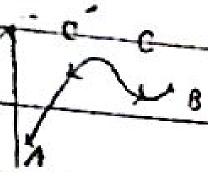
الف) برای هر دو میدان برداری $\vec F$ و $\vec G$ انتگرال پذیر در امتداد مسیر C و برای هر دو اسکالر $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\int_C (\alpha\vec F+\beta\vec G)\cdot d\vec r=\alpha\int_C \vec F\cdot d\vec r+\beta\int_C \vec G\cdot d\vec r$$

ب) اگر $C=C_1\cup C_2$ و $C_1\cap C_2$ مجموعه ای متناهی باشد، آنگاه



$$\int_C \vec F\cdot d\vec r=\int_{C_1}\vec F\cdot d\vec r+\int_{C_2}\vec F\cdot d\vec r$$



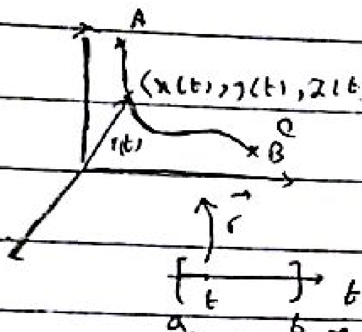
چ. اگر C' همان مسیر C طی شده در خلاف جهت C باشد آنگاه

$$\int_{C'} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{-C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

بر اساس انتخاب مسیر C را با $-C$ نمایش می‌دهند

تعریف: فرض کنیم C خمی با معادله برداری $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ ، $t\in(a,b)$ از



نقطه A (نظیر $t=a$) به B (نظیر $t=b$) باشد

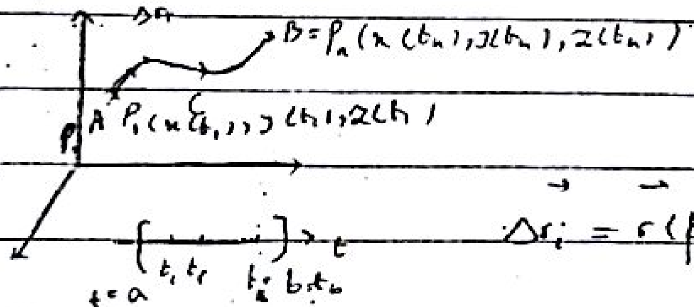
اگر توابع $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ بر $[a,b]$ مشتقات

مشتقات اول پیوسته داشته باشند و $\vec{r}'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$ ، $t\in(a,b)$ آنگاه C را خم

هموار (smooth) می‌نامیم. الان فرض کنیم C قطعه‌ای از یک خم هموار با معادله برداری $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$

$t\in[a,b]$ از نقطه A (نظیر $t=a$) به B (نظیر $t=b$) باشد. اگر $\vec{F}$ میدانی پیوسته در ناحیه‌ای از فضا دربرگیرنده

این خم باشد آنگاه مشاهده می‌گردد



$$\Delta\vec{r}_i = \vec{r}(p_i) - \vec{r}(p_{i-1}) \simeq \vec{r}'(t_i)\Delta t_i$$

و از آنجا

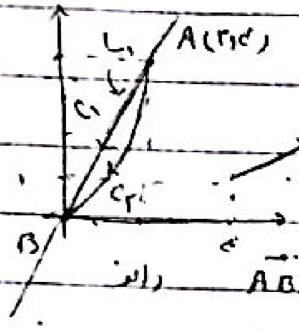
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \lim_{\|p\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(p_i)\cdot\Delta\vec{r}_i = \lim_{\|p\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x(t_i),y(t_i),z(t_i))\cdot\vec{r}'(t_i)\Delta t_i$$

$$= \int_a^b \vec{F}(x(t_i),y(t_i),z(t_i))\cdot\vec{r}'(t_i)\,dt$$

* فرض کنید $\vec F(x,y)=(2xy)\vec i-(x-y)\vec j$ مطلوبست محاسبه $\int_C \vec F\cdot d\vec r$ که در آن

الف) C قسمتی از خط است از نقطه $A(2,4)$ به $B(0,0)$ است

ب) C قسمتی از منحنی $y=x^2$ از نقطه A به B است



الف) $\overrightarrow{AB}=\binom{-2}{-4}\parallel C_1 \parallel L_1$

$A(2,4)\in L_1$ $\Rightarrow L_1:\begin{cases}x=-2t\\ y=-4t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

$$C_1:\begin{cases}x=-2t+2\\ y=-4t+4\end{cases}\quad t\in[0,1]$$

$$C_1:\ \vec r(t)=(-2t+2)\vec i+(-4t+4)\vec j\Rightarrow \vec r\,'(t)=-2\vec i-4\vec j$$

$$\vec F(x(t),y(t))=\vec F(-2t+2,-4t+4)=16(t-1)^2\vec i+2(t-1)\vec j$$

$$\int_{C_1}\vec F\cdot d\vec r=\int_0^1 \vec F(x(t),y(t))\cdot \vec r\,'(t)\,dt=\int_0^1\left(16(t-1)^2\vec i+2(t-1)\vec j\right)\cdot(-2\vec i-4\vec j)\,dt$$

$$=\int_0^1 -32(\underbrace{t-1}_{u})^2-8(t-1)\,dt=\int_{-1}^0 -32u^2-8u\,du=-\left(\frac{32}{3}u^3\Big|_{-1}^0+4u^2\Big|_{-1}^0\right)=\left(\frac{32}{3}-4\right)=\frac{-20}{3}$$

ب) $-C_2:\begin{cases}x=t\\ y=t^2\end{cases}\quad t\in[0,2]$ $\quad \vec r(t)=x(t)\vec i+y(t)\vec j=(t)\vec i+(t^2)\vec j\Rightarrow \vec r\,'(t)=\vec i+2t\vec j$

$$\vec F(x(t),y(t))=(2t^3)\vec i+(t-t^2)\vec j\Rightarrow \vec F(x(t),y(t))\cdot\vec r\,'(t)=2t^3+(t-t^2)2t=2t^2$$

$$\Rightarrow\int_{C_2}\vec F\cdot d\vec r=-\int_{-C_2}\vec F\cdot d\vec r=-\int_0^2 \vec F(x(t),y(t))\cdot\vec r\,'(t)\,dt=-\int_0^2 2t^2\,dt=-\left(\frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^2=-\frac{16}{3}\neq-\frac{20}{3}$$

پس مقدار $\int_C \vec F\cdot d\vec r$ در حالت کلی وابسته به مسیر انتخاب شده از نقطه A به B است. $\int_{C_1}\vec F\cdot d\vec r$

۱. فرض کنیم $\vec F = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$ میدانی پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در بر گیرنده قطعه خم C (هموار) با معادله برداری $\vec r(t) = x(t)\vec i + y(t)\vec j + z(t)\vec k$ ، $t\in[a,b]$ از نقطه A (نظیر $t=a$) به B (نظیر $t=b$)

با توجه به آنچه مشاهده کردیم

$$\int_C \vec F\cdot d\vec r = \int_a^b \vec F(x(t),y(t),z(t))\cdot \vec r'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \begin{pmatrix} P(x(t),y(t),z(t)) \\ Q(x(t),y(t),z(t)) \\ R(x(t),y(t),z(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b \big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big)dt$$

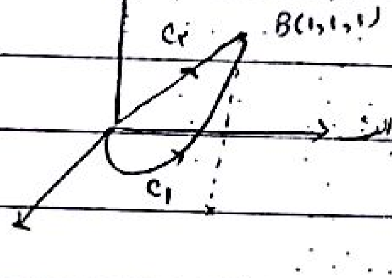
با استفاده از نمادهای دیفرانسیلی $dx = x'(t)dt$ ، $dy = y'(t)dt$ و $dz = z'(t)dt$ عبارت انتگرال $\int_C \vec F\cdot d\vec r$ را می‌توانیم به صورت نمادین دیفرانسیلی $\int_C Pdx + Qdy + Rdz$ نیز نمایش می‌دهیم (در کتاب‌ها)

و $\int Pdx + Qdy + Rdz$ هر دو یک مفهوم را بیان می‌کنند

* مطلوبست محاسبه $\int_C (2x+z)dx + ydy + (x-2z)dz$ در حالت‌ها

الف) C_1 مسیری از خم $x=t$ ، $y=t^2$ ، $z=t^3$ از $A(0,0,0)$ تا $B(1,1,1)$ است

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+z \\ y \\ x-2z \end{pmatrix}$$



ب) C_2 مسیری از خم خط راست واصل از A به B

الف) $C_1: \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases} \quad t\in[0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx = x'(t)dt = dt \\ dy = y'(t)dt = 2t\,dt \\ dz = z'(t)dt = 3t^2dt \end{cases}$

$$\int_{C_1} \underbrace{(2x+z)dx + ydy + (x-2z)dz}_{\vec F\cdot d\vec r} = \int_0^1 (2t+t^3)dt + (t^2\,2t\,dt) + (t-2t^3)3t^2dt$$

$$= \int_0^1 2t + 6t^3 - 6t^5\,dt = 1 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2}$$

ب) $C_2: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad t\in[0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx=dt \\ dy=dt \\ dz=dt \end{cases}$

$$\int_{C_2} \underbrace{(x+z)dx+y\,dy+(x-2z)dz}_{F\cdot dr} = \int_0^1 (t+t)dt+t\,dt+(t-2t)dt$$

$$= \int_0^1 2t\,dt = \frac{2}{2}$$

تعریف:

فرض کنیم $D\subseteq \mathbb{R}^3$ و F میدانی پیوسته تعریف شده بر این ناحیه باشد. این میدان را بر D میدانی گرادیانی نامیم هرگاه تابع مشتق‌پذیری چون $\varphi: D\to\mathbb{R}$ وجود داشته باشد:

$$\forall (x,y,z)\in D \quad \vec{F}(x,y,z)=\nabla\varphi(x,y,z)$$

در این حالت تابع φ را اصطلاحاً یک تابع پتانسیل برای این میدان می‌نامیم.

فرض کنیم $\vec{F}$ یک میدان گرادیانی با تابع پتانسیل φ تعریف شده بر ناحیه D از فضای $\mathbb{R}^3$ باشد. همچنین فرض کنیم $C\subseteq D$ قطعه‌ای از یک خم هموار به معادله $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ ، $t\in[a,b]$ از نقطه A نظیر $(t=a)$ به نقطه B نظیر $(t=b)$ باشد. اگر قرار دهیم:

$g(t)=\varphi(x(t),y(t),z(t))$ ، $\forall t\in[a,b]$ آنگاه

$$g'(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))x'(t)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))y'(t)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x(t),y(t),z(t)$$

$= \nabla\vec{\varphi}(x(t),y(t),z(t))\cdot\vec{r}'(t) = \vec{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\vec{r}'(t)$

درنتیجه با توجه به اینکه قبلاً ثابت کردیم

$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt = \int_a^b g'(t)\,dt = g(b)-g(a)$

$= \varphi(x(b),y(b),z(b)) - \varphi(x(a),y(a),z(a)) = \varphi(B)-\varphi(A)$ مستقل از مسیر حرکت

فرمول اخیر را به صورت $\int_C \nabla\vec{\varphi}\cdot d\vec{r} = \varphi(B)-\varphi(A)$ نیز بیان می‌کنیم. در این حالت اگر $A=B$ (یعنی مسیر C

بسته از فضا باشد) آنگاه $\oint_C \nabla\vec{\varphi}\cdot d\vec{r} = 0$

مثال: نشان دهید میدان $\vec{F}$ با دستور $(2x+z)\vec{i} + y\vec{j} + (x-2z)\vec{k}$ بر $\mathbb{R}^3$ میدانی پایستار است.

ب) مطلوب است محاسبه $\int_C (2x+z)dx + ydy + (x-2z)dz$ که در آن C منحنی از مسیر $x(t)=\frac{2t^2}{1+t^2}$ ، $y(t)=2+t^5$

و $z(t)=\frac{4t}{1+t^2}$ ، $t\in[0,1]$ از نقطه A (نظیر $t=0$) به نقطه B (نظیر $t=1$) است.

الف) تابع پتانسیل $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ را طوری تعیین می‌کنیم که $\nabla\vec{\varphi} = \vec{F}(x,y,z)$ ، $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ پس باید

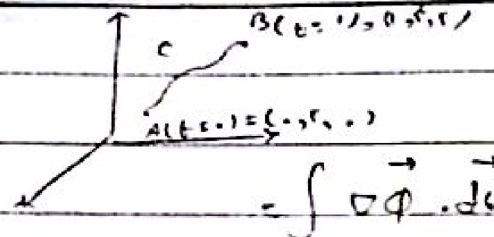
$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x+z \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = x-2z \end{cases}$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x+z \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \int_x (2x+z)\,dx = x^2+zx+C(y,z)$

$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+xz+C(y,z)) = \frac{\partial C}{\partial y} = y \Rightarrow C(y,z) = \int_y y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + C(z)$

$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = x^2+xz+C(z)+\frac{1}{2}y^2 \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial z} = x+C'(z) = x-2z \Rightarrow$

$C(z) = -z^2+C \Rightarrow \varphi(x,y,z) = x^2+zx+\frac{1}{2}y^2-z^2+C$



ب) $\int_C (2x+z)dx + y\,dy + (x-2z)dz = \int_C \vec F\cdot d\vec r$

$= \int \nabla\vec\phi \cdot d\vec r = \phi(B) - \phi(A) = \phi(1,4,2) - \phi(0,4,0) = \dots$

ج) فرض کنید $D\subset\mathbb{R}^2$ و توابع $P,Q: D\to\mathbb{R}$ بر D مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشند نشان دهید که

اگر میدان $\vec F = P\vec i + Q\vec j$ بر D گرادیانی باشد آنگاه:

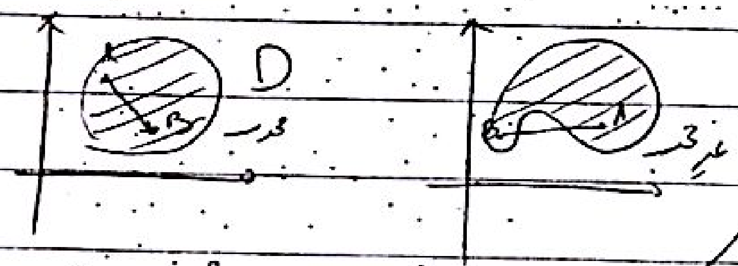
$\forall (x,y)\in D \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$

در اصطلاح بنا به فرض $\phi: D\to\mathbb{R}$ وجود دارد که $\vec F=\nabla\phi$ یا $\begin{cases}\frac{\partial\phi}{\partial x}=P\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=Q\end{cases}$ در اینصورت

$$\begin{cases}\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\end{cases}$$

عکس خاصیت بالا در حالت کلی صادق نیست ولی

تعریف: دامنه $D\subset\mathbb{R}^2$ را دامنه محدب (Convex) نامیم هرگاه هر دو نقطه از این دامنه با یک پاره‌خط



واصل بین دو نقطه تماماً در دامنه باشد

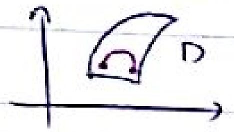
قضیه: فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای محدب باشد هم چنین فرض کنیم توابع $P,Q: D\to\mathbb{R}$ بر D مشتقات جزئی مرتبه

اول پیوسته داشته باشند در اینصورت میدان $\vec F = P\vec i + Q\vec j$ بر D گرادیانی است اگر و تنها اگر

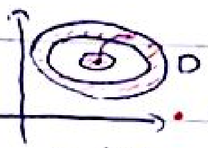
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

قضیه گرین در صفحه

تعریف: ناحیه $D \subset \mathbb{R}^2$ را ناحیه‌ی همبند نامیم، هرگاه هر ۲ نقطه از این ناحیه توسط خمی پیوسته که تمام نقاط آن در ناحیه قرار گیرد، قابل اتصال باشد.



«هم‌بند است.»

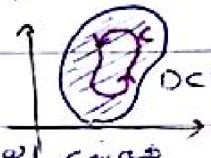


«همبند نیست.»

ناحیه همبند D را یک ناحیه همبند ساده نامیم؛ هرگاه کل هر مسیر پیوسته و بسته در این ناحیه که خودش را قطع نکند (چنین خمی را اصطلاحاً یک خم بسته ساده می‌نامند) نقاط محصور توسط خم در ناحیه قرار گیرد. « simply connected »

«حفره داشته باشد»

همبند ولی غیر ساده



همبند ساده

قضیه: فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^2$ یک ناحیه همبند ساده در صفحه بوده و $P, Q: D \to \mathbb{R}$ توابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در D باشد.

اگر $C \subset D$ خم بسته و ساده طی شده در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد، آنگاه برای میدان $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ بر D:

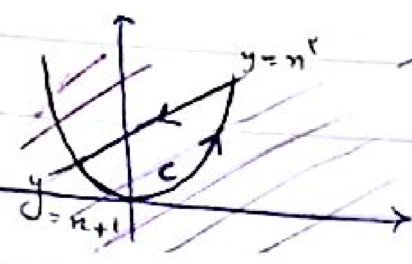
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

که در آن $A \subset D$ ناحیه محصور توسط خم C است.

مثال) مطلوبست محاسبه هر یک از انتگرال‌های خط زیر.

الف) $\oint_C (x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy$

C خم بسته حاصل از برخورد منحنی $y = x^2$ و خط $y = x+1$ طی شده در جهت مثلثاتی.



$$D\subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{P(x,y)=x^2+y^2} \qquad \xrightarrow{Q(x,y)=2xy}$$

باتوجه به اینکه توابع $P(x,y)=x^2+y^2$

و $Q(x,y)=2xy$ بر تمام صفحه $\mathbb{R}^2$ مشتقات

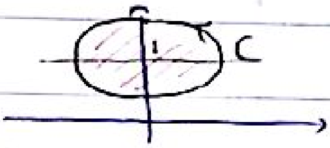
جزئی مرتبه اول پیوسته دارند، بنابر قضیه گرین:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \iint_A (2y-2y)\,dx\,dy = 0$$

ب) $\displaystyle\oint_C (x^3\sin x - xy)\,dx + \left(\frac{y}{1+y^4} + x^2\right) dy$ C بیضی $\frac{x^2}{4}+y^2=2y$ طی شده در جهت مثبت.

توابع $P(x,y)=x^3\sin x - xy$ و $Q(x,y)=\dfrac{y}{1+y^4}+x^2$ بر $D=\mathbb{R}^2$

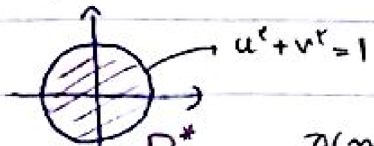


مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته دارند.

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_A (2x-(-x))\,dx\,dy$$

$$= \iint_A 3x\,dx\,dy$$

با تغییر متغیر $\frac{x}{2}=u$ و $y-1=v$ یا $\begin{cases} x=x(u,v)=2u \\ y=y(u,v)=v+1 \end{cases}$



خواهیم داشت:

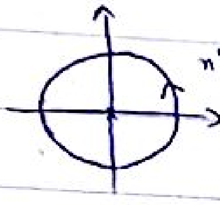
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\iint_D 3x\,dx\,dy = \iint_{D^*} 3(2u)\times \underbrace{2}_{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}\,du\,dv = 12\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 r\cos\theta\; r\,dr\,d\theta$$

$$= 0$$

ج) $\oint_C \underbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{Q(x,y)} dy$ C دایره $x^2+y^2=a^2$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

توابع $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$ بر $D=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ مشتقات



خوش تعریف مرتبه اول پیوسته دارند ولی از آنجا که نقطه $(0,0)$ در ناحیه محصور توسط C قرار دارد.

استفاده از قضیه گرین در اینجا مقدور نیست.

با توجه به اینکه $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; x^2+y^2=a^2\}$ خواهیم داشت:

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \oint_C \frac{-y}{a^2} + \frac{x}{a^2}dy$$

به این ترتیب اگر: $\vec{F}_1(x,y) = P_1(x,y)\vec{i} + Q_1(x,y)\vec{j} = \frac{y}{a^2}\vec{i} + \frac{x}{a^2}\vec{j}$

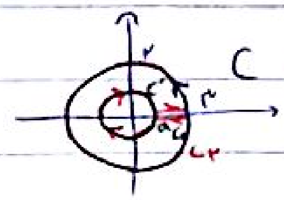
آنگاه:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F}_1\cdot d\vec{r} = \oint_C \underbrace{\left(\frac{-y}{a^2}\right)}_{P_1(x,y)}dx + \underbrace{\left(\frac{x}{a^2}\right)}_{Q_1(x,y)}dy$$

$$= \iint_A \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right)dxdy = \iint_A \left(\frac{1}{a^2} - \left(-\frac{1}{a^2}\right)\right)dxdy = \frac{2}{a^2}\underbrace{\iint_A dxdy}_{\text{مساحت دایره برابر } \pi a^2}$$

$$= 2\pi$$

د) $\oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ C بیضی به معادله $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت



$C : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

فرض کنیم $a>0$ آنقدر کوچک اختیار شود تا دایره $C' = x^2+y^2=a^2$

درون بیضی C قرار بگیرد، همچنین فرض کنیم C'' مسیر بسته جدید به صورت زیر باشد: $C''=C\cup C_1\cup C'\cup C_2$

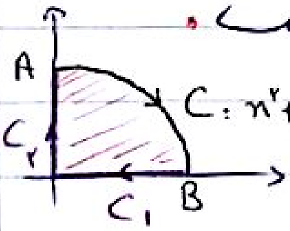
با توجه به اینکه توابع $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ بر ناحیه A (محصور توسط خم بسته C'') مشتقات جزئی پیوسته دارند، بنا بر قضیه گرین خواهیم داشت:

$$\oint_{C''} Pdx+Qdy=\iint_A\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_A\left(\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dxdy=0$$

$$\Rightarrow 0=\int_{C''}Pdx+Qdy=\oint_C Pdx+Qdy+\int_{C_1}Pdx+Qdy+\oint_{C'}Pdx+Qdy+\int_{C_2}Pdx+Qdy \Rightarrow \oint_C Pdx+Qdy+\oint_{C'}Pdx+Qdy=0$$

$$\Rightarrow \oint_C Pdx+Qdy=-\oint_{C'}Pdx+Qdy=\oint_{-C'}Pdx+Qdy=2\pi \qquad -C': x^2+y^2=a^2$$

مثال) مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_C \underbrace{(x^3+y^3)}_{P(x,y)}dx+\underbrace{\left(\frac{y^4}{1+y^4}+xy^2\right)}_{Q(x,y)}dy$ که در آن C خمی از دایره $x^2+y^2=1$ در $\frac{1}{4}$ اول صفحه از نقطه $A(0,1)$ به $B(1,0)$ است.



$$P(x,y)=x^3+y^3 \Rightarrow \partial P/\partial y=3y^2$$

$$Q(x,y)=\frac{y^4}{1+y^4}+xy^2 \Rightarrow \partial Q/\partial x=y^2$$

فرض کنیم C_1 و C_2 مسیرهای مطابق شکل فوق باشند. در این صورت $C\cup C_1\cup C_2$ یک مسیر بسته است. با استفاده از قضیه گرین خواهیم داشت:

$$\oint_{C\cup C_1\cup C_2} Pdx+Qdy=-\iint_A\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=-\iint_A(-2y^2)dxdy=2\iint_A y^2dxdy=2\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2\sin^2\theta\, r\,dr\,d\theta$$

$$=2\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 r^3dr\right)$$

$$\Rightarrow \int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = 2\left(\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta\right)\frac{1}{4}$$

$$C_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t\in[0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases}$$

$$\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = -\int_{-C_1} P\,dx + Q\,dy = -\int_0^1 (t^3+0^3)\,dt + \left(\frac{0^3}{1+0^4+t\,0^2}\right)\times \overbrace{0}^{dy}$$

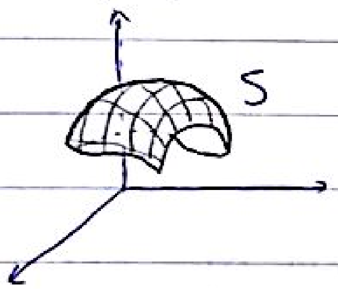
$$= -\int_0^1 t^3\,dt = -1/4$$

$$C_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad t\in[0,1] \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \end{cases}$$

$$\int_{C_2} (x^3+y^3)\,dx + \left(\frac{y^3}{1+y^4}\right)dy = \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{4}\ln 2$$

$\to \dots$

انتگرال رویه: فرض کنیم $S\subset\mathbb{R}^3$ رویه‌ای در فضا باشد. نقطه افرازی $P=\{\Delta S_1,\dots,\Delta S_n\}$



از این رویه را در نظر بگیریم. $\forall i=1,\dots,n \quad \Delta\sigma_i := \Delta S_i$ مساحت قطعه

$\|P\| = \max\{diam(\Delta S_i);\ i=1,\dots,n\}$

اگر $f:S\to\mathbb{R}$ تابعی اسکالر و تعریف شده روی S باشد،

آنگاه به هر انتخاب نقاط $p_1\in\Delta S_1,\dots,p_n\in\Delta S_n$ عبارت $\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\sigma_i$ را یک حاصل جمع ریمان

تابع f روی رویه S نظیر افراز P می‌نامیم. حال با تغییر P به گونه‌ای که $\|P\|\to 0$، اگر عبارات

حاصل جمع متناهی شوند آنگاه حد مزبور را با نماد $\iint_S f\,d\sigma$ یا $\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma$ نمایش می‌دهیم.

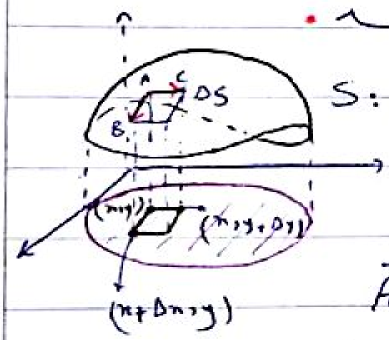
خاصیت های متعارف انتگرال دوگانه برای این مفهوم انتگرال نیز برقرار هستند. در حالت $f\equiv 1$،

مقدار انتگرال $\iint_S f\,d\sigma = \iint_S 1\,d\sigma$ برابر مساحت رویه S خواهد بود.

* محاسبه انتگرال رویه *: فرض کنیم $S\subset\mathbb{R}^3$ رویه‌ای در فضا به معادله $z=g(x,y)$ ، $(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$

بوده و تابع $g:D\to\mathbb{R}$ بر D مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشد. اگر $\Delta S\subset S$

قطعه‌ای از این رویه نظیر مستطیل $[x, x+\Delta x]\times[y, y+\Delta y]\subset D$ باشد.



$S: z=g(x,y)$

$$\underbrace{\Delta\sigma}_{\text{مساحت قطعه } \Delta S} \approx \|\vec{AB}\times\vec{AC}\|$$

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}\Delta x\\ 0\\ g(x+\Delta x,y)-g(x,y)\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\Delta x\\ 0\\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\Delta x\end{pmatrix}$$

$$\vec{AC}=\begin{pmatrix}0\\ \Delta y\\ g(x,y+\Delta y)-g(x,y)\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0\\ \Delta y\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\Delta y\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Delta\sigma\approx\left\|\begin{pmatrix}\Delta x\\ 0\\ g_x\Delta x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\ \Delta y\\ g_y\Delta y\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+(g_x)^2+(g_y)^2}\;\Delta x\,\Delta y$$

به این ترتیب در این حالت می‌توان ثابت کرد که اگر $f:S\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته تعریف شده روی S باشد

آنگاه:

$$\iint_S f\,d\sigma=\iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\;dx\,dy$$

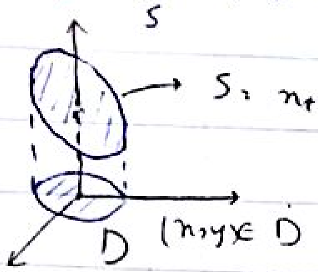
در حالتی که رویه S دارای معادله $y=g(x,z)$ ، $(x,z)\in D_{xz}\subset\mathbb{R}^2$ یا $x=g(y,z)$ ، $(y,z)\in D_{yz}\subset\mathbb{R}^2$

باشد. عبارات مشابهی برای محاسبه $\iint_S f\,d\sigma$ حاصل می‌شوند.

مثال) مطلوبست محاسبه هر یک از انتگرال های زیر.

الف) $\iint_S f(xy+2z)\, d\sigma$

S قسمتی از صفحه $x+y+z=1$ درون استوانه $x^2+y^2=1$

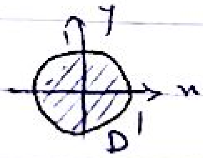


$S: z=g(x,y)=1-x-y \quad \Big| \quad d\sigma=\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\, dx\,dy$

$\iint_S f(x,y,z)\, d\sigma = \iint_S f(x,y,g(x,y))\sqrt{3}\, dx\,dy \quad \Big| \quad =\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\, dx\,dy$

$= \sqrt{3}\, dx\,dy$

$= \iint_D (xy+2(1-x-y))\sqrt{3}\, dx\,dy$



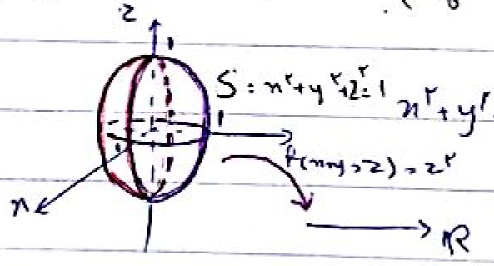
$= \sqrt{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2\sin\theta\cos\theta + 2 - 2r\cos\theta - 2r\sin\theta\right) r\,dr\,d\theta$

$= \sqrt{3}\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 r^3 dr\right) + \sqrt{3}\left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right)\left(\int_0^1 2r\, dr\right)+\dots$

$= \dots$

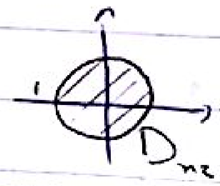
ب) $\iint_S z^2\, d\sigma$

S کره $x^2+y^2+z^2=1$



$* S_1: \; y=g_1(x,z)=\sqrt{1-x^2-z^2}$

$* S_2: \; y=g_2(x,z)=-\sqrt{1-x^2-z^2}$



$\iint_S f\, d\sigma \;:\; S_1 \begin{cases} y=g_1(x,z)=\sqrt{1-x^2-z^2} \\ (x,z)\in D_{xz} \end{cases} \Rightarrow d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g_1}{\partial z}\right)^2}\, dx\,dz$

$= \sqrt{1+\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-z^2}}+\frac{-z}{\sqrt{1-x^2-z^2}}}\; dx\,dz = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\, dx\,dz$

$\Rightarrow \iint_{S_1} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint_{D_{xz}} (x,g_1(x,z),z)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\, dx\,dz$

$$= \iint_{D_{xz}} \frac{z^2}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\, dx\, dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-r^2}}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 \frac{r^2 \times r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr\right) = \pi\left(\int_1^0 \frac{(1-u)(\frac{1}{2}du)}{\sqrt{u}}\right)$$

$u := 1-r^2$

$du = -2r\,dr$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \sqrt{u}\right) du = \dots$$

$$\iint_{S_2} f\, d\sigma$$

$$S_2 : \begin{cases} y = g_2(x,z) = -\sqrt{1-x^2-z^2} \\ (x,z) \in D_{xz} \end{cases} \Rightarrow d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz$$

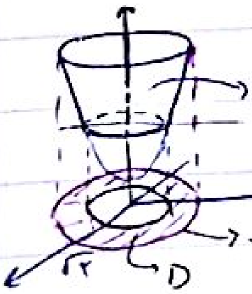
$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}} \qquad \frac{\partial g_2}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{1-x^2-z^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\, dx\, dz$$

$$\iint_{S_2} f\, d\sigma = \iint_{D_{xz}} \underbrace{f(x, g_2(x,z), z)}_{z^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\, dx\, dz = \iint_{D_{xz}} \frac{z^2}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\, dx\, dz = \dots$$

مثال) مطلوبست محاسبه مساحت هر یک از رویه‌های زیر.

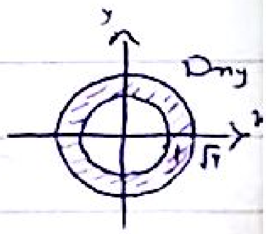
الف) مساحت قسمتی از سهمی‌گون $z = x^2+y^2$ بین صفحات $z=1$ و $z=2$.



$S : z = g(x,y) = x^2+y^2$

$$S \begin{cases} z = g(x,y) = x^2+y^2 \\ (x,y) \in D_{xy} \subset \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$\text{مساحت } S = \iint_S 1\, d\sigma$$



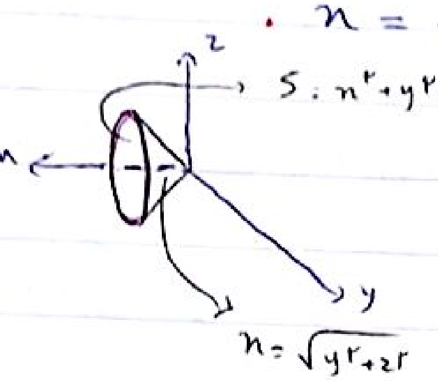
$$\Rightarrow d\sigma = \sqrt{1+(\underbrace{g_x}_{2x})^2+(\underbrace{g_y}_{2y})^2}\, dx\, dy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy$$

$$\text{مساحت } S = \iint_{D_{xy}} 1 \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} (1+4r^2)^{1/2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} (1+4r^2)^{1/2}\, r\, dr = \dots$$

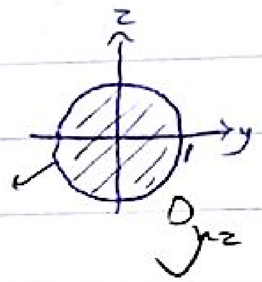
$$\begin{cases} u = 1+4r^2 \\ r\,dr = \frac{1}{8}\,du \end{cases} \Rightarrow \qquad \dots = 2\pi \int_0^{9} u^{1/2}\,\frac{du}{8} = \dots$$

ب) مساحت قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=2$ درون نیم مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$.



مساحت $= \iint 1\,d\sigma$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ x=\sqrt{y^2+z^2} \end{cases} \Rightarrow x^2+z^2=1$$



$$S: \begin{cases} x=g(y,z)=\sqrt{2-y^2-z^2} \\ (y,z)\in D_{yz} \end{cases} \Rightarrow d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2}\;dy\,dz$$

$$\frac{-y}{\sqrt{1-y^2-z^2}} \qquad \frac{-z}{\sqrt{1-y^2-z^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-y^2-z^2}}\,dy\,dz$$

مساحت $= \iint_{D_{yz}} 1\;\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-y^2-z^2}}\,dy\,dz$

$$\begin{cases} y=r\cos\theta \\ z=r\sin\theta \end{cases} \qquad = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta = \dots$$

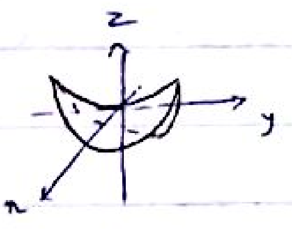
تمرین) ج) مساحت قسمتی از نیم مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$ درون کره $x^2+y^2+z^2=2$.

$$S: \begin{cases} x=g(y,z)=\sqrt{y^2+z^2} \\ (y,z)\in D_{yz} \end{cases} \rightarrow d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)^2}\;dy\,dz$$

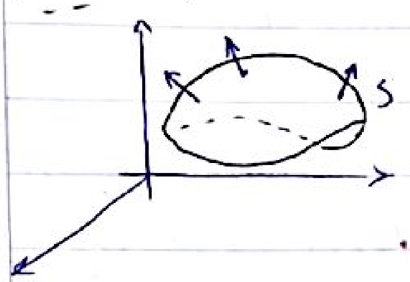
$$= \sqrt{2}\,dy\,dz$$

مساحت $= \iint_S 1\,d\sigma = \iint_{D_{yz}} \sqrt{2}\,dy\,dz = \sqrt{2}\times\pi\,1^2$

د) مساحت قسمتی از زین اسبی $z=y^2-x^2$ درون استوانه $x^2+y^2=1$



شار یک میدان : فرض کنیم S رویه‌ای هموار در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد. در این صورت در هر نقطه از این رویه می‌توانیم بردار یکه عمود بر رویه در نقطه گرفته، در نتیجه یک میدان برداری تعریف شده بر S ایجاد نماییم.



رویه S را جهت پذیر نامیم، هرگاه بتوانیم بردارهای میدان اخیر را به گونه‌ای انتخاب کرد که با حرکت در امتداد S میدان بردار حاصل پیوسته تغییر نماید.

فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^3$ و $\vec{F}$ یک میدان برداری تعریف شده بر D باشد هم‌چنین فرض کنیم $S\subset D$ یک رویه جهت پذیر با میدان برداری $\vec{n}$، قائم یکه بر S باشد. در این صورت:

* مقدار $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ را شار حاصل از میدان $\vec{F}$ گذرنده از رویه‌ی S در جهت n نامیم.

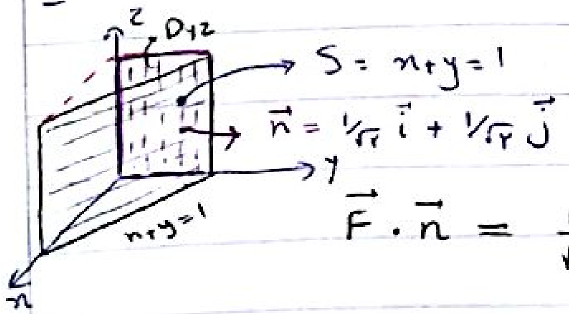
در حالتی که S رویه‌ای قطعه به قطعه جهت پذیر متشکل از قطعات جهت پذیر $S_1, \dots, S_m$ باشد، قرار می‌دهیم:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{S_1} \vec{F}\vec{n}\,d\sigma + \dots + \iint_{S_m} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

مثال) مطلوب است محاسبه $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ در هر یک از حالت‌های زیر.

در $\frac{1}{8}$ اول فضا

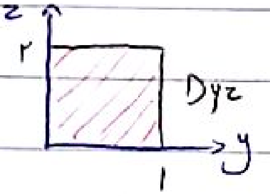
الف) $\vec{F}(x,y,z) = (x+y)\vec{i} + (y-z)\vec{j} + x\vec{k}$ ، S قسمتی از صفحه $x+y=1$ بین صفحات $z=0$ و $z=2$ و $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$.



$$\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y-z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+2y-z)$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec F\cdot\vec n\, d\sigma = \iint_S \frac{1}{\sqrt2}(x+2y-z)\, d\sigma$$

$S: \begin{cases} x = g(y,z) = 1-y \\ (y,z)\in D_{yz} \end{cases}$



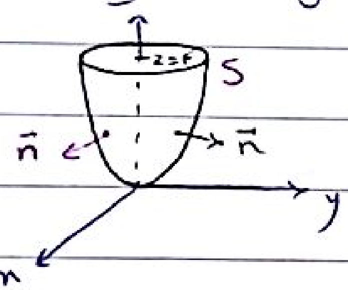
$$d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2}\, dy\, dz$$

$$= \sqrt{1+(-1)^2+0^2}\, dy\, dz = \sqrt2\, dy\, dz \Rightarrow \iint_S \frac{1}{\sqrt2}(x+2y-z)\, d\sigma$$

$$= \iint_{D_{yz}} \frac{1}{\sqrt2}\Big(\underbrace{g(y,z)}_{1-y}+2y-z\Big)\sqrt2\, dy\, dz \Rightarrow \iint_S \vec F\cdot\vec n\, d\sigma = \iint_{D_{yz}}(1+y-z)\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1\int_0^2 (1+y-z)\, dz\, dy = 2+\left(\int_0^1 y\, dy\right)\left(\int_0^2 dz\right)-\left(\int_0^1 dy\right)\left(\int_0^2 z\, dz\right)$$

ب) $\vec F(x,y,z) = (x-y)\vec i + (x+y)\vec j + z\vec k$ ، S قسمتی از سطح $z=x^2+y^2$ زیر صفحه $z=4$



$\vec n$ همه جا رو به بیرون سطح است. $S\quad g(x,y,z) = x^2+y^2-z=0$

$$\vec n = \frac{1}{\|\nabla \vec g\|}\nabla\vec g = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\begin{pmatrix}2x\\2y\\-1\end{pmatrix}$$

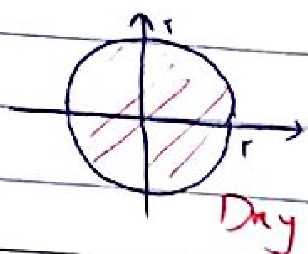
نشان‌دهنده به سمت بیرون بودن بردار $\vec n$

* اگر مثبت بود باید در منفی ضرب بکنیم تا جهت خواسته شده در سؤال، درست شود.

$$\vec F\cdot\vec n = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\big(2x(x-y)+2y(x+y)+(-1)z\big) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(2x^2+2y^2-z)$$

$$\iint_S \vec F\cdot\vec n\, d\sigma = \iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x^2+2y^2-z)\, d\sigma$$

$S \begin{cases} z = h(x,y) = x^2+y^2 \\ (x,y)\in D_{xy} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x^2+y^2\le 4\} \end{cases}$

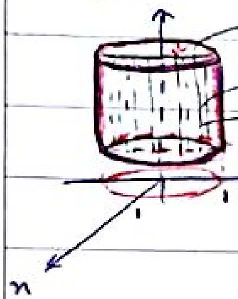


$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy \Rightarrow$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,(2x^2+2y^2-\underbrace{z}_{x^2+y^2})\,\underbrace{\cancel{d\sigma}}_{\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy}$$

$$=\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_1^{2\pi}\int_0^2 r^2.r\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^2 r^3\,dr$$

ج) شار $F(x,y,z)=(x+z)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+xyz\vec{k}$ از استوانه $x^2+y^2=1$ بین صفحات $z=1$, $z=3$, $\vec{n}$ عمود رو به سمت داخل استوانه.



$S_2=h_2(y,z)=-\sqrt{1-y^2}$

$S: x^2+y^2=1$

$S_1=x=h_1(y,z)=\sqrt{1-y^2}$

$$S: g(x,y,z)=x^2+y^2=1 \Rightarrow \vec{n}=\frac{-1}{\|\nabla\vec{g}\|}\nabla\vec{g}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{4x^2+4y^2}}\begin{pmatrix}2x\\2y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-y\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{n}=-x(x+z)-y(y-z)=-x^2-y^2-xz+yz$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}=\iint_S (\underbrace{-x^2-y^2}_{-(x^2+y^2)=1}-xz+yz)\,d\sigma=\iint_S (z(y-x)-1)\,d\sigma$$

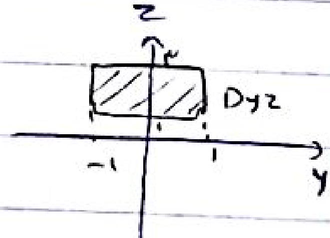
$$S: x^2+y^2=1 \longrightarrow x=\pm\sqrt{1-y^2}$$

$$D_{yz}=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2;\ -1\le y\le 1\ ,\ 1\le z\le 3\}$$

$$S=S_1\cup S_2\ ,\ S_1\begin{cases}x=h_1(y,z)=\sqrt{1-y^2}\\(y,z)\in D_{yz}\end{cases}\qquad S_2\begin{cases}x=h_2(y,z)=-\sqrt{1-y^2}\\(y,z)\in D_{yz}\end{cases}$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_{S_1}(z(y-x)-1)\,d\sigma+\iint_{S_2}(z(y-x)-1)\,d\sigma$$

$$d\sigma=\sqrt{1+\Big(\underbrace{\frac{\partial h}{\partial y}}_{-y/\sqrt{1-y^2}}\Big)^2+\Big(\underbrace{\frac{\partial h}{\partial z}}_{0}\Big)^2}\,dy\,dz=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\,dz$$



$$\iint_{S_1}(z(y-x)-1)\,d\sigma=\iint_{D_{yz}}(zy-z\sqrt{1-y^2}-1)\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\,dz$$

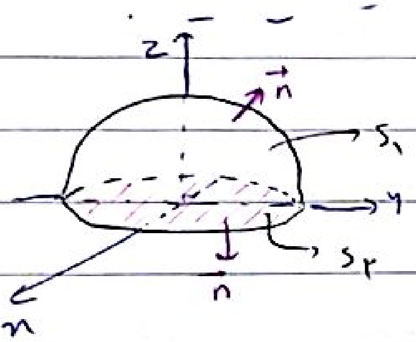
$$= \iint_{D_{yz}} \frac{yz}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\,dz - \iint_{D_{yz}} z\,dy\,dz - \iint_{D_{yz}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\,dz$$

$$= \left(\int_{-1}^{1} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\right)\left(\int_{1}^{3} z\,dz\right) - \left(\int_{-1}^{1} dy\right)\left(\int_{1}^{3} z\,dz\right) - \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\right)\left(\int_{1}^{3} dz\right)$$

$= \dots$ دقیقاً به همین ترتیب عبارت دوم قابل محاسبه است.

د) $\vec{F}(x,y,z) = (x+yz)\vec{i} + (y-z)\vec{j} + (z-xy)\vec{k}$ که رویه بسته متشکل از قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=1$

در نیم فضای $z\geq 0$ و قسمتی از صفحه $z=0$ نشان دهید که $\vec{n}$ عمود واحد به سمت بیرون این رویه بسته.



$S = S_1 \cup S_2 \qquad \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$

$S_1 : g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1$

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\|\nabla \vec{g}_1\|}\nabla \vec{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{n} = x^2 + xyz$$

$\frac{1}{2}$

$$+y^2 - yz + z^2 - xyz = x^2+y^2+z^2 - yz = 1 - yz$$

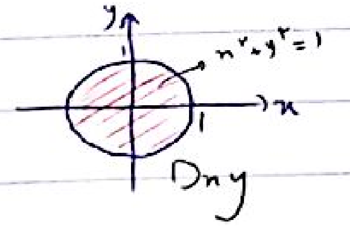
$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{S_1} (1-yz)\,d\sigma \qquad S_1 : \begin{cases} z = h_1(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \\ (x,y)\in D_{xy} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x^2\ y^2 \leq 1\}\end{cases}$$

$$\Rightarrow d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{S_1} (1-yz)\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left(1 - y\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$\vec{F}(x,y,z) = (x+yz)\vec{i} + (y-z)\vec{j} \quad = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - y\right)dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - r\sin\theta \right) r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-r^2}}\,dr = 2\pi$$



$$S_2 : g(x,y,z) = z = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_2 = \frac{-1}{\|\nabla \vec{g}_2\|}\nabla \vec{g}_2 = \frac{-1}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{n}_2 = -(z-xy) = xy \Rightarrow \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{S_2} xy\,d\sigma$$

$$S_2 \begin{cases} z = h(x,y) = 0 \\ (x,y) \in D_{xy} \end{cases} \quad d\sigma = \sqrt{1 - \left(\cancel{\frac{\partial h}{\partial x}}\right)^2 + \left(\cancel{\frac{\partial h}{\partial y}}\right)^2}\,dx\,dy \Rightarrow$$

$$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \cancel{xy}\,dx\,dy \Rightarrow \iint_{S} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 2\pi + 0 = 2\pi$$

در مواردی که مانند مثال قبل هدف محاسبهٔ شار خالص از یک میدان خارج شونده از یک رویهٔ بسته در فضا است. تحت برخی شرایط می‌توانیم از قضیه زیر استفاده کنیم:

قضیه گاوس یا دیورژانس: فرض کنیم S رویه‌ای بسته و قطعه به قطعه جهت پذیر بوده، $\vec{n}$ قائم یکه برون‌سو بر هر یک از قطعات جهت پذیر رویه نسبت به درون این رویه باشد. فرض کنیم P، Q و R توابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته تعریف شده بر S و ناحیه محصور توسط این رویه باشند در این صورت برای میدان

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \,.\quad \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

که در آن A ناحیه محصور توسط رویهٔ بستهٔ فوق است.

نمادگذاری: با استفاده از نماد صوری $\vec{\nabla} := \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ عبارت $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

را می‌توانیم به صورت $\nabla\cdot\vec F = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec i + \frac{\partial}{\partial y}\vec j + \frac{\partial}{\partial z}\vec k\right)\cdot\left(P\vec i + Q\vec j + R\vec k\right)$ نیز بیان کنیم.

این علامت را گرادیان یا دیورژانس میدان $\vec F$ نامیده، آن را با نماد $\operatorname{div}\vec F$ نیز نشان می‌دهیم. بنابراین

صورت قضیه گاوس به صورت زیر بیان می‌شود: $\oiint_S \vec F\cdot\vec n\, d\sigma = \iiint_A (\nabla\cdot\vec F)\, dV = \iiint_A (\operatorname{div} F)\, dV$

مثال) مطلوب است محاسبه $\oiint_S \vec F\cdot\vec n\, dv$ در هر یک از موارد زیر.

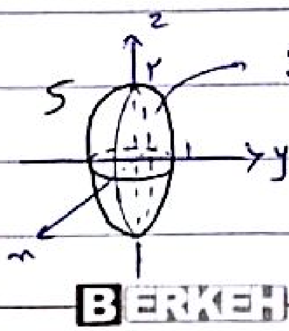
الف) $\vec F(x,y,z) = (x+z)\vec i + (y-z)\vec j + xyz\vec k$ ، S رویه بسته تشکیل شده از نیم‌کره $x^2+y^2+z^2=1$ در نیم‌فضای $z\geq 0$ و قسمتی از صفحه $z=0$ درون این کره و $\vec n$ عمود واحد به سمت بیرون این رویه بسته. با توجه به اینکه $P(x,y,z)=x+z$ و $Q(x,y,z)=y-z$ و $R(x,y,z)=xyz$

در تمام فضای R^3 مشتقات جزئی پیوسته دارند، بنابر قضیه دیورژانس

$$\oiint_S \vec F\cdot\vec n\,d\sigma = \iiint_A (\underbrace{\operatorname{div}\vec F}_{\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}})\,dx\,dy\,dz = \iiint_A (1+1+xy)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(2+(\rho\sin\varphi\cos\theta)(\rho\sin\varphi\sin\theta)\right)\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 2\pi$$

ب) $\vec F(x,y,z) = (x^2+5y^2z)\vec i + (y+4xz)\vec j + (x^3-y^3)\vec k$ ، S رویه بیضوی $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$



$S: x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$

$\vec n$ عمود واحد به سمت بیرون.

$$\oiint_S \vec F\cdot\vec n\,d\sigma = \iiint_A \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

$= \iiint_A (2x+1+0)\,dx\,dy\,dz$ $\qquad A: \{(x,y,z)\ ;\ x^2+y^2+\frac{z^2}{4} \le 1\}$

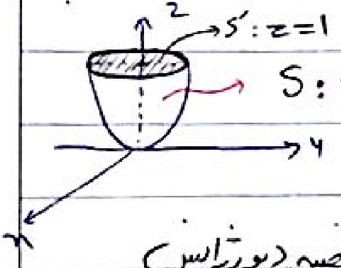
ابتدا از تغییر متغیر $\begin{cases} x(u,v,w)=u \\ y(u,v,w)=v \\ z(u,v,w)=w \end{cases}$ استفاده کرده، ناحیه A تبدیل به ناحیه A^* خواهد شد.

$A^* = \{(u,v,w)\ ;\ u^2+v^2+w^2 \le 1\}$

سپس از تغییر متغیر کروی استفاده می‌کنیم.

مثال) فرض کنید S سطحی از سهمیگون $z=x^2+y^2$ زیر صفحه $z=1$ بوده، $\vec n$ هم جهت رو به سمت درون

محیطی باشد. برای میدان $\vec F(x,y,z) = (x+ze^y)\,\vec i + (y+x^2z^2)\,\vec j + (z-x^2)\,\vec k$، مطلوبست



محاسبه $\iint_S \vec F\cdot\vec n\,d\sigma$. فرض کنید S' سطحی از صفحه $z=1$ درون

محیطی S بوده، قائم یکه S' برابر $\vec n' = -\vec k$ باشد. بنابراین با استفاده از قضیه دیورژانس

$$\oiint_{S\cup S'} \vec F\cdot\vec n\,d\sigma = \oiint_{S\cup S'} \vec F\cdot(-\vec n)\,d\sigma = -\iiint_A (\operatorname{div}\vec F)\,dx\,dy\,dz$$

$$= -\iiint_A (1+1+1)\,dx\,dy\,dz = \dots$$

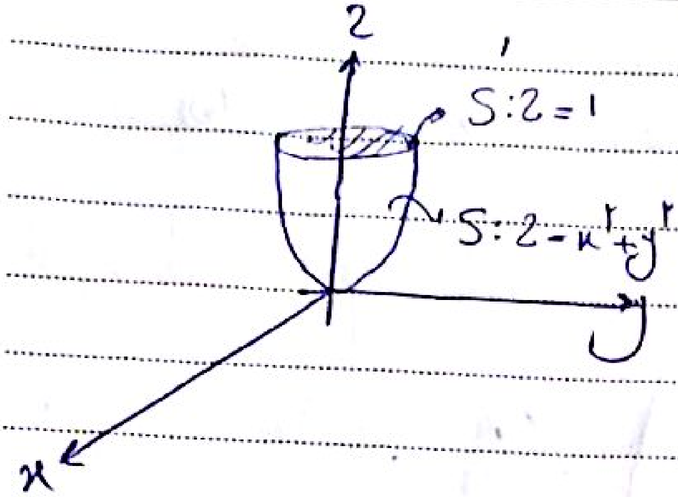
از سوی دیگر

$$\iint_S \vec F\cdot\vec n\,d\sigma = \oiint_{S\cup S'} \vec F\cdot\vec n\,d\sigma - \iint_{S'} \vec F\cdot\vec n\,d\sigma \Rightarrow S': \vec n = -\vec k$$

$$\vec F\cdot\vec n = x^2 - z = x^2 - 1$$

$$\Leftarrow \iint_{S'} \vec F\cdot\vec n\,d\sigma = \iiint_{S'} (x^2-1)\,d\sigma = \dots$$

« جزوه ۲ تست »



فرض کنیم S' سطحی از صفحه $z=1$ درون سهمیگون S بوده و قائم یکه روی S' برابر $n' = -k$ باشد.

بنابراین ترتیب با استفاده از قضیه دیورژانس $\oiint_{S\cup S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma$

$$\oiint_{S\cup S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \oiint_{S\cup S_1} \vec{F}(\vec{n})\, dv = \iiint_A (\mathrm{div}\,\vec{F})\, dx\,dy\,dz = \iiint_A (1+1+1)\, dx\,dy\,dz$$

از سوی دیگر

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \oiint_{S\cup S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma - \iint_{S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma$$

$$S': \vec{n} = -\vec{k} \Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{n} = x^2 - z = x^2 - 1 \Rightarrow \iint_{S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iint_{S'} (x^2-1)\, d\sigma = \ldots$$

تعریف: فرض کنیم $D\subset R^3$ و توابع $P, Q, R: D\to R$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند در این صورت تعریف میدان برداری $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ بر D میدان $(R_y - Q_z)\vec{i} + (P_z - R_x)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}$ را میدان چرخشی F نامیده آن را با نماد $\mathrm{rot}\,F$ یا $\mathrm{curl}\,\vec{F}$ نمایش می‌دهیم.

با استفاده از نماد عملگر $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ را استفاده صورت خواهد

ضرب برداری خواهیم داشت

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

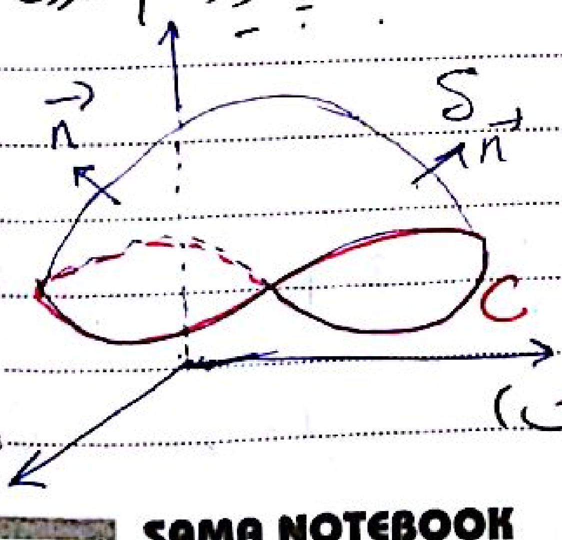
مثال:

برای میدان برداری $f(x,y,z) = x^2\vec{i} + (x^2+yz)\vec{j} + xyz\vec{k}$ مطلوب است تعیین $\mathrm{curl}\,\vec{F}$

$$\mathrm{curl}\,f = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 & x^2+yz & xyz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz-y \\ -yz \\ 2x \end{pmatrix}$$

قضیه: (استوکس)

فرض کنیم S رویه‌ای جهت‌دار و قطعه به قطعه هموار و جهت‌پذیر با خم مرزی



این رویه بسته محصور فرض کنیم

جهت میدان برداری $\vec{n}$ بر S و جهت مثبت

برداری خم C از قانون دست راست است (جهت مثبت)

... پیوسته‌ای الی توابع P و Q و R بر ناحیه‌ای از فضا در بر گیرنده رویه S و خم C مشتقات

جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشند آنگاه برای میدان $\vec F = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$

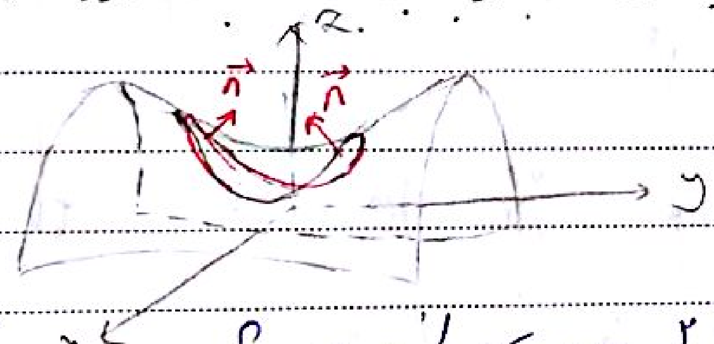
$$\oint_C \vec F\cdot d\vec r = \iint_S (\operatorname{curl}\vec F)\cdot\vec n\, d\sigma$$

مثال ۱) مطلوب است محاسبه $\oint_C \vec F\cdot d\vec r$ در هر یک از حالات زیر

الف) $\vec F(x,y,z) = (2x-y)\vec i + (y-2z)\vec j + (y^2+z^2)\vec k$ ، C خم حاصل از تلاقی زین اسبی $z=y^2-x^2$

و استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ و جهت حرکت برداری C با توجه به جهت مثبت محور z در خلاف

جهت عقربه‌های ساعت



فرض کنید S قسمتی از زین اسبی $z=y^2-x^2$ محصور توسط خم C باشد. در این صورت

بنا بر قضیه استوکس
$$\oint_C \vec F\cdot d\vec r = \iint_S (\operatorname{curl}\vec F\cdot\vec n)\, d\sigma$$

$$\operatorname{curl}\vec F = \vec\nabla\times\vec F = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & y+2z & y^2+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S: g(x,y,z) = y^2 - x^2 - z = 0 \longrightarrow \vec n = \frac{-1}{\|\nabla g\|}\vec\nabla g = \frac{-1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix}$$

مرحله سوم: به نسبت باشد.

$$\Longrightarrow \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\left(4x(y+1)+1\right)$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \frac{4x(y+1)+1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,d\sigma$$

$$S:\begin{cases} z = h(x,y) = y^2 - x^2 \\ (x,y)\in D_{xy} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leqslant 1\}\end{cases} \Longrightarrow d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

$$\Longrightarrow \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{D_{xy}} \frac{4x(y+1)+1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \times \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

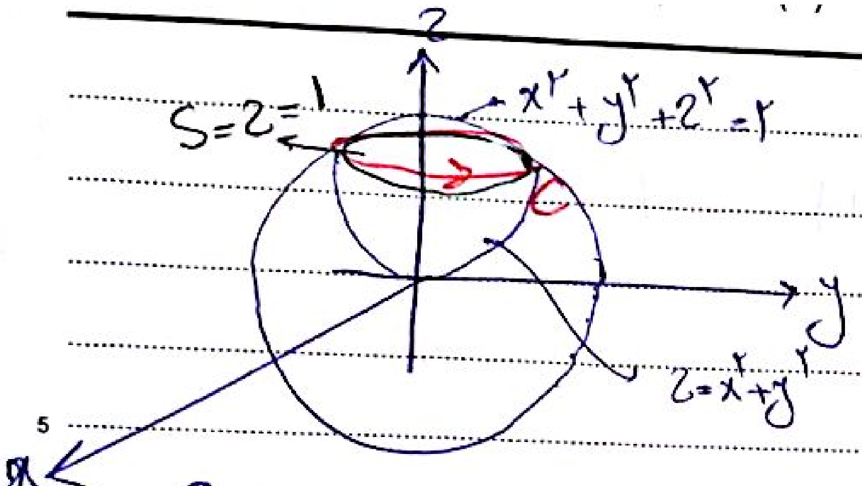
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(4r\cos\theta\,(r\sin\theta+1)+1\right) r\,dr\,d\theta = 2\pi\times\frac{1}{2} = \pi$$

ب) $\oint (x^3+y^3)\,dx + (y^3+x^3)\,dy + (z^3+x^3)\,dz$

C خم حاصل از برخورد کره $x^2+y^2+z^2=2$ با سهمیوار $z=x^2+y^2$ است

حرکت بر روی C با توجه به جهت مثبت محور z براساس قانون دست راست است

Subject:



$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \rightarrow z^2+z=2 \rightarrow z^2+z-2=0$$

$$z=1,\ -2 \rightarrow z=1$$

با فرض اینکه S قسمتی از صفحه $z=1$ محصور توسط خم C باشد خواهیم داشت:

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3+y^3 & y^3+z^3 & z^3+x^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3z^2 \\ -3x^2 \\ -3y^2 \end{pmatrix},\ \vec{n}=\vec{k}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{curl}\vec{f}\cdot\vec{n}=-3y^2 \Longrightarrow \oint_C \vec{F}\cdot\vec{dr}=\iint_S (\operatorname{curl} F)\,d\sigma=\iint_S -3y^2\,d\sigma$$

$$S:\begin{cases} z=h(x,y)=1 \\ (x,y)\in D_{xy}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leqslant 1\} \end{cases}$$

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=dx\,dy \Longrightarrow$$

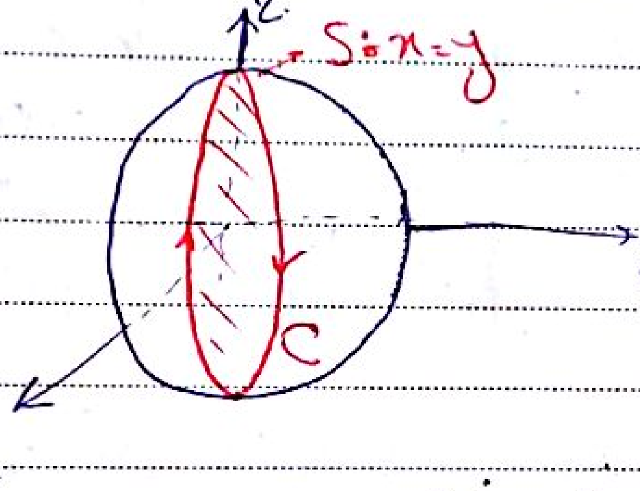
$$\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r}=-3\iint_{D_{xy}} y^2\,dx\,dy=-3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\theta\, r\,dr\,d\theta=$$

$$-3\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)=-\frac{3}{8}\,2\pi$$

ج) $\int_C (2xy+z^2)\,dx + (x^2+y^2+z^2)\,dy + (2yz+x^2)\,dz$

C خم حاصل از برخورد کره $x^2+y^2+z^2=2$ با صفحه $y=x$ با جهت مثبت برروی

C با توجه به جهت مثبت معمول خلاف جهت عقربه‌های ساعت



فرض کنیم S قسمتی از صفحه $y=x$ توسط کره $x^2+y^2+z^2=2$ بوده، $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i}+\vec{j})$

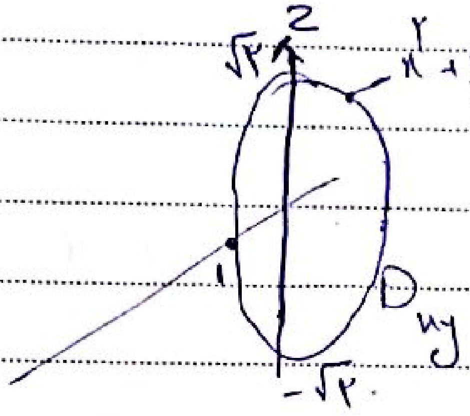
در این صورت

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\det\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z^2 & x^2+y^2+z^2 & 2yz+x^2 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2z-2x \\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\operatorname{curl}\vec{F}\times\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(2z-2x)=\sqrt{2}(z-x)$$

قضیه استوکس: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S(\operatorname{curl}\vec{F}\times\vec{n})\,d\sigma=\iint_S\sqrt{2}(z-x)\,d\sigma=$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ y=x \end{cases}\Longrightarrow 2x^2+z^2=2\longrightarrow x^2+\frac{z^2}{2}=1$$



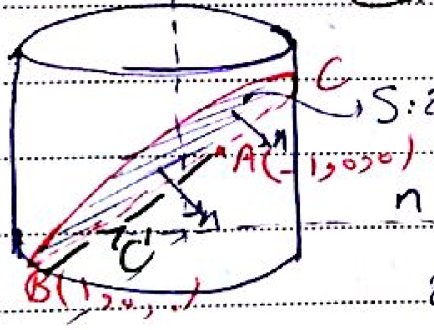
$$S:\begin{cases} y=h(x,z)=x \\ (x,z)\in D_{xz}=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+\frac{z^2}{2}\leq 1\}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \sqrt{2}(z-x)\,d\sigma=\iint_{D_{xz}}\sqrt{2}(z-x)\sqrt{2}\,dx\,dz=2\iint_{D_{xy}}(z-x)\,dx\,dz$$

آخرین مثال :

مطلوب است تعیین $\int_C (2xy-y^2)dx+(x^2+2yz)dy+(y^2-2xz)dz$

که در آن C خم حاصل از برخورد استوانه $x^2+y^2=1$ با صفحه $z=y$ در نیم ~~فضای~~ فضای $z\geq 0$ از نقطه $A(-1,0,0)$ به $B(1,0,0)$ است.



فرض کنیم C' مستقیم از محور x بین A و B در ... $n=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ ملاحظه می‌شود

می‌شود از B به A باشد. اگر S قسمتی از صفحه $z=y$

که توسط خم بسته $C\cup C'$ بوده، $\vec{n}$ قائم یکه بر S برابر $n=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ ، $n=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}-\vec{k})$

باشد، داریم

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xy-y^2 & x^2+2yz & y^2-2xz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2z\\-x-2y\end{pmatrix}$$

Year: ______ Month: ______ Dey: ______ ( ) Subject: ______

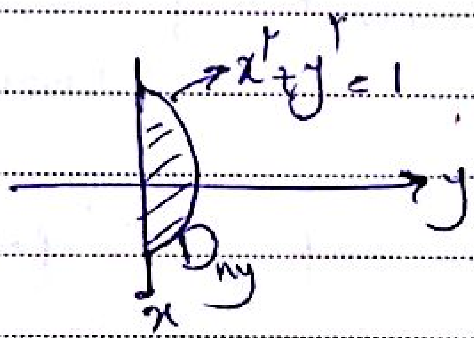
$$\Rightarrow \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2z + x + 2y) =$$

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{dr} = \oint_{C\cup C'} \vec{F}\cdot\vec{dr} - \int_{C'} \vec{F}\cdot\vec{dr} = \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma - \int_{C'} \vec{f}\cdot\vec{dr} =$$

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{2}}(2z + x + 2y)\, d\sigma - \int_{C'} f\cdot\vec{dr}$$

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{2}}(2z + x + 2y)\, d\sigma = \dots$$

$$S: \begin{cases} z = h(x,y) = y \\ (x,y) \in D_{xy} \end{cases}$$



$$C': \begin{cases} x = t \\ y = 0 \quad t\in[-1,1] \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \\ dz = 0 \end{cases}$$

$$\int_{C'} f\cdot dr = -\int_{C'} f\cdot dr = -\int_{-1}^{1} (2t \times 0 - 0 \cdot 2)\, dt$$