



جزوه باما

دانلود جزوات، نمونه سوالات
و پروپوزنت‌های دانشگاهی

Jozvebama.ir



تصمیم‌گیری چند معیاره

MCDM

Multi Criteria Decision Making

تصمیم‌گیری ← یک معیاره ← چند معیاره (MCDM) ← MADM: تعداد گزینه‌ها محدود و قابل شمارش است - Ranking: رتبه‌بندی کردن - تنها تعامل با تصمیم‌گیرنده در روش MADM این است که هر دیدار برایش چند راهیت دارد. مثال: رتبه‌بندی رشته دانشگاهی - رتبه‌بندی 11 تاپرژکت

← MADM: تعداد گزینه‌ها نامحدود (مانند انتخاب بهترین تصمیم در سال راهبری): * حاصل را باید طوری بدست آورد که چند هدف را با هم نشان کند. مثال: برنامه تولید یک شرکت را بتوانید به این صورت که سود max شود و میزان آلودگی در سانس کاهش بخورد و Min شود.

کاهش هزینه - افزایش سود: ترکیب هدف → این اهداف در واقع یکدیگر هستند } افزایش سود: هدف 1
کاهش هزینه: هدف 2

* سطح تعامل یعنی اینکه چقدر نظر فرد در فرآیند تصمیم‌گیری ما تأثیر دارد.

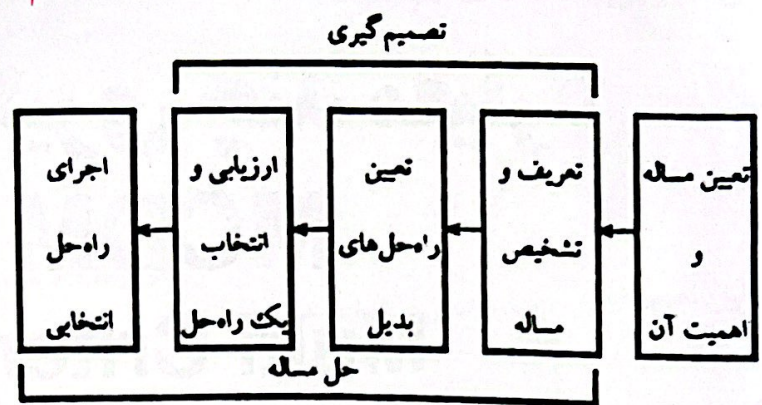
تصمیم‌گیری را می‌توان طریقه‌ی عمل و یا حرکت در مسیر خاصی تعریف کرد که با تامل و به صورت آگاهانه، از بین روش‌های مختلف برای نیل به یک هدف مطلوب، انتخاب شده است. بنابراین تصمیم‌گیری، مستلزم انتخاب راهی از میان راه‌هاست؛ یعنی اگر تنها یک راهکار وجود داشته باشد، دیگر تصمیم‌گیری معنا ندارد. هر چند تجزیه و تحلیل (که منجر به انتخاب راهی از میان راه‌ها می‌شود)، امری عقلایی است؛ ولی عوامل ناخودآگاه و همچنین جنبه‌های احساسی و عاطفی نیز در تصمیم‌گیری، نقش مهمی ایفا می‌کند.

به طور کلی، «تصمیم‌گیری» عبارتست از انتخاب یکی از راه‌حل‌های مختلف.

MADM: قیمت هزینه قطعات بدنه آمیزش ظاهر معیارهای کیفیتی
 * معیارها میسای بیسای نوازند مثلاً نیمی بر حسب پول و یکی مثل معروضت بر حسب km است.

پراید
 پژو 405

گزینه یا اکثریت
 selection/Ranking
 $A_i; i=1, 2, \dots, m$
 تعداد گزینه ها



شکل ۱.۱. فرآیند تصمیم گیری

- مشکلات:
- ۱- معیارهای مختلف دارای مقیاس های اندازه گیری مختلف هستند ← راه حل: به یکدگر کردن
 - ۲- بعضی از معیارها کیفیت هستند ← راه حل: کمی سازی
 - ۳- بعضی از معیارها مثبت و بعضی منفی هستند ← راه حل: در قالب امتیاز اکثریت یا تیره ماهیت + و - معیارها ظاهر شود.
 - ۴- وزن معیارها
- * ماهیت + یا - بودن معیارها به این بستگی دارد که برای آن تصمیم گزینه منفی است یا خیر.

روش اول: به معیاس سازی نرم اقلیدسی: مزیت این روش نسبت به روش ها دیگر این است که نسبت ϵ و فاصله را رعایت می کند یعنی اگر عددی دو برابر عدد دیگر باشد بعد از انجام نرم اقلیدسی باز هم آن فاصله عددی حفظ خواهد شد. عیب این روش این است که اثر + و - در نظر گرفته نمی شود.

اهمیت داده ها در تصمیم گیری

روش دوم: به معیاس سازی خطی: در این روش برای شاخص ϵ + و - روش برای شاخص های منفی یک روش و اگر ترکیب از شاخص ϵ + و - داریم از روش زیر استفاده می کنیم:
 اثر + و - در این روش در نظر گرفته می شود.

$$\frac{1}{a_{ij}} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\max \frac{1}{a_{ij}}} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\min a_{ij}}$$

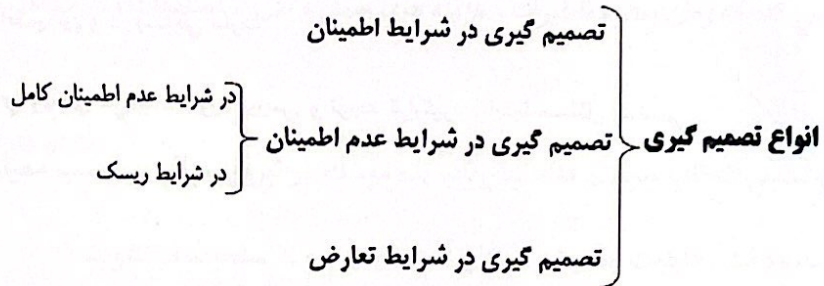
اهمیت مقدار داده ها

اهمیت کیفیت داده ها

روش سوم: به معیاس سازی فازی: در این روش همه راه شاخص + تبدیل می کنیم. در این روش نیز اثر + و - در نظر گرفته می شود و همچنین هر دو فرمول آن هر چه قدر بیشتر باشد بهتر است.

روش های جمع آوری داده ها

بر اساس میزان اطلاعات موجود



در شرایط اطمینان

از نوع مدل‌های ریاضی

- تجزیه و تحلیل هزینه
- برنامه ریزی خطی و مشتقات آن
- برنامه ریزی حمل و نقل و شبکه ها
- برنامه ریزی غیر خطی
- مواردی از برنامه ریزی دینامیک

در حالت عدم اطمینان کامل

از نوع مدل‌های ابتکاری

- ماتریس تصمیم گیری
- حداقل حداکثرما
- حداکثر حداقل ما
- حداکثر حداکثرما

در شرایط عدم اطمینان

در حالت ریسک

از نوع مدل‌های احتمالی

- E.V بدون استفاده از نمونه گیری
- اصبه بیز با استفاده از نمونه گیری
- منحنی توزیع با استفاده از منحنی های آماری

از نوع مدل‌های ریاضی آکسیروتری

- تجزیه و تحلیل هزینه
- مدل‌های هیبه سازی
- برنامه ریزی دینامیک

از نوع مدل‌های ایزاب، ریسک

- آمالیز حرکت خنثا
- تجزیه و تحلیل قنط خنثا و اثرات نااهی از آن

کاربردهای تصمیم‌گیری چندمعیاره در زندگی شخصی و کاری:

- اتومبیلی که يك فرد در نظر دارد خریداري كند ، به معيارهائي مانند قيمت ، مدل ، ايمني ، راحتی ، ميزان مصرف سوخت ، قابليت اطمینان و ... بستگی دارد.
- درانتخاب همسر نیز معيارهائي زيادي مي‌تواند مورد بررسی و توجه قرارگیرد ، اينها مسائل شخصي بودند.

کاربردهای تصمیم‌گیری چندمعیاره در زندگی شخصی و کاری:

- در زمینه مسائل سازمانی به عنوان مثال درانتخاب استراتژی يك سازمان معيارهائي از قبيل ميزان درآمد سازمان طی يك دوره ، قيمت سهام سازمان ، سهم بازار ، تصوير سازمان در جامعه و ... مي‌توانند مهم باشند.
- در زمینه مسائل عمومي يك جامعه ، به عنوان مثال برنامه توسعه منابع آبي مي‌تواند بر اساس معيارهائي مانند هزینه ، احتمال كمبود آب ، انرژی (ميزان استفاده مجدد از آن) ، استفاده از جنگل و زمین ، كيفيت آب ، حفاظت از مواد غذایی و ... صورت گیرد ، يعني اين موارد به عنوان معيارها مد نظر قرار گیرند.

کاربردهای تصمیم‌گیری چندمعیاره در زندگی شخصی و کاری:

✿ در زمینه مسائل دولتی، به عنوان مثال بخش حمل و نقل کشوری باید سیستم حمل و نقل را به گونه‌ای طراحی کند که زمان سفر، تاخیرات، هزینه‌های حمل و نقل، تصادفات و... حداقل شود.

✿ در صنایع نظامی انتخاب سیستم مناسب پرتاب یک موشک در نیروی هوایی بر حسب معیارهایی نظیر انتخاب سرعت، دقت، قابلیت اطمینان، میزان آسیب‌پذیری و... سنجیده می‌شود.

روشهای تصمیم‌گیری چند معیاره به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:

- ✿ مدل‌های تصمیم‌گیری چند هدفه (MODM)
- ✿ مدل‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه (MADM)


Multiple Objective Decision Making (MODM)
Multiple Attributive Decision Making (MADM)

تفاوت این مدلها در چیست؟

- در MODM معیارها و اولویت های آنها مشخص می باشد ولی در MADM چند آلترناتیو داریم و چند معیار خواهیم داشت.
- در MODM به دنبال طراحی جواب کارا هستیم ولی در MADM به دنبال انتخاب جواب برتر نسبت به سایر گزینه ها هستیم.

مقایسه MODM, MADM

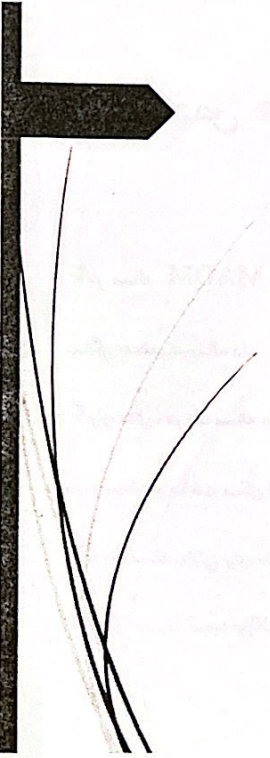
موارد متفاوت	MADM	MODM
اهداف	صریح بیان شده اند	ضمنی بیان شده اند (به طور ضعیف بیان شده اند)
شاخصها	صریح بیان شده اند	به طور ضمنی بیان شده اند
محدودیتها	غیرمشخص در داخل معیارها گنجانده شده اند	کاملا مشخص
گزینه ها	تعداد محدود و مشخص	تعداد نامحدود و در نتیجه يك فرآیند معلوم می شود
تعامل با تصمیم گیرنده	کم	زیاد



مدلهای تصمیم‌گیری چند شاخصه (MADM)

Multiple Attributive Decision Making

۱



❖ در این مدلها ، انتخاب يك گزینه از بین گزینه‌های موجود مد نظر است.

❖ در يك تعريف كلي تصمیم‌گیری چند شاخصه به تصمیمات خاصی (از نوع ترجیحی) مانند ارزیابی ،

اولویت‌گذاری و یا انتخاب از بین گزینه‌های موجود (که گاه باید بین چند شاخص متضاد انجام شود)

اطلاق می‌گردد.

❖ انواع مختلفی از مسائل MADM وجود دارند که تمامی آنها در خصوصیات زیر مشترکند :

۱- گزینه ها

❖ در این مسائل گزینه های مشخص باید مورد بررسی قرار گرفته و در مورد آنها اولویت گذاری ، انتخاب و یا رتبه بندی صورت گیرد.

❖ تعداد گزینه های مورد نظر می تواند محدود و یا خیلی زیاد باشند. برای مثال ، یک تولید کننده اتومبیل ممکن است فقط چند گزینه محدود برای انتخاب محل تولید اتومبیل داشته باشد ، ولی یک دانشگاه درجه یک انتخاب دانشجو خود را از بین هزاران متقاضی می تواند انجام دهد.

❖ گاهی بجای گزینه مترادف های آن مانند انتخاب ، استراتژی ، اقدام ، کاندیدا و غیره بکار می رود

۲- شاخص ها

❖ هر مساله MADM چندین شاخص دارد که تصمیم گیرنده ، باید در مساله آنها را کاملاً مشخص کند و تعداد شاخصها بستگی به ماهیت مساله دارد.

❖ برای مثال ، در یک مساله خرید اتومبیل اگر قرار به ارزیابی چند اتومبیل باشد شاخصهای مختلف قیمت ، میزان سوخت مصرفی ، نحوه ضمانت و ساخت ممکن است مد نظر باشند .

❖ در یک مساله جایابی برای طرح کارخانه 100 شاخص و یا بیشتر می توانند مد نظر باشند.

❖ واژه شاخص به صورت واژگان دیگری از قبیل اهداف یا معیارها قابل بیان است.

۳- واحدهای بی مقیاس

✱ هر شاخص نسبت به شاخص دیگر دارای مقیاس اندازه‌گیری متفاوتی است. لذا جهت معنا دار شدن محاسبات و نتایج از طریق روشهای علمی اقدام به بی‌مقیاس کردن داده‌ها می‌شود به گونه‌ای که اهمیت نسبی داده‌ها حفظ گردد.

۴- وزن شاخص‌ها

تمامی روشهای MADM مستلزم وجود اطلاعاتی هستند که بر اساس اهمیت نسبی هر شاخص بدست آمده باشند.
این اطلاعات معمولاً دارای مقیاس ترتیبی یا اصلی هستند.
وزنهای مربوط به شاخصها می‌تواند مستقیماً توسط تصمیم‌گیرنده و یا به وسیله روشهای علمی موجود به معیارها تخصیص داده شود. این وزنهای اهمیت نسبی هر شاخص را بیان می‌کنند.

۵- ماتریس تصمیم گیری

جدول ۱.۱. ماتریس تصمیم گیری چند شاخصه

گزینه‌ها	شاخص‌ها				
	C_1	...	C_j	...	C_n
A_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...
A_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...
A_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

می‌توان گفت A_i نشان‌دهنده‌ی گزینه i ام، C_j نشان‌دهنده‌ی شاخص j ام و a_{ij} نشان‌دهنده ارزش گزینه i ام، از نظر شاخص j ام است.

مثال:

فرض کنید یک دانش‌آموزی دانشگاهی، می‌خواهد از بین ۴ شغل، با توجه به ۵ شاخص، یکی را انتخاب کند. «شاخص‌ها» عبارتند از: درآمد، وجهه‌ی اجتماعی، سختی کار، مسافت، و امنیت اجتماعی (درآمد، بر حسب ده هزار تومان و مسافت، بر حسب کیلومتر است). ارزش هر شغل از نظر هر شاخص، در جدول ۱.۲ آمده است. در ماتریس تصمیم (جدول ۱.۲)، دیده می‌شود که از پنج شاخص موجود (C_1 و C_2 و C_3 و C_4 و C_5) کمی بوده و بقیه‌ی آن‌ها، کیفی است.

$A_i \backslash C_j$	درآمد	وجهه‌ی اجتماعی	سختی	مسافت	امنیت
A_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۱۵	زیاد	نسبتاً زیاد	۱۰	زیاد
A_2	۱۲	متوسط	متوسط	۲۰	خیلی زیاد
A_3	۲۰	خیلی زیاد	زیاد	۳۰	متوسط
A_4	۳۰	کم	خیلی زیاد	۱	کم

نکته مهم:

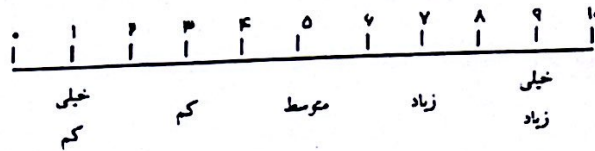
به طور معمول، شاخص‌ها در مدل‌های $MADM$ از مقیاس‌های گوناگون بوده و در بسیاری موارد در تعارض با یکدیگرند. در بیشتر مواقع، گزینه‌ای که بهینه باشد (بهترین هر شاخص را تامین کند)، وجود ندارد. افزون بر این، برخی شاخص‌ها جنبه‌ی مثبت (C_j^+) و برخی جنبه‌ی منفی (C_j^-) دارند. بنابراین «گزینه‌ی بهینه» در یک مدل $MADM$ ، یک گزینه‌ی ذهنی A خواهد بود که بهترین ارزش از هر شاخص را تامین کند. در بیشتر مواقع، دسترسی به A غیرممکن است؛ اما انتخاب مناسب‌ترین گزینه به طور نسبی امکان‌پذیر خواهد بود.

تبدیل شاخص‌های کیفی به کمی

- همان‌طور که گفتیم، می‌توان راهکارهای انتخابی را توسط دو نوع شاخص توصیف کرد:
- ۱- شاخص‌های کمی (قیمت، درآمد، مسافت، و...)
 - ۲- شاخص‌های کیفی (وجهی اجتماعی، سختی، امنیت، زیبایی، و...).

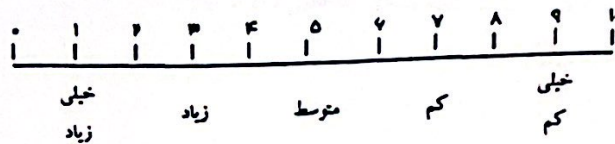
می‌توان با روش‌های مختلفی، شاخص‌های کیفی را به شاخص‌های کمی تبدیل کرد. یک روش عمومی در اندازه‌گیری یک شاخص کیفی با مقیاس فاصله‌ای، «مقیاس دوقطبی فاصله‌ای» است که به گونه‌ی زیر است:

تبدیل شاخص‌های کیفی به کمی



این اندازه‌گیری، بر اساس یک مقیاس یازده نقطه‌ای است که صفر، کمترین ارزش و ۱۰، بیشترین ارزش را به خود اختصاص می‌دهد. این اندازه‌گیری، برای شاخص‌هایی با جنبه مثبت مانند درآمد است. هر چه درآمد بیشتر باشد، میزان مطلوبیت آن نیز افزایش می‌یابد. باید توجه داشت که ارزش‌هایی مثل ۲، ۴، ۶، و ۸ ارزش‌های واسطه بین دو ارزش دیگرند. برای نمونه به نسبتاً زیاد، مقدار ۶ نسبت داده می‌شود.

این نوع اندازه‌گیری، برای شاخص‌هایی با جنبه منفی نیز به کار گرفته می‌شود، با این تفاوت که این مقیاس یازده نقطه‌ای، به گونه‌ی زیر تغییر شکل می‌دهد.



تبدیل شاخص‌های کیفی به کمی

این نوع اندازه‌گیری، با سه فرض زیر انجام می‌شود:

۱. فاصله‌ی بین دو ارزش متوالی (برای نمونه: فاصله بین خیلی کم و کم، یا فاصله بین زیاد و خیلی زیاد) یکسان است.
۲. فرض بر این است که امتیاز ۹، سه برابر، بیشتر از امتیاز ۳ است.
۳. ترکیب ارزش‌ها (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم)، برای شاخص‌های مختلف، مجاز است؛ زیرا اختلاف بین هر دو ارزش، برای هر شاخص، یکسان است.

این سه فرض، مقیاس ترتیبی را به فاصله‌ای تبدیل می‌کند.

مثال:

$A_i \backslash C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۱۵	زیاد	نسبتاً زیاد	۱۰	زیاد
A_2	۱۲	متوسط	متوسط	۳	خیلی زیاد
A_3	۲۰	خیلی زیاد	زیاد	۳۰	متوسط
A_4	۳۰	کم	خیلی زیاد	۱	کم



شاخص‌ها گزینه‌ها	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۱۵	۷	۴	۱۰	۷
A_2	۱۲	۵	۵	۳	۹
A_3	۲۰	۹	۳	۳۰	۵
A_4	۳۰	۳	۱	۱	۳

بی‌مقیاس سازی

نکته‌ی دیگر در شاخص‌های یک ماتریس تصمیم‌گیری، وجود شاخص‌های مثبت و منفی با هم، در یک ماتریس است. شاخص‌های کمتی، دارای یک بُعد خاص است، مانند ریال، کیلوگرم، متر، و ... برای مقایسه‌ی مقیاس‌ها، باید بی‌مقیاس‌سازی را به کار برد که با آن، مقادیر شاخص‌های مختلف، بدون بُعد شده و جمع‌پذیر می‌شوند. راه‌های مختلفی برای بی‌مقیاس‌سازی وجود دارد که برخی از آنها عبارتند از:

الف) بی‌مقیاس‌سازی نورم: در این نوع بی‌مقیاس‌سازی، هر عنصر ماتریس تصمیم‌گیری را بر مجذور مجموع مربعات عناصر هر ستون، تقسیم می‌کنیم؛ یعنی:

$$n_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2}}$$

که n_{ij} مقدار بی‌مقیاس‌شده‌ی گزینه i از نظر شاخص j است.

مثال (بی مقیاس سازی با استفاده از روش نورم اقلیدسی)

شاخصها گزینه‌ها	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	10	7	4	10	7	0.1347	0.0947	0.0540	0.1310	0.0947
A_2	12	5	5	8	9	0.1594	0.0690	0.0700	0.1094	0.1108
A_3	8	9	8	8	5	0.1049	0.1108	0.1040	0.1049	0.0690
A_4	8	8	1	1	8	0.1049	0.1049	0.0140	0.0140	0.1049
$\sqrt{\sum_{j=1}^5 a_{ij}^2}$	14.83	12.84	7.17	8.78	12.84					

$$\sqrt{\sum_{j=1}^5 a_{i1}^2} = \sqrt{10^2 + 12^2 + 8^2 + 8^2} = 14.83$$

$$n_{11} = \frac{10}{14.83} = 0.6747, \quad n_{12} = \frac{12}{14.83} = 0.8094$$

بی مقیاس سازی

ب) بی مقیاس سازی خطی. اگر تمامی شاخص‌ها، جنبه‌ی مثبت داشته باشند، هر مقدار را به بزرگ‌ترین مقدار ستون نایم، تقسیم می‌کنیم. یعنی:

$$n_{ij} = \frac{a_{ij}}{\max a_{ij}}$$

چنانچه تمامی شاخص‌ها، جنبه‌ی منفی داشته باشند، به گونه زیر عمل می‌کنیم:

$$n_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{\max |a_{ij}|}$$

بد مطربیت به سمت + کرن نرنیزه لادت.

بی مقیاس سازی

نکته مهم در بی مقیاس سازی:

البته برخی از ماتریس‌ها، هم شاخص مثبت و هم شاخص منفی دارند (مانند مساله‌ی ارایه شده در مثال ۱-۱). در این گونه موارد می‌توان شاخص منفی را با معکوس کردن آن به جنبه‌ی مثبت تبدیل کرد؛ زیرا نمی‌توان به طور هم‌زمان، از دو فرمول پیش استفاده کرد/اصغر پور، ۱۳۷۶. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$n_j = \frac{\frac{1}{a_{ij}}}{\max_i \left(\frac{1}{a_{ij}} \right)} = \frac{\min_i a_{ij}}{a_{ij}} \rightarrow \text{تنظیم برای منفی}$$

تبدیل به مایار + می‌شود

مقدار بدست آمده از هر یک از فرمول‌های بالا، مقداری بین صفر و یک می‌شود. این مقیاس خطی است و کلیه‌ی نتایج را به یک نسبت خطی می‌کند. بنابراین، وضعیت شاخص‌ها و نتایج آن‌ها، یکسان باقی می‌ماند.

مثال (بی مقیاس سازی خطی)

شاخص‌ها گزینه‌ها	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۱۵	۷	۴	۱۰	۷
A_2	۱۲	۵	۵	۳	۹
A_3	۲۰	۹	۳	۳	۵
A_4	۳۰	۳	۱	۱	۳

$$r_{12} = \frac{15}{12} = 0.500, r_{13} = \frac{15}{20} = 0.400$$

$$r_{14} = \frac{15}{30} = 0.477, r_{15} = \frac{15}{30} = 1$$

مقادیر ستون چهارم هم که شاخص منفی است، به صورت زیر محاسبه شده است:

$$r_{23} = \frac{1}{10} = 0.100, r_{24} = \frac{1}{3} = 0.333$$

$$r_{25} = \frac{1}{9} = 0.111, r_{34} = \frac{1}{1} = 1$$

A_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	0.1500	0.1778	0.18	0.1000	0.1778
A_2	0.1400	0.1556	1	0.3333	1
A_3	0.4444	1	0.33	0.3333	0.5556
A_4	1	0.3333	0.33	1	0.3333

نکته: گرچه شاخص چهارم (مسافت) منفی بود ولی چون روش بی مقیاس سازی آن نسبت به شاخص‌های مثبت متفاوت بود، اکنون به شاخص مثبتی (مانند نزدیکی) تبدیل شده است.

بی مقیاس سازی

بی مقیاس سازی لازمی. فرمول بی مقیاس سازی فازی برای شاخص های مثبت و منفی به گونه ای زیر است.

$$n_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^{Min}}{a_j^{Max} - a_j^{Min}} \quad \text{شاخص مثبت}$$

$$n_{ij} = \frac{a_j^{Max} - a_{ij}}{a_j^{Max} - a_j^{Min}} \quad \text{شاخص منفی}$$

برای نمونه، برای شاخص اول (درآمد) که مثبت است:

$$n_{11} = \frac{15-12}{30-12} = 0.167, \quad n_{12} = \frac{12-12}{30-12} = 0$$

$$n_{13} = \frac{20-12}{30-12} = 0.667, \quad n_{14} = \frac{30-12}{30-12} = 1$$

شاخص ها گزینه ها	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	15	7	4	10	7
A_2	12	5	5	3	9
A_3	20	9	3	30	5
A_4	30	3	1	1	3

تصمیم گیری چند معیاره

MCDM

Multi Criteria Decision Making

دزن شاخص ها
تفاوت ذهنی
آنتروپی شانون
معیارات زوجی (برطرد ویژه)

برای محاسبه پراگندگی در روش آنتروپی شانون نمی توان از واریانس و انحراف معیار استفاده کرد چون این دو پراگندگی حول میانگین را به ما می دهد اما در این روش پراگندگی مطلق داده به نسبت به هم می خواهیم.

ارزیابی اوزان شاخص ها

الف) روش آنتروپی

ب) روش لیمپ^۱

ج) روش کمترین مجذورات موزون

د) روش بردار ویژه.

روش اول تعیین وزن معیارها:

روش آنترویی شانون

۱۸

روش آنترویی

«آنترویی»^۱ یک، مفهوم بسیار با اهمیت در علوم اجتماعی، فیزیک و تئوری اطلاعات است. وقتی که داده‌های یک ماتریس تصمیم‌گیری، به طور کامل مشخص شده باشد، می‌توان روش آنترویی را برای ارزیابی وزن‌ها به کار برد. ایده‌ی این روش این است که هر چه پراکندگی در مقادیر یک شاخص بیشتر باشد، آن شاخص از اهمیت بیشتری برخوردار است.

گزینه‌ها	شاخص‌ها	
	قیمت (میلیون تومان)	ضمانت (ماه)
A	۱۰۱	۱۰
B	۱۰۰	۱۵
C	۱۰۲	۲۰

با توجه به داده‌ها کدام شاخص اهمیت بیشتری در خرید خواهد داشت؟

روشن آنتروپی و هر قدر فرولین بیداریک پیام سیتر باند، محتوی اطلاعات آن کمتر است.

یادداشتن اطلاعات، تعادل بین احتمال انتاب راه ها بر هم می خورد.

صند نلته ۹۰٪ از برا کندگی داده ها متوجه می شویم، کرام معیار اهمیت بتری دارد.

چون بر الیزگی مطلق داده ها را می خواهیم، پس از انفراف همیار

که بر الیزگی را حول میانگین حساب می کند، انعاده نمی کنیم.

مفهوم آنتروپی در تئوری اطلاعات

این حالت ها را در نظر بگیرید:

مثال ۱:

A. سلام. از دیدارتان بسیار خوشحال شدم. متاسفم که دیر رسیدم. حال شما خوب است؟
B. یکی از این پاسخ ها را می دهد:

۱- سلام. متشکرم ۲- آتش سوری شده. فرار کنیم! ۳- ساعت چند است؟ فکر کنم ناهار تمام شد.

۴- ببخشید اسم شما را یادم رفته. ۵- ببخشید بودا هست پایتخت کجاست؟ مجارستان یا لهستان ۶- خالم خیلی بد است.

فرض معقولی است اگر بگوییم در یک مکالمه دوستانه احتمال مورد ۱، ۹۰٪ و احتمال موارد ۲-۶ هر کدام ۲٪ است. یعنی مسئله به لحاظ ریاضی مشابه مثال تاس ریختن با احتمال ۹۰٪ برای ۶ و ۲٪ برای دیگر ارقام است.

مثال ۲:

A می پرسد: دیروز می خواستم به شما سر بزیم اما شماره پلاک منزلتان را فراموش کرده بودم و ۶ شماره در کوجه شما بود و نتوانستم تصمیم بگیرم کدام رنگ را بزیم. ممکن است شماره پلاکتان را بگوید؟

B یکی از این پاسخ ها را می دهد:

۱) پلاک ۱۰۱ است. ۲) ۱۰۲ است. ۳) ۱۰۳ است. ۴) ۱۰۴ است. ۵) ۱۰۵ است. ۶) ۱۰۶ است.

در حالت کلی معقول است فرض کنیم احتمال هر یک از این موارد مساوی و معادل است. به عبارت دیگر مسأله به لحاظ ریاضی مشابه تاس سالم شش وجهی است. می دانیم که آنتروپی در مثال دو بیشتر از مثال یک است. این مطلب ناشی از این است که در مثال یک پاسخ مخاطب ما با احتمال ۹۰٪ قابل پیشگویی است و حاوی اطلاعات جدید زیادی نیست. در حالی در مثال دو به طور کلی هیچ تصویری از اینکه پاسخ مخاطب ما چه خواهد بود نداریم و جواب او حاوی اطلاعات جدید قابل توجهی است. بنابراین آنتروپی معیاری از دشواری حدس زدن جواب است.

این مطلب به وضوح بیان می کند که وقتی "نظم" خاصی بر فرایند ما حاکم می شود، (در اینجا این نظم معادل واضح بودن پاسخ به احوالپرسی است) آنتروپی پایین می آید. بیشترین آنتروپی زمانی حاصل می شود که احتمال هر N حالت مساوی باشد یعنی فرایند کاملاً تصادفی صورت بگیرد. این مطلب قضیه ای از ترمودینامیک به خاطر می آورد که بیشترین آنتروپی ترمودینامیکی متعلق به حالتی است که همگن ترین توزیع احتمال را دارد.

* همینان در مثال ۱ بیشتر است و آنتروپی یا عدم همینان در مثال ۲ بیشتر است (تعدادی بودن بیشتر است) ← هر چه آنتروپی بیشتر باشد آن شاعرین برتر است.

* هر چه شاعرین بیشتر باشد آنتروپی هم تر دیکتر باشد، آنتروپی بیشتر است.

آنترپی در نظریه‌ی اطلاعات، معیار عدم اطمینان است که با توزیع احتمال مشخص p_i بیان می‌شود. اندازه‌گیری این عدم اطمینان (H)، توسط «شانون» به گونه‌ی زیر بیان شده است:

$$E_i = S(p_1, p_2, \dots, p_m) = -k \sum_{i=1}^m [p_i \times \ln p_i]$$

که k مقداری ثابت است و برای این که E_i بین صفر و یک باشد، اعمال می‌شود. E از توزیع احتمال p_i بر اساس مکانیزم آماری، محاسبه شده و مقدار آن در هنگام تساوی p_i ها با یکدیگر (یعنی $p_i = \frac{1}{m}$)، بیشترین مقدار خواهد بود که این گونه محاسبه می‌شود:

$$k \sum_{i=1}^m p_i \times \ln p_i = k \left\{ \frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} \right\} = k \left\{ \ln \frac{1}{m} \left(\frac{m}{m} \right) \right\} = k \times \ln \frac{1}{m}$$

k به عنوان مقدار ثابت، از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$k = \frac{1}{\ln(m)}$$

می‌توان برای به دست آوردن اوزان شاخص‌ها، گام‌های زیر را طی کرد:

گام ۱. محاسبه‌ی p_{ij}

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^m a_{ij}}$$

گام ۲. محاسبه‌ی مقدار E_j

$$E_j = -k \sum_{i=1}^m [p_{ij} \ln p_{ij}]$$

گام ۳. محاسبه‌ی مقدار عدم اطمینان d_j

$$d_j = 1 - E_j$$

گام ۴. محاسبه‌ی اوزان w_j

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^n d_j}$$

دقت کنید که در روش آنترپی، مثبت یا منفی بودن شاخص‌ها، تاثیری در روش محاسبه‌ی وزن‌ها نخواهد داشت.

نکته ای برای گام ۳:

الف) پراکندگی بیشتر به معنای وزن بیشتر معیار می باشد. در این حالت برای تعیین وزن معیار نام،

$$d_j = 1 - E_j, \quad w_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^n d_j}$$

به ترتیب زیر عمل می نمایم:

ب) پراکندگی کمتر، به معنای وزن بیشتر می باشد. در این حالت برای محاسبه وزن معیار نام به صورت زیر

$$w_j = \frac{E_j}{\sum_{j=1}^n E_j}$$

آنتروپی $0 \leq E_j \leq 1$

آنتروپی زمانی بیشتر مقدار کم عمل است را می گویند که احتمال عدم انتخاب با هم برابر باشند.

$$E_j = -k \sum_{i=1}^m p_i \ln p_i$$

$$1 = -k \left(\frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} \right) \xrightarrow{\text{دانش}} \ln \frac{1}{m} = \ln 1 - \ln m$$

$$1 = k (\ln m) \rightarrow k = \frac{1}{\ln m}$$

مقدار عمیق الحیاتی: d_j

$$d_j = 1 - E_j$$

آنتروپی

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^n d_j} \quad \text{حاسب وزن (w)}$$

نکته مهم:

اگر تصمیم گیرنده از پیش، وزن ذهنی (قضاوتی) مشخصی مانند λ_j را برای شاخص z در نظر گرفته باشد، در این هنگام وزن تعدیل شده (w'_j) که ترکیبی از وزن های قضاوتی و آنتروپی است، به گونه زیر محاسبه می شود (توجه: اگر اوزان ذهنی (قضاوتی) موجود نباشد، گام ۵ منقضی است).

$$w'_j = \frac{\lambda_j w_j}{\sum_{j=1}^n \lambda_j w_j}$$

گام ۵. محاسبه ی اوزان تعدیل شده (w'_j)

مثال (روش آنتروپی)

A _i \ C _j	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅
A ₁	۱۵	زیاد	نسبتاً زیاد	۱۰	زیاد
A ₂	۱۲	متوسط	متوسط	۳	خیلی زیاد
A ₃	۲۰	خیلی زیاد	زیاد	۳۰	متوسط
A ₄	۳۰	کم	خیلی زیاد	۱	کم

A _i \ C _j	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅
A ₁	۱۵	۷	۴	۱۰	۷
A ₂	۱۲	۵	۵	۳	۹
A ₃	۲۰	۹	۳	۳۰	۵
A ₄	۳۰	۳	۱	۱	۳
Σ	۷۷	۲۴	۱۳	۴۴	۲۴

$$E_i = - \frac{1}{\ln 4} \sum_{j=1}^4 p_{ij} \ln p_{ij}$$

$$E_1 = - \frac{1}{\ln 4} [0.195 \ln 0.195 + 0.156 \ln 0.156 + 0.26 \ln 0.26 + 0.389 \ln 0.389] = 0.956$$

همه بول در این گام، با فرمول زیر، مقدار P_{ij} را برای همه‌ی شاخص‌ها و گزینه‌ها بدست می‌آوریم.

$$P_{11} = \frac{a_{11}}{\sum_{j=1}^4 a_{1j}} \Rightarrow P_{11} = \frac{15}{77} = 0.195, P_{12} = \frac{12}{77} = 0.156$$

$$P_{13} = \frac{20}{77} = 0.26, P_{14} = \frac{30}{77} = 0.389$$

آنتروپی ↓ وزن شاخص ↑ ← شاخص مهم‌تر

A _i \ C _j	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅
A ₁	0.195	0.156	0.26	0.389	0.195
A ₂	0.156	0.208	0.385	0.148	0.375
A ₃	0.26	0.375	0.231	0.782	0.208
A ₄	0.389	0.125	0.077	0.023	0.125

• اگر طبقه شخصی فرد را نبردانسته باشیم باید طبقه شخصی فرد و وزن شاخص را در هم ضرب کنیم (مجموعی کنیم) زیرا کلمه «و» بین ارزش از نظر شخص تقسیم گیرنده «و» وزن شاخص از نظر آنتروپی شان را نشان دهنده ضرب است نه جمع.

گام دوم در این گام، با فرمول $E_j = -k \sum [p_{ij} \ln p_{ij}]$ مقدار اطمینان را

بدست می‌آوریم.

A _i \ C _j	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅
A ₁	0.195	0.156	0.26	0.389	0.195
A ₂	0.156	0.208	0.385	0.148	0.375
A ₃	0.26	0.375	0.231	0.782	0.208
A ₄	0.389	0.125	0.077	0.023	0.125

$$E_1 = -0.721 [0.195 \ln(0.195) + 0.156 \ln(0.156) + 0.26 \ln(0.26) + 0.389 \ln(0.389)] = 0.956$$

$$E_2 = -0.721 [0.156 \ln(0.156) + 0.208 \ln(0.208) + 0.375 \ln(0.375) + 0.148 \ln(0.148)] = 0.947$$

$$E_3 = -0.721 [0.26 \ln(0.26) + 0.375 \ln(0.375) + 0.231 \ln(0.231) + 0.782 \ln(0.782) + 0.208 \ln(0.208)] = 0.913$$

$$E_4 = -0.721 [0.389 \ln(0.389) + 0.125 \ln(0.125) + 0.077 \ln(0.077) + 0.023 \ln(0.023) + 0.125 \ln(0.125)] = 0.625$$

$$E_5 = -0.721 [0.195 \ln(0.195) + 0.375 \ln(0.375) + 0.208 \ln(0.208) + 0.125 \ln(0.125)] = 0.947$$

E ₁	E ₂	E ₃	E ₄	E ₅
0.956	0.947	0.913	0.625	0.947

همان‌طور که گفتیم، K به این ترتیب به دست می‌آید: $k = \frac{1}{\ln(m)} = \frac{1}{\ln(4)} = 0.721$

گام سوم:

E_1	E_p	E_m	E_f	E_o
۰/۹۵۷	۰/۹۴۷	۰/۹۱۳	۰/۷۶۵	۰/۹۴۷

 \rightarrow

d_1	d_1	d_p	d_m	d_f	d_o	$\sum d_i$
$1-E_j$	۰/۰۴۴	۰/۰۵۳	۰/۰۸۷	۰/۳۷۵	۰/۰۵۳	۰/۷۱۲

گام چهارم:

$$w_1 = \frac{d_1}{\sum d_i} \Rightarrow w_1 = \frac{0.044}{0.712} = 0.072 \quad w_p = \frac{0.053}{0.712} = 0.087$$

$$w_m = \frac{0.087}{0.712} = 0.142 \quad w_f = \frac{0.375}{0.712} = 0.513 \quad w_o = \frac{0.053}{0.712} = 0.087$$

w_1	w_p	w_m	w_f	w_o
۰/۰۷۲	۰/۰۸۷	۰/۱۴۲	۰/۵۱۳	۰/۰۸۷

۲۳

توجه داشته باشید که $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ است. اگر تصمیم گیرنده هیچ اوزان قضاوتی (ذهنی) ارایه نکرده باشد همین اوزان را به عنوان اوزان شاخص‌ها در نظر می‌گیریم؛ اما اگر از سوی فرد تصمیم گیرنده اوزانی پیشنهاد شده باشد، به گام بعدی می‌رویم. گام پنجم در این قسمت، اوزان تعدیل شده را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید که تصمیم گیرنده به شاخص‌ها، وزن‌های ۰/۱، ۰/۲، ۰/۱۵، ۰/۳، و ۰/۲۵ را به ترتیب برای شاخص اول تا پنجم نسبت داده باشد. در این حالت، نخست $\sum \lambda_j w_j$ را به دست آوریم سپس اوزان تعدیل شده را محاسبه می‌کنیم (جدول ۱۲-۱).

برای نمونه، w'_1 و w'_p این گونه محاسبه شده‌اند:

$$w'_1 = \frac{\lambda_1 w_1}{\sum \lambda_j w_j} = \frac{0.007}{0.151} = 0.048 \quad w'_p = \frac{\lambda_p w_p}{\sum \lambda_j w_j} = \frac{0.017}{0.151} = 0.113$$

جدول ۱۲-۱. نتایج گام پنجم

	۱	۲	۳	۴	۵	جمع
λ_j	۰/۱	۰/۲	۰/۱۵	۰/۳	۰/۲۵	۱
w_j	۰/۰۷۲	۰/۰۸۷	۰/۱۴۲	۰/۵۱۳	۰/۰۸۷	۱
$\lambda_j w_j$	۰/۰۰۷	۰/۰۱۷	۰/۰۲۱	۰/۱۵۴	۰/۰۲۲	۰/۱۵۱
w'_j	۰/۰۴۸	۰/۰۵۸	۰/۰۸۴	۰/۷۳۳	۰/۰۸۷	۱

$$w_1 = 3w_2 \leftarrow \frac{w_1}{w_2} = a_{12} = 3$$

$$\frac{w_2}{w_3} = 2 \rightarrow w_2 = 2w_3$$

مثال پارس صفحه

$$w_1 = 4w_3 \leftarrow \frac{w_1}{w_3} = 4$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 \rightarrow 3w_2 + w_2 + \frac{1}{2}w_2 = 1$$

$$\rightarrow w_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$w_1 = 3 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$w_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$$

روش دوم تعیین وزن معیارها:

روش مقایسات زوجی (بردار ویژه)

- * قطر اصلی 1 می شود و محضین خارج از قطر اصلی بالای قطر نسبت به پایین قطر اصلی مکتوب می شود.
- * در اکثر موارد شایان از ماتریس تصمیم گیری استفاده می شود و در روش مقایسات زوجی اما از ماتریس تصمیم گیری استفاده نمی شود.
- * اولین کار در ماتریس مقایسات زوجی ماسازگاری یا ناسازگاری بودن ماتریس است.

مثلاً $\frac{a_{12}}{a_{21}} \quad \frac{a_{1n}}{a_{n1}} \quad \frac{a_{2n}}{a_{n2}}$

در صورتیکه این باید 1 باشد وگرنه ناسازگار است

$$a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj} ; \forall k$$

ماتریس مقایسات زوجی

ماتریس مقایسه زوجی

محاسبه وزن ها

	w_1	w_2	w_n
w_1	1	a_{12}	a_{1n}
w_2	a_{21}	1	a_{2n}
.....
w_n	a_{n1}	a_{n2}	1

	w_1	w_2	w_n
w_1	1	$\frac{w_1}{w_2}$	$\frac{w_1}{w_n}$
w_2	$\frac{w_2}{w_1}$	1	$\frac{w_2}{w_n}$
.....
w_n	$\frac{w_n}{w_1}$	$\frac{w_n}{w_2}$	1

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \quad a_{ji} = \frac{w_j}{w_i}, \quad a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj} \Rightarrow \frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i}{w_k} \times \frac{w_k}{w_j}, \quad \forall k$$

* نسبت درجه اهمیت وزن شاخص باید با هم برابر باشد که تقسیم کننده گفته
برابر باشد.

تشکیل ماتریس مقایسه زوجی

درجه اهمیت	تعریف	شرح
۱	اهمیت یکسان	دو عنصر، اهمیت یکسانی داشته باشند.
۳	نسبتاً برتر	یک عنصر نسبت به عنصر دیگر، نسبتاً برتر باشد.
۵	برتری زیاد	یک عنصر نسبت به عنصر دیگر، زیاد برتر باشد.
۷	برتری بسیار زیاد	یک عنصر به عنصر دیگر، بسیار زیاد برتر باشد.
۹	برتری فوق العاده زیاد	یک عنصر به عنصر دیگر، فوق العاده زیاد برتر باشد.

ارزش‌های یباین در قضاوت‌ها ۲،۴،۶،۸

هنگامی که عنصر i با j مقایسه می‌شود، یکی از اعداد بالا به آن اختصاص می‌یابد. در مقایسه‌ی عنصر j با i ، مقدار

$$x_{ji} = \frac{1}{x_{ij}}$$

شرکتی می‌خواهد ماشینی بخرد که سازندگان آن سه کشور روسیه (R)، آلمان (i)، و انگلیس (E) هستند. شاخص‌های اولیه‌ی تصمیم‌گیری عبارتند از: ۱. ظرفیت، ۲. خدمات پس از فروش، ۳. قیمت، ۴. اندازه، ۵. قابلیت نگهداری و تعمیر، ۶. هزینه‌ی تعمیرات، ۷. دوام، و ۸. فرایند تولید. پس از مطالعه‌ی دقیق این شاخص‌ها و غربال‌سازی آن‌ها، چهار شاخص ظرفیت، خدمات پس از فروش، قیمت و فرایند تولید، به عنوان شاخص مهم انتخاب شدند.

$$\text{تعداد مقایسات زوجی} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)}{p}$$

برای نمونه، تصمیم‌گیرنده ظرفیت را نسبت به خدمات (پس از فروش)، مقایسه کرده و به این نتیجه رسیده که شاخص ظرفیت دستگاه، برتری نسبتاً کمی، بر شاخص خدمات (پس از فروش) دارد (عدد ۲). همچنین شاخص ظرفیت دستگاه، بر قیمت دستگاه نسبتاً برتر است (عدد ۳) و ...

... ماتریس سازگار $\forall K$ اگر رابطه $a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj}$ برای تمام k ها برقرار باشد، ماتریس مقایسه

نوعی را خواهیم داشت که تمام قطرها و متون های آن نسبت به هم وابستگی خطی دارند، به این ماتریس سازگار

گویند و از خاصیت های مهم آن این است که می توان مقادیر معین برای وزن ها تعیین نمود به گونه ای که

نسبت آنها دقیقاً برابر اعداد داخل جدول گردد.

$$\begin{matrix}
 w_1 = 0,6 & w_2 = 0,2 & w_3 = 0,1 \\
 w_1 = 0,6 & 1 & 3 \\
 w_2 = 0,2 & \frac{1}{3} & 1 \\
 w_3 = 0,1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1
 \end{matrix}$$

« $a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj}$ »

... مثال ۴



۲۴

برای نمونه، اگر معیار مورد نظر شیرینی باشد و بخواهیم شیرینی عسل، شکر و شیره ی ملاس را با هم مقایسه کنیم و شیرینی عسل، ۵ برابر شیرینی شکر، باشد و شیرینی شکر ۲ برابر شیرینی شیره ی ملاس باشد؛ آنگاه عسل ۱۰ بار از ملاس شیرین تر است. در این مثال، اگر گفته شود شیرینی عسل، ۴ برابر شیرینی شیره ی ملاس است قضاوت ها با هم سازگاری ندارند و نمی توان به نتایجی که از این مقایسات به دست خواهد آمد اعتماد کرد.

ناسازگاری ماتریس مقایسات زوجی:

بسیاری از اوقات، در مائل نهایی واقعی، مدن است برای برخی عناصر ماتریس مقایسات زوجی، دانته باقیم:

در این حالت، گویند که ماتریس ناسازگار است و از ویژگیهای چنین ماتریسی این است که معیار

برای وزن حکایت گردد که نسبت آنها حقیقیاً اعداد داخل ماتریس نباشد.

$$\begin{matrix} w_1 = 0,1735 & 1 & & \\ w_2 = 0,6059 & & 2 & \\ w_3 = 0,2206 & & & 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1/2 & 1 & \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

مائل ماتریس سازگرنسبت و در جواب نسبت ها، خط داریم.

روش های محاسبه وزن معیارها با کمترین میزان ناسازگاری

دسته اول: روش های دقیق محاسبه وزن معیارها

- ۱- روش پایه برای حداقل کردن خطا
- ۲- روش مقدار ویژه و بردار ویژه

دسته دوم: روش های هیورستیک محاسبه وزن معیارها

- ۱- روش مجموع سطری
- ۲- روش مجموع ستونی
- ۳- روش میانگین حسابی
- ۴- روش میانگین هندسی

دسته اول:

روش های دقیق محاسبه وزن معیارها

* به توان ۱/۳ می رسانیم تا اثر + و - هم دیگر را خنثی کنند.

روش اول:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \Rightarrow a_{ij} \cdot w_j - w_i = 0 \end{array} \right. \quad \text{روش پایه (درجه در ساده) برای تبدیل کردن خطا:$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij} \neq \frac{w_i}{w_j} \Rightarrow a_{ij} w_j - w_i \neq 0 \quad \text{یا} \quad a_{ij} w_j \neq w_i \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot w_j - w_i)^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{St: } \sum_{j=1}^n w_j = 1 \quad ; \quad w_j > 0 \quad j=1, \dots, n \end{array} \right.$$

مقدار ویژه: مقدار ویژه = بردار ویژه

ماتریس بردار

$$AW = \lambda W$$

$$AW - \lambda W = 0$$

روش دوم: مقدار ویژه و بردار ویژه

یادآوری از جبر خطی

$$(A - \lambda I)W = 0$$

چون W جمع صفر نیست

$$\Rightarrow A - \lambda I = 0$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

فایده منفرد است.

بسیار توان یک بردار از یک عدد کم کردیم دلیل آن بردار در بردار ضرب می کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda) - 4 \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \text{ مقدار ویژه}$$

★ جمع اینها برابر جمع مقادیر عناصر قطر اصلی ماتریس است.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{جمع مقادیر قطر اصلی ماتریس } A$$

* بردار ویژه را در جایگزینی می کنیم.

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4w_1 + 4w_2 = 0 \\ 3w_1 - 3w_2 = 0 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 6 \Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ (دو بردار ویژه!)} \leftarrow \text{بردارهای ویژه}$$

(n) اگر $\lambda_{max} = n$ باشد چون جمع مقادیر ویژه λ_i است. بقیه λ اصغر بوده اند.

ماتریس سازگار \rightarrow if: $\lambda_{max} = n$
 " سازگار " \rightarrow if: $\lambda_{max} \neq n$

- اثبات می‌گردد که اگر مقدار ویژه یک ماتریس مقایسات زوجی برابر n (رتبه ماتریس) باشد، بردار ویژه وابسته

به آن، همان بردار وزن معیارها خواهد بود.

$$A \times W = n \times W$$

$$\begin{bmatrix} w_1 & 1 & \dots & n \\ w_2 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n & \frac{w_1}{w_n} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix} = n \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j = n \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n \end{cases}$$

۱۵۴

- ماتریس مقایسه زوجی ناسازگار، بگفته‌ای است که شماره بزرگترین مقدار ویژه آن، n و سایر مقادیر

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

$$0, 0, \dots, n \quad \lambda_{max} = n$$

ویژه، n و سایر مقادیر 0 باشد.

- هنگامی که ماتریس مقایسات زوجی، نسبت ناسازگاری نباشد، بزرگترین مقدار ویژه آن یعنی λ_{max} از n بزرگتر است و

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

$$i \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \lambda_{max} > n$$

سایر مقادیر ویژه حول و حوش صفر، مقدار خواهد گرفت.

- اثبات می‌گردد که در یک ماتریس مقایسات زوجی ناسازگار، اگر بزرگترین مقدار ویژه را λ_{max} بنامیم، بردار ویژه‌ای

$$A \times W = \lambda_{max} \times W$$

که از این λ_{max} نسبت خواهد آمد، بردار وزن معیارها با کمترین خطا خواهد بود.

مشکلات استفاده از راه حل های قبلی
 ۱- حال ندارم معادله ویژه و بردار ویژه را حساب کنم.
 ۲- حال ندارم چک کنم آیا ماتریس معادله زوجی سازگار هست یا نیست

راه حل: $\lambda_{max} = n$
 $\lambda_{min} = \frac{1}{n}$

دسته دوم:

روش های هیورستیک محاسبه وزن معیارها

۱) روشی جمع بطری: در این روش، ابتدا مجموع عناصر هر سطرها ترس، محاسبه شده تا یک بردار ستونی حاصل

گردد. سپس با تقسیم هر یکی از عناصر این بردار بر مجموع آن ها، آن را نرمالیزه می کنیم. بردار حاصله، بردار

وزن معیارها خواهد بود.

مجموع می کنیم هر کدام تقسیم بر جمع آنها می کنیم

$$\begin{matrix}
 w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\
 w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\
 w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\
 w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\
 w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44}
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 1 & 5 & 6 & 7 \\
 1/5 & 1 & 4 & 6 \\
 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\
 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1
 \end{bmatrix}
 = 19
 \begin{bmatrix}
 19 \\
 11.2 \\
 5.46 \\
 1.56
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0.51 \\
 0.3 \\
 0.15 \\
 0.04
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 w_1 \\
 w_2 \\
 w_3 \\
 w_4
 \end{bmatrix}$$

چون اعداد من و مثبت و همچنین جمع آنها نیست
 نمی توان آن را به عنوان بردار وزن شناخت

۳) روش مجموع ستون: در این روش، ابتدا مجموع عناصر هر ستون محاسبه شده تا یک بردار سطری حاصل

گردد. تک تک عناصر این بردار را مقسوم نموده و آن را به المیزه می نمایم. بردار حاصل، بردار وزن معیار را خواهد بود

برتری معیار نسبت به! برتری معیار نسبت به معیار!

$$\begin{array}{c}
 ۱ \\
 ۲ \\
 ۳ \\
 ۴
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\
 ۱ & ۵ & ۶ & ۷ \\
 ۱/۵ & ۱ & ۴ & ۶ \\
 ۱/۶ & ۱/۴ & ۱ & ۴ \\
 ۱/۷ & ۱/۶ & ۱/۴ & ۱
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 \uparrow \\
 \downarrow \\
 \downarrow \\
 \downarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 [۱,۵۱ \quad ۶,۴۳ \quad ۱۱,۲۵ \quad ۱۸] \\
 [۰,۶۶ \quad ۰,۱۶ \quad ۰,۰۹ \quad ۰,۰۶] \\
 [۰,۶۸ \quad ۰,۲۱ \quad ۰,۱۲ \quad ۰,۰۸]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \rightarrow
 \end{array}$$

- مثال:

۳) روش میانگین حساب: در این روش، ابتدا عناصر هر ستون بر مجموع عناصر آن ستون تقسیم می شوند تا

ماتریس نرمالیزه حاصل گردد، سپس میانگین عناصر هر خط محاسبه می گردد تا یک بردار ستونی حاصل شود. عناصر

این بردار، وزن معیارها خواهد بود. - مثال:

ابتدا نرمال کرده

$$\begin{array}{c}
 \rightarrow \\
 \rightarrow \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 ۰,۶۶ & ۰,۷۸ & ۰,۵۳ & ۰,۳۹ \\
 ۰,۱۳ & ۰,۱۶ & ۰,۳۶ & ۰,۳۳ \\
 ۰,۱۱ & ۰,۰۴ & ۰,۰۹ & ۰,۲۲ \\
 ۰,۰۹ & ۰,۰۳ & ۰,۰۲ & ۰,۰۶
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 \rightarrow \\
 \rightarrow \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 ۰,۵۹ \\
 ۰,۲۴۵ \\
 ۰,۱۱۵ \\
 ۰,۰۵۵
 \end{bmatrix}$$

۴ روش میانگین هندس: در این روش، میانگین هندس عناصر هر سطری محاسبه شده تا یک بردار سستون بدست آید. بردار حاصل نرمالیزه می گردد تا بردار وزن معیارها حاصل شود. - مثال:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} \sqrt[4]{1 \times 5 \times 6 \times 7} \\ \sqrt[4]{\frac{1}{8} \times 4 \times 4 \times 6} \\ \sqrt[4]{\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times 1 \times 4} \\ \sqrt[4]{\frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times 1} \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 1,1807 \\ 1,488 \\ 0,639 \\ 0,278 \end{bmatrix} \\
 & & \downarrow \text{شرط جمع یکن باشد} \\
 & & \frac{w_i}{\sum w_i}
 \end{array}$$

اما کدام روش بهتر است؟ * از نظر آماری، روش میانگین هندس از همه روش ها دقیق تر است * از نظر کاربردی، روش میانگین حسابی از همه روش ها بهتر است.

محاسبه نرخ ناسازگاری

اختلاف بین $\frac{w_i}{w_j}$ و a_{ij} ، تا چه مقداری برای ما قابل قبول است؟

سازگار $(n \times n)$: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow$
 $0 \quad 0 \quad \dots \quad n = \lambda_{max}$

ناسازگار $(n \times n)$: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow$
 $0 \quad 0 \quad \dots \quad \lambda_{max} > n$

اگرچه می‌گردد به هر قدر ناسازگاری ماتریس بیشتر باشد، اختلاف λ_{max} و n (نفرین بزرگتر)

خواهد شد، یعنی هر چه اختلاف $\frac{w_i}{w_j}$ و a_{ij} بیشتر باشد.

$$\begin{matrix} & w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_2}{w_1} & \dots & \frac{w_n}{w_1} \\ \frac{w_1}{w_2} & 1 & \dots & \frac{w_n}{w_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_1}{w_n} & \frac{w_2}{w_n} & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} w_1 + w_1 + \dots + w_1 \\ w_2 + w_2 + \dots + w_2 \\ \vdots \\ w_n + w_n + \dots + w_n \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} n w_1 \\ n w_2 \\ \vdots \\ n w_n \end{bmatrix} & = & n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

$\sum \lambda_i =$ جمع مقادیر ویژه n

$Aw = \lambda w$

$Aw = \lambda w$
 $\lambda = n$

$A - \lambda I = 0 \Rightarrow$ اگر $\lambda = n$ بزرگترین λ_{max} است.

(Inconsistency Index) $II = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} \leftarrow \lambda_{max} + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j = n$

Inconsistency Ratio) $IR = \frac{II}{IIR}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
IIR	0	0	0.581	0.9	1.12	1.24	1.33	1.41	1.45	1.48	1.5	...

قابل قبول $IR < 0.1$

طریقه دست آمدن جدول

که تولید شده ماتریس های $n \times n$ و نهایتاً گرفتن از II ها

$\frac{II}{IIR} < 0.1 \rightarrow$ قابل قبول
 $> 0.1 \rightarrow$ غیر قابل قبول

خلاصه روش محاسبه نرخ ناسازگاری (روش آقای ساعتی):

برای تعیین نسبت ناسازگاری یک ماتریس مقایسه زوجی $n \times n$ ، به ترتیب زیر عمل می‌نمایم:

۱) تمام مقادیر ویژه ماتریس را محاسبه کرده، از میان آنها بزرگترین شان را λ_{max} می‌نامیم.

۲) مقدار II (شاخص ناسازگاری) را از رابطه $II = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$ محاسبه کنید.

۳) با استفاده از جدول IIR ، نسبت ناسازگاری را با کمک رابطه $IIR = \frac{II}{IR}$ بدست آورید.

۴) مادی که IIR از آن کوچکتر باشد، ماتریس مقایسه زوجی را سازگار فرض می‌کنیم، در غیر این صورت باید

روش محاسبه وزن معیارها را تغییر دهیم. (اما مشکل محاسبات در این روش همچنان وجود دارد.)

مثال: نسبت ناسازگاری ماتریس مقایسه زوجی A را بدست آورید. (باروش پیشنهادی آقای ساعتی، روش ساعتی)

قدم یک: با استفاده از یکی از روشهای هیررستیک، وزن معیارها را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 4 \\ 1/3 & 1/8 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حاسبه } w} \begin{bmatrix} 0.593 \\ 0.341 \\ 0.066 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

باروش مجموع سطری

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 7.5 \\ 1.29 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حاسبه } w} \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.37 \\ 0.09 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

19.79

قدم هر به یک رابطه $A.W = \lambda_{max} W$ مقادیر λ_{max} را تعیین می کنیم. اگر ماتریس کاملاً سازگار بوده، آنگاه

$\lambda_{max} = n$ بدست می آید اما چون ماتریس سازگار نیست و وزن ها دقیق نیستند لذا یک λ_{max}

$A.W = \lambda_{max} . W$ و بعد نتوانیم داشت.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,593 \\ 0,341 \\ 0,066 \end{pmatrix} = \lambda_{max} \begin{pmatrix} 0,593 \\ 0,341 \\ 0,066 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,103 \\ 1,034 \\ 0,197 \end{pmatrix}$$

$A.W = \lambda.W \rightarrow \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,37 \\ 0,04 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,37 \\ 0,04 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left. \begin{matrix} \lambda_1 = \frac{1,103}{0,55} \\ \lambda_2 = \frac{1,034}{0,37} \\ \lambda_3 = \frac{0,197}{0,04} \end{matrix} \right\} \rightarrow \lambda_{max} = 3,019$

زیادتر از n است اما سازگار نیست
 $II = \frac{3,019 - 3}{3 - 1} = 0,01$
 $IIR = \frac{0,01}{0,58} \rightarrow \frac{II}{IIR} = \frac{0,01}{0,58} = 0,017 < 0,1 \checkmark$
 باید: $\lambda_{max} = n \rightarrow$ در اینجا: $\lambda_{max} > n$

قدم سه (میانگین حساب مقادیر λ_{max} را محاسبه می کنیم.)

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda_{max}^1 = \frac{1,103}{0,593} = 1,859 \\ \lambda_{max}^2 = \frac{1,034}{0,341} = 3,032 \\ \lambda_{max}^3 = \frac{0,197}{0,066} = 2,985 \end{matrix} \right. \Rightarrow \bar{\lambda}_{max} = \frac{1,859 + 3,032 + 2,985}{3} = 2,625$$

قدم چهار به یک مقادیر λ_{max} و II و IIR را محاسبه می کنیم.

ماتریس سازگار است. $II = \frac{\bar{\lambda}_{max} - n}{n - 1} = \frac{2,625 - 3}{3 - 1} = 0,0125$, $IIR = \frac{II}{IIR} = \frac{0,0125}{0,58} = 0,021 < 0,1 \checkmark$

نکته مهم:

بنا به تجربه‌ی نگارنده، روش آنروپی به شاخص‌ها وزن‌های دور از انتظاری می‌دهد. روش AHP (که جلوتر گفته می‌شود) وزن‌های معقول‌تری برای شاخص‌ها نسبت به آنروپی ارائه می‌کند؛ زیرا اساس کارش نظرات تصمیم‌گیرنده (و نه ماتریس تصمیم‌گیری) است.

مدل‌های MADM به دو بخش کلی تقسیم می‌شوند:

- ۱- مدل‌های جبرانی (Compensatory Method)
- ۲- مدل‌های غیرجبرانی (Noncompensatory Method)

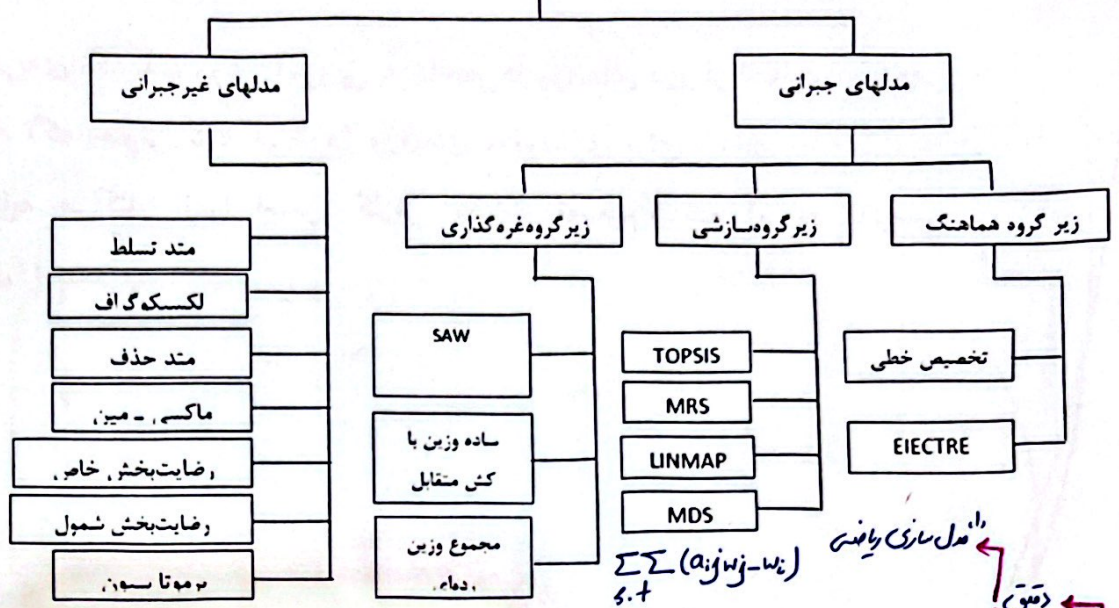
۱- مدل‌های جبرانی:

آن بخش از مدل‌های MADM هستند که تغییر در یک شاخص توسط تغییر (در جهت مخالف) در شاخص دیگر جبران می‌شود. از جمله روش‌های جبرانی می‌توان به ELECTRE, Topsis, SAW، تخصیص خطی، AHP اشاره کرد.

۲- مدل‌های غیرجبرانی:

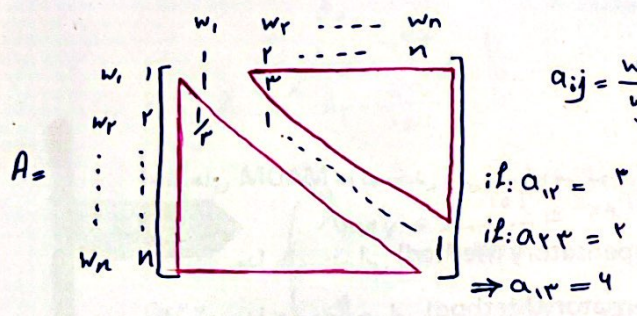
آن بخش از مدل‌های MADM هستند که تغییر در یک شاخص توسط شاخص دیگر جبران نمی‌شود. به عبارت دیگر در این مدل‌ها داد و ستدی بین شاخص‌ها صورت نمی‌گیرد. شامل روش‌هایی مانند: روش تسلط، لکسیکو گراف، حذف، ماکسی مین، ماکسی ماکس، رضایت‌بخش خاص و رضایت‌بخش شمول.

MADM مدل‌های تصمیم‌گیری در



$\sum_{i,j} (a_{ij} w_j - w_i) = 0$
 $\sum w_j = 1$
 $w_j \geq 0$

اصل سازی ریاضی
 روش
 اوش
 دقیق
 مقدار ویژه و بردار ویژه
 $\lambda_{max} = n$ و بقیه $\lambda = 0$
 اعتباری



اذنان معیار
 قضاوت ذهنی
 اکثریتی شایع
 مقایسه زوجی

$Aw = \lambda w \rightarrow Aw - \lambda w = 0$
 $(A - \lambda I)w = 0$

$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow$ مقادیر ویژه
 بردار ویژه متناظر با هر مقدار ویژه

$\sum \lambda = \text{جمع اعداد قطری ماتریس} = n \rightarrow \lambda_{max} = n$
 بردار ویژه بدست آمده برآیند ماتریس A، بهترین بردار وزن ممکن است.

مدل های تصمیم گیری

MADM

در این مدل ها هدف انتخاب یک گزینه از بین گزینه های موجود است.

مدل های MADM به دو بخش کلی تقسیم می شوند:



۱- مدل های جبرانی (Compensatory Method)

۲- مدل های غیر جبرانی (Noncompensatory Method)

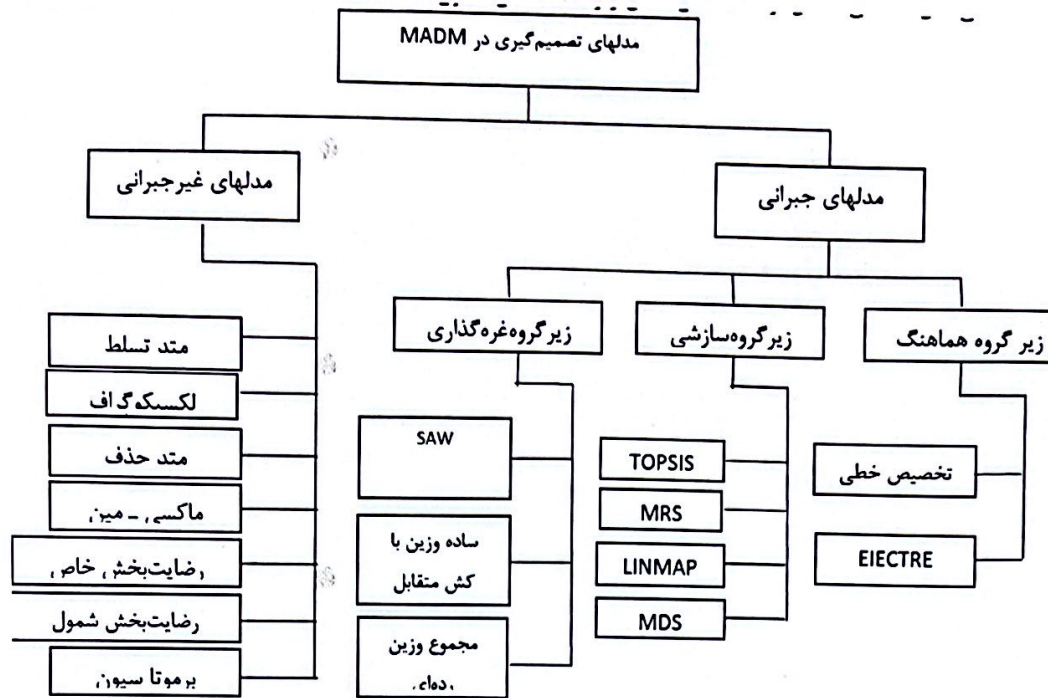


۱- مدل های جبرانی:

آن بخش از مدل های MADM هستند که تغییر در یک شاخص توسط تغییر (در جهت مخالف) در شاخص دیگر جبران می شود. از جمله روش های جبرانی می توان به SAW, Topsis, ELECTRE, تخصیص خطی, AHP اشاره کرد.

۲- مدل های غیر جبرانی:

آن بخش از مدل های MADM هستند که تغییر در یک شاخص توسط شاخص دیگر جبران نمی شود. به عبارت دیگر در این مدل ها داد و ستدی بین شاخص ها صورت نمی گیرد. شامل روش هایی مانند: روش تسلط، لکسیکو گراف، حذف، ماکسی مین، ماکسی ماکس، رضایت بخش خاص و رضایت بخش شمول.



شکل (۲) مدل‌های MADM با توجه به طبقه‌بندی جبرانی و غیرجبرانی

مدل‌های غیر جبرانی

Ranking ✓
Selection

روش permutation (جایگشت) ← روش جایگشت برای رتبه بندی که ترتیبی استفاده می شود.

در این روش تعداد حالات رتبه بندی گزینه ها مشخص می شود و هر رتبه بندی مورد آزمایش قرار می گیرد و نهایتا مناسب ترین آنها برای رتبه بندی انتخاب می گردد. مراحل این روش عبارتند از:

1. تعیین تعداد حالات رتبه بندی $n!$ (تعداد گزینه ها)
 2. بررسی هر یک از حالات توسط ماتریس مقایسه زوجی و محاسبه R (درایه آژام در این ماتریس ها برابر مجموع اوزان شاخص هایی است که به ازای آنها گزینه نام بهتر یا مساوی گزینه نام باشد).
(مجموع درایه های پایین قطر اصلی) - (مجموع درایه های بالای قطر اصلی) = R
- انتخاب بهترین حالت رتبه بندی براساس بیشترین مقدار R .

جمع مقادیر پایین مثلث - جمع مقادیر بالای مثلث : محاسبه permutation

مثال:

$$W = [0/2 \quad 0/5 \quad 0/3]$$

$$\begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A1 & \begin{bmatrix} 10 & 22 & 12 \\ 5 & 4 & 8 \\ 11 & 35 & 14 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

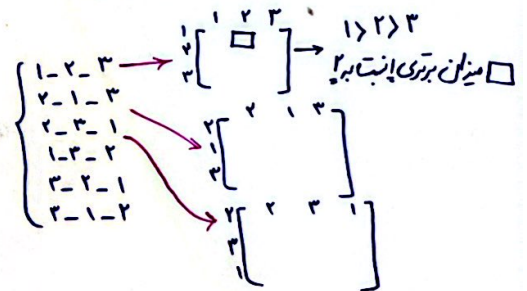
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \begin{bmatrix} - & 0/7 & 0/3 \\ 0/3 & - & 0/3 \\ 0/7 & 0/7 & - \end{bmatrix} \\ 2 & & \\ 3 & & \end{matrix}$$

$$R1 = -0/4$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$$m! = 3! = 6$$

تعداد حالات مورد بررسی



$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \\
 1 \begin{bmatrix} - & 0/7 & 0/3 \end{bmatrix} \quad 1 \begin{bmatrix} - & 0/3 & 0/7 \end{bmatrix} \quad 2 \begin{bmatrix} - & 0/3 & 0/3 \end{bmatrix} \quad 3 \begin{bmatrix} - & 0/7 & 0/7 \end{bmatrix} \\
 2 \begin{bmatrix} 0/3 & - & 0/3 \end{bmatrix} \quad 3 \begin{bmatrix} 0/7 & - & 0/7 \end{bmatrix} \quad 3 \begin{bmatrix} 0/7 & - & 0/7 \end{bmatrix} \quad 2 \begin{bmatrix} 0/3 & - & 0/3 \end{bmatrix} \\
 3 \begin{bmatrix} 0/7 & 0/7 & - \end{bmatrix} \quad 2 \begin{bmatrix} 0/3 & 0/3 & - \end{bmatrix} \quad 1 \begin{bmatrix} 0/7 & 0/3 & - \end{bmatrix} \quad 1 \begin{bmatrix} 0/3 & 0/7 & - \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 3 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \\
 3 \begin{bmatrix} - & 0/7 & 0/7 \end{bmatrix} \quad 2 \begin{bmatrix} - & 0/3 & 0/3 \end{bmatrix} \\
 1 \begin{bmatrix} 0/3 & - & 0/7 \end{bmatrix} \quad 1 \begin{bmatrix} 0/7 & - & 0/3 \end{bmatrix} \\
 2 \begin{bmatrix} 0/3 & 0/3 & - \end{bmatrix} \quad 3 \begin{bmatrix} 0/7 & 0/7 & - \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$R1 = -0/4 \quad R4 = 0/4$$

$$R2 = 0/4 \quad R5 = 1/2$$

$$R3 = -0/4 \quad R6 = -1/2$$

$$\text{Max}\{R1, \dots, R6\} = 1/2 \rightarrow A3 > A1 > A2$$

روش تسلط:

گزینه A_i را بر گزینه A_j مسلط گوئیم هرگاه حداقل در یک شاخص بهتر و در بقیه شاخص‌ها برابر گزینه A_j باشد.

مثال: ماتریس تصمیم‌گیری زیر را در نظر بگیرید:

گزینه A_1 بر A_2 مسلط است یا A_2 تحت تسلط A_1 است.

گزینه A_3 بر A_2 مسلط است یا A_2 تحت تسلط A_3 است.

$$\begin{array}{c}
 + \quad + \quad - \\
 A_1 \begin{bmatrix} 100 & 50 & 30 \end{bmatrix} \\
 A_2 \begin{bmatrix} 80 & 25 & 30 \end{bmatrix} \\
 A_3 \begin{bmatrix} 110 & 25 & 28 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

روش تسلط یک روش فیلترینگ اولیه محسوب می‌شود.

روش حذف:

در این روش ابتدا توسط تصمیم گیرنده یک سطح رضایتمندی در هر شاخص تعیین می‌شود. سپس یک شاخص مشخص در نظر گرفته می‌شود و هر گزینه‌ای که سطح حداقل رضایتمندی در آن شاخص را تأمین نکند حذف خواهد شد و سپس شاخص دیگری را در نظر گرفته و این فرایند ادامه می‌یابد تا نهایتاً یک گزینه انتخاب گردد.

مثال: سطح رضایتمندی DM [۱۰۰ ۴۵ ۳۰]

	C ₁ ⁺	C ₂ ⁺	C ₃ ⁻
A ₁	100	50	30
A ₂	80	25	30
A ₃	110	25	28

اگر A₂ حتی در دو معیار برتری معکوس‌الاستری داشت باز هم نمی‌توانست برپودش در معیار C₁ را جبران کند.

در مورد شاخص اول گزینه A₂ حذف می‌شود در مورد شاخص دوم گزینه A₃ حذف می‌شود و فقط گزینه A₁ باقی می‌ماند که در شاخص سوم نیز سطح حداقل رضایتمندی را تأمین می‌کند.

روش لکسیکوگراف

در این روش ابتدا شاخص‌ها توسط تصمیم گیرنده رتبه‌بندی می‌شود (بر اساس درجه اهمیت) سپس از نظر شاخص با درجه اهمیت بالاتر گزینه‌ها مقایسه می‌شوند و بهترین آنها انتخاب می‌گردد و در صورتی که با این مقایسه یک گزینه تفکیک نشد گزینه‌های باقی مانده از نظر شاخص با درجه اهمیت دوم مقایسه می‌شوند و گزینه برتر انتخاب می‌گردد و این فرایند تا انتخاب یک گزینه ادامه می‌یابد.

روش رضایت بخش شمول: (conjunctive)

در این روش ابتدا یک سطح حداقل رضایتمندی توسط تصمیم گیرنده مشخص می‌شود سپس گزینه‌ها از نظر هر شاخص با سطح رضایتمندی مقایسه می‌شوند و گزینه بهینه گزینه‌ای است که در همه شاخص‌ها سطح حداقل را تأمین نماید.

استاندارد تعیین شده از طرف DM به شرح ذیل است:

مثال ساختن سدا در نظر بگیرید:

$$b = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{3/1, \text{زیاد}, \text{کم}, 24000, \text{خیلی زیاد}\}$$

تحلیل:

- A1 چون شرط اول را ندارد حذف می‌شود.
- A3 حذف می‌شود.
- A2 مورد پذیرش قرار می‌گیرد.

D =

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	(-) هزینه	(+) استحکام	(+) وجهه مالی	(+) ظرفیت	(-) سختی کار
A ₁	3	متوسط	خیلی زیاد	24000	خیلی زیاد
A ₂	2/1	زیاد	متوسط	25000	زیاد
A ₃	5/1	خیلی زیاد	کم	32000	کم

نکته: در این تکنیک تصمیم گیری هیچ نیازی به کمی کردن شاخص های کیفی و scale less نداریم.

* استاندارد تعیین شده در معیار منفی، حد اکثر است و در معیار مثبت، حداقل است.

* در روش شمول همه گزینه‌ها باید استاندارد را رعایت کنند.

- مثال: فرض کنید کالج، انجمن هیئت علمی خود را بر اساس چهار ویژگی زیر انتخاب می‌کند: ۱) توانایی‌های

آکادمیک ۲) توانایی های فکری ۳) روابط اجتماعی ۴) شخصیت. کاندیدها بر حسب این عوامل امتیازدهی

می‌کنند. کالج هایل است تنها کاندیدها پذیرش شده و ۸۰٪ آنها رد شوند. با فرض اینکه حد پذیرش برای

تمام معیارها یکسان تعریف شود. مقدار این حد، چقدر باید باشد که

$$P_c = (1 - \pi)^n$$

P_c : احتمال اینکه یک کاندید برای انتخاب شده، بالاتر از حد پذیرش قرار گیرد.

$$\pi = 1 - P_c^n$$

π : نسبت از گزینه‌ها که باید کنار گذاشته شوند. n : تعداد معیار

$$P_c = (1 - 0.1)^{1/4} = 0.67$$

	c_1	c_2	c_3	c_4
A ₁	$0 < 1$	$0 < 1$	$0 < 1$	$0 < 1$
A ₂	$\frac{0.67}{P_c}$	$\frac{0.67}{P_c}$	$\frac{0.67}{P_c}$	$\frac{0.67}{P_c}$
A ₃				

$$\pi = 1 - P_c^n \rightarrow P_c = \sqrt[n]{1 - \pi} = \sqrt[4]{1 - 0.1}$$

۰.۱۸ ← حد پذیرش

روش رضایت بخش خاص:

در این روش نیز ابتدا یک سطح حداقل رضایتمندی در هر شاخص توسط تصمیم گیرنده مشخص می‌گردد. سپس گزینه‌ها از نظر هر شاخص با این سطح مقایسه می‌شوند و گزینه برتر گزینه‌ای است که حداقل در یکی از شاخص‌ها سطح حداقل را ارضا کند در واقع انتخاب در این روش بر مبنای خاص بودن است و تنها گزینه رد می‌شود که در هیچ

یک از شاخص‌ها سطح حداقل را تأمین ننماید. سطح حداقل رضایتمندی

C1 C2 C3
[100 45 30]

در مثال قبل: A1 به ازای C1 و C2 و C3 سطح حداقل را تأمین می‌کند.

$$A1 \begin{bmatrix} 100 & 50 & 30 \\ A2 & 80 & 25 & 30 \\ A3 & 110 & 25 & 28 \end{bmatrix}$$

A2 به ازای C2 سطح حداقل را تأمین می‌کند.

A3 به ازای C1 سطح حداقل را تأمین می‌کند.

پس هر سه گزینه A1 و A2 و A3 با این روش قابل قبول هستند.

* در صورتی که گزینه رد خواهد شد که استاندارد روشی همگام از موارد رعایت نکرده باشد.

روش ماکس - مین:

این روش معمولاً در زمانی به کار گرفته می‌شود که با یک تصمیم گیرنده محتاط روبه‌رو باشیم در این روش ابتدا باید ماتریس تصمیم‌گیری را با روش بی‌مقیاس سازی خطی بی‌مقیاس شود تا اثر مثبت و منفی شاخص‌ها از بین رود. بی-مقیاس سازی خطی

در این روش، عملکردی که کمترین ضریب تغییرات را در معیار آن نسبت داشته و در معیارها با بیشترین

گزینه‌ای که دارای قوی‌ترین معیار ضعیف باشد، برتر خواهد بود.

* اگر بیشترین + باشد ماکس مین و اگر کمترین - باشد مین ماکس (با بدترین معیار + یا - باشد)

* ماکس مین - همانا - انتخاب بهترین بهترین

* ماکس ماکس - از یک نیز - انتخاب بهترین بهترین

قدم اول: معیارهای کلاهی را در ماتریس تصمیم گیری به معیارهای عددی تبدیل نماید

قدم دوم: با استفاده از روش تبدیل مقیاس خطی، ماتریس را نرمالیزه نماید.

$$\text{گزینه: } r_{ij} = \frac{a_{ij}^{\min}}{a_{ij}^{\max}} \quad \text{سود: } r_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ij}^{\max}}$$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	
A_1	0.8	0.56	0.95	0.82	0.71	1	0.56
A_2	1	1	0.86	0.69	0.43	0.56	0.43
A_3	0.72	0.74	1	1	1	0.78	0.72
A_4	0.88	0.67	0.95	0.9	0.71	0.56	0.56

قدم سوم: کمترین عدد در هر سطر ماتریس نرمالیزه شده را در مقابل آن سطریست و پس بزرگترین مقدار را از میان

آنها انتخاب می‌نمایم. گزینه مربوطه بهترین گزینه خواهد بود.

روش ماکسی - ماکس:

این روش معمولاً در زمانی به کار می‌رود که با یک تصمیم گیرنده ریسک پذیر روبه‌رو باشیم در این روش نیز مانند روش ماکس مین ابتدا باید ماتریس تصمیم‌گیری از طریق نرمال سازی خطی بی‌مقیاس شود سپس در هر سطر بیشترین مقدار را انتخاب کرده و از میان مقدار انتخاب شده نیز ماکزیمم مقدار را انتخاب می‌کنیم و گزینه مربوط به آن مقدار گزینه بهینه خواهد بود.

$$N = \begin{bmatrix} 0/909 & 1^* & 0/933 \\ 0/727 & 0/5 & 0/933 \\ *1 & 0/5 & 1^* \end{bmatrix} \rightarrow \text{گزینه } A_1 \text{ و } A_3$$

مدل های جبرانی

↓
همه معیارها در حجم در نظر میگیرند

آنتروپی شانون
تئیه وزن شاخصها
مقایسات زوجی

مدل های جبرانی

SAW - 1

روش وزن دهی تجمعی ساده (saw) Simple additive weighting method

مدل مجموع ساده‌ی وزنی، یعنی SAW، یکی از ساده‌ترین روش‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه است. با محاسبه‌ی اوزان شاخص‌ها، می‌توان به سادگی این روش را به کار برد.

۱. کمی کردن ماتریس تصمیم‌گیری
۲. بی‌مقیاس‌سازی خطی مقادیر ماتریس تصمیم‌گیری
۳. ضرب ماتریس بی‌مقیاس شده در اوزان شاخص‌ها
۴. انتخاب بهترین گزینه (A^*) با معیار زیر:

$$A^* = \{A_i | \max_i \sum_{j=1}^n W_j X_{ij} / \sum_{j=1}^n W_j\}$$

X_{ij} خروجی الترناتیو A_i و صفت j ام با یک مقیاس کمی قابل یک سری وزن‌های اهمیت توسط تصمیم‌گیرنده برای الترناتیو‌ها فرض می‌شود. $W = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$

مثال:

فرض کنید فردی می‌خواهد از بین سه نوع سیستم کامپیوتری، با روش SAW، یک نوع را انتخاب کند. هر نوع سیستم، با پنج شاخص که عبارتند از: هزینه، عمر مفید، کیفیت خدمات پس از فروش، کیفیت سخت‌افزار، و کیفیت نرم‌افزار ارزیابی می‌شود.

$A_i \backslash C_j$	C_1^-	C_2^+	C_3^+	C_4^+	C_5^+
A_1	۳۰	۲۰	متوسط	خیلی زیاد	کم
A_2	۱۰	۳۰	زیاد	متوسط	زیاد
A_3	۲۰	۵۰	خیلی زیاد	کم	خیلی زیاد

حل مثال:

سأ ۱. همان طور که مشخص است شاخص های C_1 ، C_2 ، C_3 و C_5 کیفی اند. اولین کار این است که مانند روش های گفته شده در بخش های پیش، شاخص کیفی را به «کمی» تبدیل کنیم. برای این کار، می توان مقیاس فاصله ای دوقطبی را به کار برد.

ماتریس تصمیم کتی شده

$A_i \backslash C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۳۰	۲۰	۵	۹	۳
A_2	۱۰	۳۰	۷	۵	۷
A_3	۲۰	۵۰	۹	۳	۹

سأ ۲. اکنون باید این ماتریس تصمیم کتی، بی مقیاس شود. نوع بی مقیاس سازی این روش تصمیم گیری چند شاخصه، «بی مقیاس سازی خطی» است

ماتریس بی مقیاس شده

$A_i \backslash C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۰/۳۳۳	۰/۴	۰/۵۵۶	۱	۰/۳۳۳
A_2	۱	۰/۷	۰/۷۷۸	۰/۵۵۶	۰/۷۷۸
A_3	۰/۵	۱	۱	۰/۳۳۳	۱

سأ ۳. اکنون باید «اوزان شاخص ها» را محاسبه کنیم. در این جا، روش آنتروپی شانون را به کار می بریم که در مبحث قبل شرح داده شد. اگر این روش برای محاسبه ی اوزان شاخص های این مسأله به کار گرفته شود، این اوزان عبارت خواهد بود از:

$$W = [0/۲۳۹, 0/۱۸۹, 0/۰۷۶, 0/۲۶۳, 0/۲۳۴]$$

سأ ۴. در این گام، ماتریس بی مقیاس شده را در اوزان شاخص ها ضرب می کنیم. حاصل، به صورت یک ماتریس ستونی می شود. این فرآیند در زیر انجام شده است.

$A_i \backslash C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۰/۳۳۳	۰/۴	۰/۵۵۶	۱	۰/۳۳۳
A_2	۱	۰/۷	۰/۷۷۸	۰/۵۵۶	۰/۷۷۸
A_3	۰/۵	۱	۱	۰/۳۳۳	۱

$$\times \begin{Bmatrix} 0/۲۳۹ \\ 0/۱۸۹ \\ 0/۰۷۶ \\ 0/۲۶۳ \\ 0/۲۳۴ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0/۵۳۸ \\ 0/۷۴۰ \\ 0/۷۰۶ \end{Bmatrix}$$

جمع ستونی + (وزن معیار \times امتیاز معیار)

$$A_1: 0/۳۳۳ \times 0/۲۳۹ + 0/۴ \times 0/۱۸۹ + \dots + 0/۳۳۳ \times 0/۲۳۴ = 0/۵۳۸$$

مقام ۴. بهترین گزینه، بزرگترین مقدار را دارا است.

$$\begin{Bmatrix} 0.538 \\ 0.740 \\ 0.704 \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$A^* = A_3$$

$$A_3 > A_2 > A_1$$

بنابراین، اولویت‌بندی گزینه‌ها طبق مدل SAW، این گونه است:

یعنی A_3 بر A_2 برتری دارد و A_2 نیز بر A_1

مدل های جبرانی

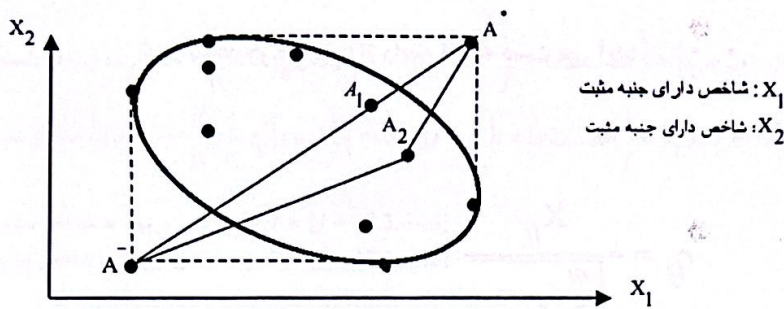
TOPSIS - ۲

Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution

* گزینه ایده‌آل: گزینه‌ای که در معیار مثبت بهترین و در معیار منفی کمترین امتیاز را داشته باشد.
* ایده‌آل منفی یا ضد ایده‌آل: در معیار مثبت بدترین امتیاز و در معیارها منفی بیشترین امتیاز را دارد.

❖ روش TOPSIS در سال ۱۹۸۱ توسط هواتک و یون ارایه گردید.

❖ TOPSIS بر این مفهوم استوار است که گزینه انتخابی باید کمترین فاصله را با راه حل ایده آل مثبت و بیشترین فاصله را با راه حل ایده آل منفی داشته باشد.



❖ در این روش m گزینه به وسیله n شاخص مورد ارزیابی قرار میگیرند و هر مساله را می توان به عنوان یک سیستم هندسی شامل m نقطه در یک فضای n بعدی در نظر گرفت.

این روش دارای ۶ گام است:

گام صفر: به دست آوردن ماتریس تصمیم

❖ در این روش ماتریس تصمیمی ارزیابی میشود که شامل m گزینه و n شاخص است.

$$D = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & \dots & X_j & \dots & X_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1j} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2j} & \dots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{i1} & X_{i2} & \dots & X_{ij} & \dots & X_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \dots & X_{mj} & \dots & X_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A_i : گزینه i ام
 X_{ij} : مقدار عددی بدست آمده از
 گزینه i ام با شاخص j ام

❖ در این ماتریس شاخصی که دارای مطلوبیت مثبت است، شاخص سود و شاخصی که دارای مطلوبیت منفی است، شاخص هزینه می باشد.

گام اول: نرمالیز کردن ماتریس تصمیم

✧ در این گام مقیاسهای موجود در ماتریس تصمیم را بدون مقیاس می کنیم. به این ترتیب که هر کدام از مقادیر بر اندازه بردار مربوط به همان شاخص تقسیم می شود.

✧ در نتیجه هر درایه r_{ij} از رابطه زیر به دست می آید:

$$r_{ij} = \frac{X_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m X_{ij}^2}}$$

گام دوم: وزن دهی به ماتریس نرمالیز شده:

✧ ماتریس تصمیم در واقع پارامتری است و لازم است کمی شود، به این منظور تصمیم گیرنده برای هر شاخص وزنی را معین میکند.

✧ مجموعه وزنها (w) در ماتریس نرمالیز شده (R) ضرب میشود.

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

✧ با توجه به اینکه ماتریس $W_{n \times 1}$ قابل ضرب در ماتریس تصمیم نرمالیز شده ($n \times n$) نیست، قبل از ضرب باید ماتریس وزن را به یک ماتریس قطری $W_{n \times n}$ تبدیل نمود. (وزنها روی قطر اصلی)

گام سوم: تعیین راه حل ایده آل و راه حل ایده آل منفی:

❖ دو گزینه مجازی A^+ و A^- را به صورتهای زیر تعریف می کنیم:

$$A^+ = \left\{ \left(\max_i v_{ij} | j \in J \right) | \left(\min_i v_{ij} | j \in J' \right) | i = 1, 2, \dots, m \right\} = \{v_{1j_1}^*, v_{2j_2}^*, \dots, v_{mj_m}^*\}$$

$$A^- = \left\{ \left(\min_i v_{ij} | j \in J \right) | \left(\max_i v_{ij} | j \in J' \right) | i = 1, 2, \dots, m \right\} = \{v_{1j_1}^-, v_{2j_2}^-, \dots, v_{mj_m}^-\}$$

$$J = \{j = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$J' = \{j = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

❖ دو گزینه مجازی ایجاد شده در واقع بدترین و بهترین راه حل هستند.

گام چهارم: به دست آوردن اندازه فاصله ها

❖ فاصله بین هر گزینه n بعدی را از روش اقلیدسی می سنجیم. یعنی فاصله گزینه i را از گزینه های ایده آل مثبت و منفی می یابیم.

$$S_{i^+} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_{j^+})^2} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$S_{i^-} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_{j^-})^2} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

کام پنجم: محاسبه نزدیکی نسبی به راه حل ایده آل

این معیار از طریق فرمول زیر به دست می آید:

$$C_{i*} = \frac{S_{i-}}{S_{i*} + S_{i-}} \quad 0 < C_{i*} < 1$$

ملاحظه می شود که اگر $A_i = A^*$ آنگاه $C_{i*} = 1$ و اگر $A_i = A^-$ آنگاه $C_{i*} = 0$

مشخص است که هر چه فاصله گزینه A_i از راه حل ایده آل کمتر باشد نزدیکی نسبی به آن نزدیکتر خواهد بود.

کام ششم: رتبه بندی گزینه ها

نهایتاً گزینه ها را بر اساس ترتیب نزولی رتبه بندی می کنیم.

❖ مثال عددی (مسئله انتخاب هواپیمای جنگنده)

$$D = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1500 & 20000 & 5.5 & 5 & 9 \\ 2.5 & 2700 & 18000 & 6.5 & 3 & 5 \\ 1.8 & 2000 & 21000 & 4.5 & 7 & 7 \\ 2.2 & 1800 & 20000 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

❖ همه شاخص ها مربوط به سود هستند بجز شاخص X_4 .

(1) نرمالایز کردن ماتریس تصمیم:

$$R = \begin{bmatrix} 0.4671 & 0.3662 & 0.5056 & 0.5063 & 0.4811 & 0.6708 \\ 0.5839 & 0.6591 & 0.4550 & 0.5983 & 0.2887 & 0.3727 \\ 0.4204 & 0.4882 & 0.5308 & 0.4143 & 0.6736 & 0.5217 \\ 0.5139 & 0.4392 & 0.5056 & 0.4603 & 0.4811 & 0.3727 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

(2) وزن دادن به ماتریس تصمیم:

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) = (0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.3)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.0934 & 0.0366 & 0.0506 & 0.0506 & 0.0962 & 0.2012 \\ 0.1168 & 0.0659 & 0.0455 & 0.0598 & 0.0577 & 0.1118 \\ 0.0841 & 0.0488 & 0.0531 & 0.0414 & 0.1347 & 0.1565 \\ 0.1028 & 0.0439 & 0.0506 & 0.0460 & 0.0962 & 0.1118 \end{bmatrix}$$

$\sqrt{A^*}$ 0.1168 0.0659 0.0531 0.0414 0.1347 0.1565
 $\sqrt{A^-}$ 0.1028 0.0439 0.0506 0.0460 0.0962 0.1118

نسبت فاصله آنتروپی S_i^+ :
$$\sqrt{(0.1168 - 0.0934)^2 + (0.0659 - 0.0455)^2 + \dots}$$

$$S_i^- = \sqrt{(0.0934 - 0.1028)^2 + (0.0366 - 0.0439)^2 + \dots}$$

برای هر سطر به صورت جداگانه S_1^+ و S_2^+ و ... را بیست کردن پس از آن بزرگترین را جایگزین کرده که فاصله بزرگتر باشد بهتر است.

$$C_i = \frac{S_i^-}{S_i^+ + S_i^-}$$

$$A^+ = \left(\max_i v_{i1}, \max_i v_{i2}, \max_i v_{i3}, \min_i v_{i4}, \max_i v_{i5}, \max_i v_{i6} \right)$$

$$= (0.1168, 0.0659, 0.0531, 0.0414, 0.1347, 0.2012)$$

$$A^- = \left(\min_i v_{i1}, \min_i v_{i2}, \min_i v_{i3}, \max_i v_{i4}, \min_i v_{i5}, \min_i v_{i6} \right)$$

$$= (0.0841, 0.0366, 0.0455, 0.0598, 0.0577, 0.1118)$$

محاسبه اندازه فاصله:

(4)

$$S_{i*} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^*)^2} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$S_{1*} = 0.0545$$

$$S_{2*} = 0.1197$$

$$S_{3*} = 0.0580$$

$$S_{4*} = 0.1009$$

$$S_{i-} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$S_{1-} = 0.0983$$

$$S_{2-} = 0.0439$$

$$S_{3-} = 0.0920$$

$$S_{4-} = 0.0458$$

$$C_{1*} = \frac{S_{1-}}{S_{1*} + S_{1-}} = 0.643$$

$$C_{2*} = 0.268$$

$$C_{3*} = 0.613$$

$$C_{4*} = 0.312$$

(6) رتبه بندی گزینه ها:

بر اساس ترتیب نزولی C_{i*} رتبه بندی گزینه ها به صورت زیر می شود:

A_1, A_3, A_4, A_2

❖ موفقیت چشمگیر روش PROMETHEE در زمینه های مختلف همانند بانکداری، مناطق صنعتی، برنامه ریزی نیروی کاری، منابع آب، سرمایه گذاری ها، پزشکی، شیمی، مراقبت های پزشکی، تروریسم، تحقیق در عملیات، مدیریت پویا و ... اساساً به دلیل خاصیت ریاضی و سهولت استفاده از آن می باشد.

❖ این روش ها به گروه روش های رتبه بندی تعلق دارند.

اطلاعات لازم برای مدل سازی ارجحیت ها توسط Promethee:

مسئله چند معیاری زیر را در نظر می گیریم:

$$\text{Max}\{g_1(a_i), g_2(a_i), \dots, g_j(a_i), \dots, g_n(a_i) \mid a_i \in A\}$$

که در آن:

$A = \{a_i \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ مجموعه ای متناهی از گزینه ها

و $g = \{g_j \mid j = 1, 2, \dots, n\}$ ارزیابی از معیارهای ارزیابی

می باشند.

اطلاعات لازم برای مدل سازی ارجحیت ها در این روش شامل موارد زیر است:

۱- جدول ارزیابی گزینه ها

۲- اطلاعات بین معیارها (در صد وزنی)

۳- اطلاعات هر معیار (تابع ارجحیت)

۱- جدول ارزیابی گزینه ها در یک مسئله تصمیم گیری با معیارهای چند گانه

a	$g_1(\cdot)$	$g_2(\cdot)$...	$g_j(\cdot)$...	$g_k(\cdot)$
a_1	$g_1(a_1)$	$g_2(a_1)$...	$g_j(a_1)$...	$g_k(a_1)$
a_2	$g_1(a_2)$	$g_2(a_2)$...	$g_j(a_2)$...	$g_k(a_2)$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
a_i	$g_1(a_i)$	$g_2(a_i)$...	$g_j(a_i)$...	$g_k(a_i)$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
a_n	$g_1(a_n)$	$g_2(a_n)$...	$g_j(a_n)$...	$g_k(a_n)$

• رابطه برتری در مسئله چند معیاری به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} \forall j : g_j(a) \geq g_j(b) \\ \exists k : g_k(a) > g_k(b) \end{cases} \iff aPb,$$

$$\forall j : g_j(a) = g_j(b) \iff aIb,$$

$$\begin{cases} \exists s : g_s(a) > g_s(b) \\ \exists r : g_r(a) < g_r(b) \end{cases} \iff aRb,$$

• که P و I و R به ترتیب نشان دهنده ارجحیت، بی تفاوتی و غیر قابل مقایسه بودن می باشند.

۲-اطلاعات بین معیارها

• وزن مربوط به هر معیار در جدول زیر مشاهده می شود:

$g_1(\cdot)$	$g_2(\cdot)$...	$g_j(\cdot)$...	$g_k(\cdot)$
w_1	w_2	...	w_j	...	w_k

• هیچ مانعی وجود ندارد که وزن ها را به صورت نرمال در نظر بگیریم، به طوریکه :

$$\sum_{j=1}^k w_j = 1.$$

3- اطلاعات هر معیار :

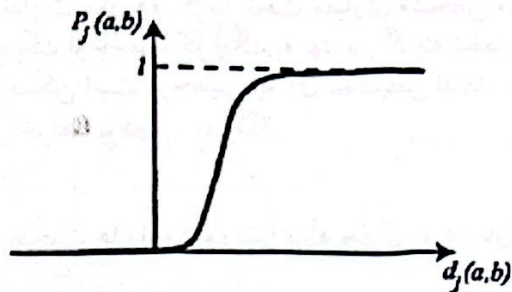
- ساختار ارجحیت این روش بر اساس مقایسات زوجی است.
- در این حالت تفاوت میان دو گزینه تحت معیاری مشخص مد نظر است. برای انحرافات کوچک، تصمیم گیرنده یک ارجحیت کوچک به بهترین گزینه تخصیص می دهد و اگر این انحراف خیلی کوچک باشد ممکن است ارجحیتی به آن تخصیص ندهد. هرچه میزان انحراف بیشتر باشد میزان ارجحیت بیشتر خواهد بود.
- می توان این ارجحیت ها را به صورت اعداد حقیقی و در بازه ۰ و ۱ در نظر گرفت.

3- اطلاعات هر معیار: (ادامه)

- در واقع تصمیم گیرنده برای هر معیار تابعی به صورت زیر در ذهن خود دارد:
- $$a, b \in A \forall \quad P_j(a, b) = F_j[d_j(a, b)]$$
- $$d_j(a, b) = g_j(a) - g_j(b)$$
- در نتیجه داریم:
- $$0 \leq P_j(a, b) \leq 1$$

3- اطلاعات هر معیار: (ادامه)

- برای معیارهایی که باید بیشینه شوند تابع ارجحیت a به b با توجه به اختلاف آن ها تحت معیار $g_i(\cdot)$ به صورت شکل زیر خواهد بود.



3- اطلاعات هر معیار: (ادامه)

- هم چنین داریم:

$$P_j(a,b) > 0 \rightarrow P_j(b,a) = 0$$

- در واقع وقتی انحرافات منفی هستند ارجحیت ها برابر صفر در نظر گرفته می شوند.

- برای معیارهایی که باید کمینه شوند تابع ارجحیت باید معکوس شود و یا به صورت زیر ارائه گردد:

$$a,b \in A \forall P_j(a,b) = F_j[-d_j(a,b)]$$

- زوج $\{P_j(a,b)$ و $g_i(\cdot)\}$ معیار عمومی و یا تابع ارجحیت مربوط به معیار $g_i(\cdot)$ نامیده می شود. چنین تابع ارجحیتی باید برای هر معیار تعریف شود.

شش نوع تابع
ارجحیت
استاندارد روش
promethee

Generalised criterion	Definition	Parameters to fix
<p>Step 1: Usual Criterion</p>	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ 1 & d > 0 \end{cases}$	-
<p>Step 2: Usual Criterion</p>	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq q \\ 1 & d > q \end{cases}$	q
<p>Step 3: Usual Criterion</p>	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ \frac{d}{p} & 0 < d < p \\ 1 & d \geq p \end{cases}$	p
<p>Step 4: Level Criterion</p>	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq q \\ \frac{1}{2} & q < d < p \\ 1 & d \geq p \end{cases}$	p, q
<p>Step 5: Kohane with indif- ference Criterion</p>	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq q \\ \frac{d-q}{p-q} & q < d < p \\ 1 & d \geq p \end{cases}$	p, q
<p>Step 6: Gaussian Criterion</p>	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{d}{p}} & d > 0 \end{cases}$	p

- در هر حالت صفر، یک و یا دو پارامتر باید تعریف شوند :
- q : آستانه بی تفاوتی (بزرگترین انحرافی که توسط تصمیم گیرنده نادیده گرفته می شود)
- P : آستانه ارجحیت زیاد (کوچکترین انحرافی که برای ارجحیت کامل کفایت می کند)
- S : ارزش میانه بین q و p .
- در بعضی از نرم افزارها فقط امکان استفاده از این شش تابع عمومی به عنوان توابع ارجحیت وجود دارد. این توابع برای بیشتر مسائل دنیای واقعی کفایت می کند اما مانعی هم برای در نظر گرفتن توابع ارجحیت دیگری وجود ندارد.

• حال با داشتن جدول ارزیابی، وزن معیارها و توابع ارجحیت معیارها اطلاعات لازم برای اجرای این روش فراهم شده است.

• در رتبه بندی روش های I, II, promethee ابتدا شاخص های ارجحیت تجمعی و جریان های برتری را تعریف می کنیم.

$$\begin{cases} \pi(a, b) = \sum_{j=1}^k P_j(a, b)w_j, \\ \pi(b, a) = \sum_{j=1}^k P_j(b, a)w_j. \end{cases}$$

شاخص های ارجحیت تجمعی:

تعریف می کنیم:

که $\pi(a, b)$ نشان می دهد a تحت همه معیارها چقدر از b ارجح تر است.

$\pi(a, b)$ معمولاً مقدار مثبتی می باشد. هم چنین داریم:

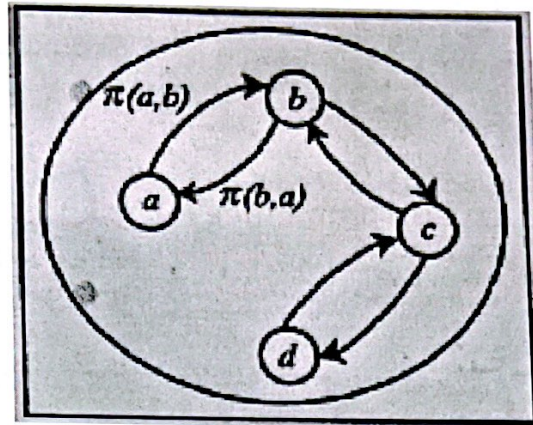
$$\pi(a, a) = 0.$$

$$0 < \pi(a, b) < 1$$

$$0 < \pi(b, a) < 1$$

$$0 < \pi(a, b) + \pi(b, a) < 1$$

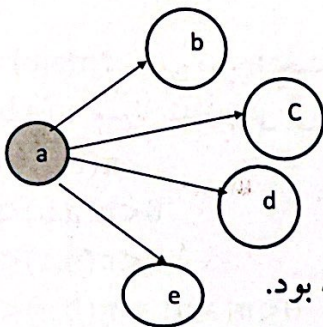
به محض این که $\pi(a,b)$ و $\pi(b,a)$ برای هر جفت از گزینه های A محاسبه شود، یک گراف کامل برتری مقدار گذاری شده، شامل دو کمان بین هر دو گره به دست می آید.



جریان های برتری:

• هر گزینه مانند a با $(n-1)$ گزینه دیگر در مجموعه A مواجه است. دو جریان برتری را تعریف می کنیم:

۱- جریان مثبت برتری: بیان می کند یک گزینه مانند a چه قدر از گزینه های دیگر برتر است.

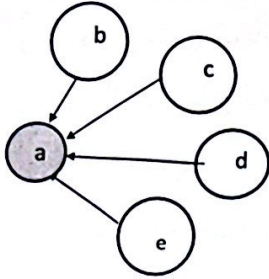


$$\phi^+(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(a,x)$$

هرچه این مقدار بیشتر باشد این گزینه برتر خواهد بود.

۲- جریان منفی برتری در گزینه a: بیان می کند که گزینه های دیگر چه قدر بر گزینه a برتر می باشند.

هرچه این مقدار کمتر باشد این گزینه بهتر خواهد بود.



$$\phi^-(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(x, a)$$

رتبه بندی جزئی | promethee:

• رتبه بندی جزئی | promethee از جریان های برتری مثبت و منفی به دست می آیند. این جریان ها معمولاً رتبه بندی مشابهی را ارائه نمی کنند. در واقع promethee فصل مشترک آنهاست.

$$\left\{ \begin{array}{l} aP^I b \\ aI^I b \\ aR^I b \end{array} \right. \text{ iff } \left\{ \begin{array}{l} \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ and } \phi^-(a) < \phi^-(b), \text{ or} \\ \phi^+(a) = \phi^+(b) \text{ and } \phi^-(a) < \phi^-(b), \text{ or} \\ \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ and } \phi^-(a) = \phi^-(b); \\ \phi^+(a) = \phi^+(b) \text{ and } \phi^-(a) = \phi^-(b); \\ \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ and } \phi^-(a) > \phi^-(b), \text{ or} \\ \phi^+(a) < \phi^+(b) \text{ and } \phi^-(a) < \phi^-(b); \end{array} \right.$$

- که p و a و R به ترتیب نشان دهنده ارجحیت، بی تفاوتی و غیر قابل مقایسه بودن است.
- رابطه $a p^1 b$ نشان می دهد برتری a ناشی از ضعف b است.
- وقتی که $a I^1 b$ ، جریان های مثبت و منفی با هم برابرند.
- وقتی $a R^1 b$ قدرت بیشتر یک گزینه ناشی از ضعف گزینه دیگر است. در چنین حالتی اطلاعاتی که توسط دو جریان به وجود می آیند سازگار نیستند.

روش I promethee در رتبه بندی محتاط است چرا که در این حالت تصمیم نمی گیرد کدام گزینه بهتر است و انتخاب گزینه برتر بر عهده تصمیم گیرنده است.

رتبه بندی کامل در II promethee:

- معمولاً تصمیم گیرنده نیاز به رتبه بندی کامل دارد.
- در این روش جریان خالص برتری به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\emptyset(a) = \emptyset^+(a) - \emptyset^-(a)$$

- هر چه جریان خالص گزینه ای بهتر باشد آن گزینه بهتر است. بنابراین:

$$\begin{cases} a p^1 b & \text{iff } \phi(a) > \phi(b), \\ a I^1 b & \text{iff } \phi(a) = \phi(b). \end{cases}$$

		w1	w2	w3	w4	w5
		0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
		cost	target	dur	eff	manp
۱	news	60	900	22	51	8
۲	herald	30	520	31	13	1
۳	panels	40	650	20	58	2
۴	mailing	92	750	60	36	3
۵	cmm	52	780	58	90	1
۶	ncb	80	920	4	75	6
	q	10		10		
	p	30	100			
	s				50	
	shape	5	3	2	6	1

$$p_j(a,b) = F(d_j(a,b))$$

$$p_1(1,2) = 0 \quad - \quad p_1(1,3) = 0 \quad - \quad p_1(1,4) = 1$$

$$d_1(1,2) = -(40 - 30) = -10 \rightarrow p_1(1,2) = 0$$

← معیار منفی

- $p_1(2,1)$
- $p_1(2,3)$
- $p_1(2,4)$
- $p_1(2,5)$
- \vdots
- $\}$

	min	max	max	max	Min
	cost	target	duration	eff	Manp
d(1,2)	30	380	-9	38	7
d(1,3)	20	250	2	-7	6
d(1,4)	-32	150	-38	15	5
d(1,5)	8	120	-36	-39	7
d(1,6)	-20	-20	18	-24	2

برای مثال:

$$p_1(1,2) = 0, p_2(1,2) = 1,$$

$$p_3(1,2) = 0, p_4(1,2) = 1 - e^{-(-1^2/25^2)} = 1 - e^{-(-38^2/250^2)} = 0.25, p_5(1,2) = 0,$$

$$\pi(1,2) = 0.2(1 + 0.25) = 0.25$$

• در **promethee II** همه گزینه ها قابل مقایسه هستند و گزینه ی غیر قابل مقایسه ای باقی نمی ماند.

• از خواص این روش می توان موارد زیر را بر شمرد:

$$-1 \leq \phi(a) \leq 1 \quad \sum_{a \in A} \phi(a) = 0$$

• وقتی $\phi(a) > 0$ به این معنی است که گزینه های زیادی وجود دارند که تحت همه معیارها مغلوب گزینه a هستند و وقتی که $\phi(a) < 0$ به این معنی است که گزینه های زیادی وجود دارند که تحت همه معیارها بر a غلبه دارند.

مثال: تبلیغات یک شرکت سازنده دوچرخه:

Table 2

Criteria	C1	C2	C3	C4	C5
	cost	target	durat.	effic.	manp.
min/max	min	max	max	max	min
News	60	900	22	51	8
Herald	30	520	31	13	1
Panels	40	650	20	58	2
Mailing	92	750	60	36	3
CMM	52	780	58	90	1
NCB	80	920	4	75	6

وزن معیارها برابر می باشد. توابع ارجحیت ۵ معیار به ترتیب عبارتند از: ۵ و ۳ (۷ شکل) و ۲ (u شکل) و ۶ (گوسی) و ۱ (linear)

هم چنین داریم:

$$p_1(1,3) = 0, p_2(1,3) = 1, \\ p_3(1,3) = 0, p_4(1,3) = 0, p_5(1,3) = 0, \pi(1,3) = 0.2(1) = 0.2$$

$$p_1(1,4) = 1, p_2(1,4) = 1, p_3(1,4) = 0, p_4(1,4) = 1 - e^{-\left(\frac{4^2}{2^2}\right)} = 0.44, p_5(1,4) = 0, \pi(1,4) = 0.4$$

$$p_1(1,5) = 0, p_2(1,5) = 1, \\ p_3(1,5) = 0, p_4(1,5) = 0, p_5(1,5) = 0, \pi(1,5) = 0.2(1) = 0.2$$

$$p_1(1,6) = \frac{20-10}{20} = 0.5, p_2(1,6) = 0, p_3(1,6) = 1, p_4(1,6) = 0, p_5(1,6) = 0, \pi(1,6) = 0.3$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\varphi^+(1) = 1/5 \left(\sum_{i=1}^6 \pi(1, i) \right) = 0.21$$

و سپس جریان منفی برتری برای گزینه اول محاسبه می شود. که عبارت است از:

$$\varphi^-(1) = 1/5 \left(\sum_{i=1}^6 \pi(i, 1) \right) = 0.36$$

به همین ترتیب برای هر گزینه جریان مثبت و منفی برتری محاسبه می شود.
حال با توجه به روش I promethee داریم:

رتبه بندی جزئی:

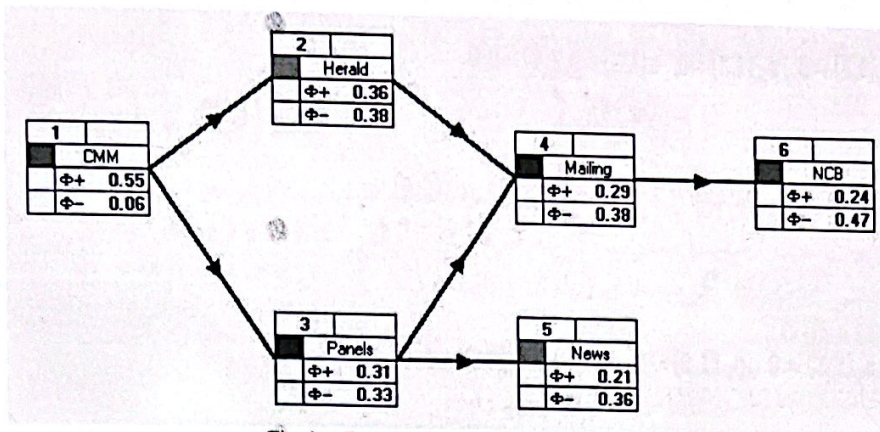
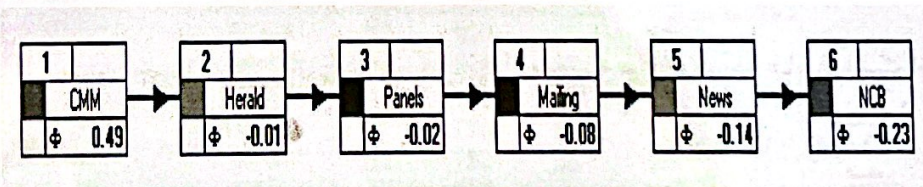


Fig.1 – PROMETHEE I partial ranking

سپس با محاسبه جریان خالص برتری داریم:
رتبه بندی کامل:



MODM

(Multi-objective)

چهار هدف

شکل ریاضی مدل های چندهدفه

$$\begin{array}{ll} \text{Max(Min)} & f_1(x_j) \\ \text{Max(Min)} & f_2(x_j) \\ & \vdots \\ \text{Max(Min)} & f_k(x_j) \\ \text{St:} & \end{array}$$

$$\text{(محدودیت های عملیاتی)} \quad g_i(x_j) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{(محدودیت های نامنفی)} \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

که x_j متغیر تصمیم j ، n تعداد متغیرهای تصمیم، $g_i(x_j)$ محدودیت نام، m تعداد محدودیت ها، و b_i مقداری نامنفی و ثابت است.

جواب بهینه: جوابی است که همزمان تمامی اهداف را بهینه کند. به این جواب گاهی جواب برتر نیز گفته می‌شود. در صورتی که جواب بهینه برای مساله وجود نداشته باشد، مفاهیم بعدی مطرح می‌شود.

جواب نامطلوب: جواب نامطلوب جوابی است که نمی‌توان هیچ تابع هدفی را بهبود بخشید بدون آن که هم‌زمان باعث دور شدن حداقل یکی از اهداف دیگر شود.

جواب برگزیده: جواب برگزیده جواب نامطلوبی است که توسط تصمیم گیرنده (با توجه به برخی از اهداف اضافی) به عنوان جواب نهایی انتخاب می‌شود.

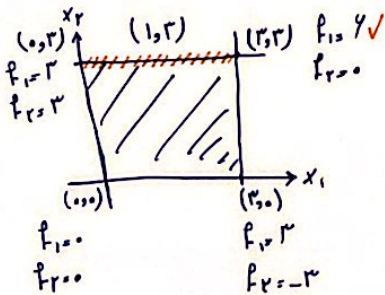
جواب رضایت بخش: جواب رضایت بخش، جوابی است که سطوح مورد نظر اهداف را برای تصمیم گیرنده محقق می‌سازد. جواب رضایت بخش لزوماً جواب نامطلوبی نیست. این جواب برای تصمیم گیرندگانی که دانش و توانایی شان محدود است مطرح می‌شود.

دو مساله‌ی چند هدفی زیر را، که دارای محدودیت‌های یکسانی هستند، در نظر بگیرید.

مثال:

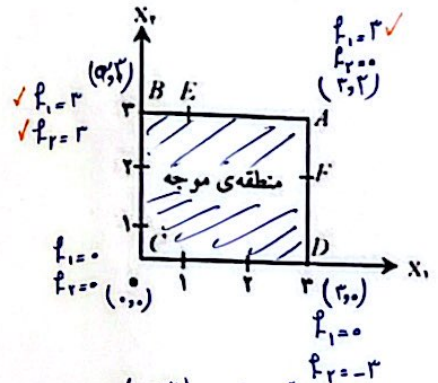
$$\begin{aligned} \text{Max } f_1 &= x_1 + x_2 \\ \text{Max } f_2 &= -x_1 + x_2 \\ \text{st:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{(الف)}$$



$$\begin{aligned} \text{Max } f_1 &= x_2 \\ \text{Max } f_2 &= -x_1 + x_2 \\ \text{st:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{(ب)}$$



تشریح تصمیم‌گیرنده مهم است.

نامطلوب $\left\{ \begin{aligned} (3,3) &\rightarrow f_1=6, f_2=0 \\ (0,3) &\rightarrow f_1=3, f_2=3 \end{aligned} \right.$

جواب بهینه $(0,3) \rightarrow f_1=3, f_2=3$

با توجه به منطقی موجه، مساله ی «ب» دارای یک جواب بهینه است. جواب بهینه ی آن در نقطه ی B قرار دارد که $x_1=0$ و $x_2=3$ که در آن $f_1=3$ و $f_2=3$ است.

مختصات گوشه های موجه	$f_1 = x_2$	$f_2 = -x_1 + x_2$
A (3, 3)	3	•
B (0, 3)	3 \rightarrow Max	3 \rightarrow Max
C (0, 0)	•	•
D (3, 0)	•	-3

$$\begin{aligned} \text{Max } f_1 &= x_2 \\ \text{Max } f_2 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$$

st:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(ب)

اکنون مساله ی «الف» را در نظر بگیرید. جواب بهینه برای این مساله وجود ندارد. نقطه ی A هدف اول را بهینه می سازد و نقطه ی B هدف دوم را. بنابراین جوابی وجود ندارد که همزمان دو تابع را بهینه سازد.

مختصات گوشه های موجه	$f_1 = x_1 + x_2$	$f_2 = -x_1 + x_2$
A (3, 3)	6 \rightarrow Max	•
B (0, 3)	3	3 \rightarrow Max
C (0, 0)	•	•
D (3, 0)	3	-3

$$\begin{aligned} \text{Max } f_1 &= x_1 + x_2 \\ \text{Max } f_2 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$$

st:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(الف)

بنابراین در مساله ی «الف» مفهوم جواب های نامغلوب مطرح می شود. دو نقطه ی A و B از جمله ی جواب های نامغلوبند، زیرا هر کدام یکی از توابع هدف را بهینه می سازد.

(تمامی جواب‌ها به ازای $x_1=3$ و $0 \leq x_2 \leq 3$ نامغلوب هستند). دو نقطه‌ی C و D جواب‌های نامغلوب نیستند، زیرا نقاط A و B لا اقل از نظر یک هدف بر آن‌ها برتری دارند. ممکن است تصمیم‌گیرنده از بین جواب‌های نامغلوب، نقطه‌ی I را به عنوان جواب نهایی انتخاب کند، در این صورت به آن جواب برگزیده گفته می‌شود.

$$I:(1,3) \rightarrow f_1=1+3=4 \text{ و } f_2=-1+3=2$$

اگر تصمیم‌گیرنده برای تابع هدف اول مقداری برابر ۵ و برای هدف دوم مقدار I' را بپذیرد، در این صورت نقطه‌ی I'

$$I':(3,2) \rightarrow f_1=3+2=5 \text{ و } f_2=-3+2=-1$$

نقطه‌ای رضایت‌بخش تلقی می‌شود.

روش‌های حل مسائل MODM

در تصمیم‌گیری چندهدفه، روش‌های مختلفی برای حل این گونه مسایل وجود دارد که جواب هر روش با روش دیگر لزوماً یکسان نیست، زیرا مفروضات هر روش و همچنین میزان مشارکت تصمیم‌گیرنده در فرایند حل مساله متفاوت است. در ادامه پنج روش معروف و در عین حال نسبتاً ساده برای حل مسایل چندهدفه مطرح خواهد شد. این روش‌ها عبارتند از:

- روش تبدیل تابع هدف به محدودیت،
- روش وزن‌دهی به اهداف،
- روش اولویت مطلق،
- روش معیار جامع،
- روش برنامه‌ریزی آرمانی.

روش اول:

روش تبدیل تابع هدف به محدودیت

در این روش از بین توابع هدف مختلف، یکی انتخاب و سایر توابع هدف با در نظر گرفتن مقادیری، که تصمیم گیرنده یا مدل ساز تعیین می کند، به محدودیت تبدیل می شوند و مساله به یک مدل برنامه ریزی خطی یک هدفه تبدیل می شود و به طریقه‌ی معمول برنامه ریزی خطی (روش ترسیمی یا سیمپلکس) حل می شود.

مثال:

اگر تابع هدف اول (f_1) مُعرف سود بوده و تابع هدف دوم (f_2) میزان اشتغال را نشان دهد و تصمیم گیرنده تمایل داشته باشد میزان سودش حداقل ۱۸ واحد پولی باشد، با روش تبدیل تابع هدف به محدودیت، مساله را حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{Max } f_1 &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{Max } f_2 &= 10x_1 + 5x_2 \\ \text{st:} \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 20 \\ x_1 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Max } f_1 &= 10x_1 + 5x_2 \\ \text{st:} \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 18 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 20 \\ x_1 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

اگر این مساله را حل کنیم جواب بهینه‌ی آن به گونه‌ی زیر خواهد بود:

$$x_1^* = 7 \quad , \quad x_2^* = 2 \quad , \quad f_1^* = 18$$

روش دوم:

روش وزندهی به اهداف

weighting method

در روش «وزنی دهی به اهداف»، تصمیم گیرنده به اهداف مختلف وزن (ضریب اهمیتی) اختصاص می‌دهد و سپس توابع هدف را در وزن‌های مربوطه ضرب و در نهایت تابع هدف واحدی به وجود می‌آورد. در وزن دهی به اهداف چند نکته مهم است:

۱- وزن هر هدف W_i مقداری بین صفر و یک و جمع وزن‌ها باید یک باشد ($\sum W_i = 1$).

۲- تمامی توابع هدف به صورت Max یا Min باشند.

۳- ضرایب متغیرهای تصمیم در هر تابع هدف با تابع هدف دیگر باید هم‌مقیاس باشند و

بنابراین دارای یک رده و بزرگی باشند.

در مورد نکته اول، برای نمونه اگر دو هدف وجود داشته باشد به طوری که اولی ۳ برابر دومی مهم باشد وزن هر هدف به صورت زیر حساب می‌شود:

$$w_1 = \frac{3}{3+1} = 0.75 \quad , \quad w_2 = \frac{1}{3+1} = 0.25$$

در مورد نکته دوم، اگر یکی از توابع هدف به صورت Min و دیگری به صورت Max باشد، می‌توان هدف Min را با ضرب آن در یک علامت منفی به Max تبدیل کرد تا هر دو هدف Max باشند. $Min f \Rightarrow Max (-f)$

اما در مورد نکته سوم، اگر ضرایب دارای یک مقیاس اندازه‌گیری نباشند اساساً جمع پذیر نیستند. برای نمونه جمع مقادیر سود (بر حسب ریال) و مقادیر میزان اشتغال (بر حسب نفر) بی‌مفهوم است. در این حالت لازم است ضرایب هر تابع هدف را به‌هم‌نگار کرده یعنی هر یک از ضرایب یک تابع هدف را بر مجموع ضرایب آن تابع تقسیم کرد.

مثال:

شرکتی دو اسباب‌بازی تولید می‌کند و می‌خواهد در مورد میزان تولید آن دو (A و B) تصمیم بگیرد. اسباب‌بازی A نسبت به B دارای کیفیتی بهتر است. سود مورد انتظار بر واحد اسباب‌بازی A و B به ترتیب ۴۰۰۰ و ۳۰۰۰ تومان است. هر واحد اسباب‌بازی A سه برابر هر واحد B زمان می‌برد. اگر تمام اسباب‌بازی‌ها از نوع B تولید شود، شرکت می‌تواند ۵۰۰ تا از آن را تولید کند. با توجه به موجودی مواد اولیه، جمع تولید روزانه این دو اسباب‌بازی نمی‌تواند از ۴۰۰ واحد بیشتر باشد. فرض بر این است که هر چقدر اسباب‌بازی تولید شود به فروش می‌رسد. مدیر شرکت در پی دو هدف است:

(۱) کسب حداکثر سود،

(۲) حداکثر کردن تولید A.

ضمن تهیه مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه برای این مساله، با فرض این که هدف سود سه برابر هدف تولید A اهمیت داشته باشد، با روش وزن‌دهی به اهداف، مساله را حل کنید.

اگر x_1 و x_2 به ترتیب میزان تولید اسباب‌بازی A و B تعریف شود، مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه برای این مساله به گونه‌ی زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Max } f_1 &= 4000x_1 + 3000x_2 \\ \text{Max } f_2 &= x_1 \\ \text{st:} \\ 3x_1 + x_2 &\leq 500 \\ x_1 + x_2 &\leq 400 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

د > تابع هدف اول
-۱ > تابع هدف دوم

رغبت بیشتر

$$f_1 = \frac{5000 \cdot \alpha_1 + 3000 \cdot \alpha_2}{12} = \frac{5}{12} \alpha_1 + \frac{3}{12} \alpha_2$$

۱۲۰۰۰ ← ۷۰۰۰ + ۵۰۰۰

$$f_2 = \frac{10 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2}{12} = \frac{10}{12} \alpha_1 + \frac{2}{12} \alpha_2$$

حرکت واحد عمل B ← $\alpha_B \times t_B$

حرکت واحد عمل A ← $\alpha_A = 3t_B$

زمان تولید اسباب‌بازی B = ۳ × زمان تولید اسباب‌بازی A

$$\alpha_A \times 3t_B + \alpha_B \times t_B \leq 500 \times t_B$$

$\sum w_i = 1$
۰.۷۵ ← ۰.۲۵

با توجه به این که هدف اول (سود) سه برابر هدف دوم (تولید A) اهمیت دارد، پس:

$$w_1 = \frac{3}{3+1} = 0.75, \quad w_2 = \frac{1}{3+1} = 0.25$$

نکته‌ی دیگر این که واحدهای هدف اول به تومان و واحدهای هدف دوم تعداد اسباب‌بازی است. این دو هدف جمع‌پذیر نیستند. برای این کار ضرایب متغیرهای تابع هدف اول را به‌منجار می‌کنیم یعنی آن را بر ۷۰۰۰ تقسیم می‌کنیم (چون که جمع ضرایب متغیرهای تابع هدف دوم برابر یک است این کار برای این کار برای این کار لازم نیست).

$$f_1 = 4000x_1 + 3000x_2 \rightarrow f_1 = \frac{4}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 0.75 \left(\frac{4}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 \right) + 0.25(x_1) \\ &= 0.42857x_1 + 0.32142x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } f_1 &= 4000x_1 + 3000x_2 \\ \text{Max } f_2 &= x_1 \\ \text{st:} \\ 3x_1 + x_2 &\leq 500 \\ x_1 + x_2 &\leq 400 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 0.42857x_1 + 0.32142x_2 \\ \text{st:} \\ 3x_1 + x_2 &\leq 500 \\ x_1 + x_2 &\leq 400 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

با حل این مدل، جواب نهایی به گونه‌ی زیر خواهد بود:

$x_1=500, x_2=350, Z=14675$

$f_1 = 4000(500) + 3000(350) = 1,750,000$

$f_2 = 500$

$$\begin{aligned} 0.75 &= \frac{3}{4+1} \left\{ \begin{aligned} \text{max } f_1 &= 4000 \alpha_A + 3000 \alpha_B \\ \text{max } f_2 &= \alpha_A \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{max } = 0.75 \left(\frac{4}{7} \alpha_A + \frac{3}{7} \alpha_B \right) + 0.25 \alpha_A \\ \text{s.t.} \\ \alpha_A \times 3t_B + \alpha_B \times t_B &\leq 500 t_B \\ \alpha_A + \alpha_B &\leq 400 \end{aligned}$$

روش سوم:

روش اولویت مطلق

absolute priorities method

گاهی تصمیم گیرنده تمایل ندارد که وزن هر هدف را مشخص کند و روش وزندهی به اهداف را روشی ذهنی می‌پندارد. ولی مایل است اهداف را اولویت‌بندی کند. در این صورت روش اولویت مطلق^۱ مطرح می‌شود.

در این روش مساله را تنها با هدفی که اولویت اول (مهم‌تر) دارد، حل می‌کنیم و جواب بهینه را مشخص می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد تابع هدف اولویت اول را برابر جواب بهینه به دست آمده قرار داده و به عنوان یک محدودیت به مساله اضافه کرده و مساله را با در نظر گرفتن تابع هدف با اولویت دوم حل می‌کنیم. این رویه به همین صورت برای اولویت‌های بعدی تکرار می‌شود.

روش چهارم:

روش معیار جامع

Global criterion method

در این روش برخلاف روش‌های قبلی نیازی به اولویت‌بندی اهداف، وزن‌دهی، یا تبدیل اهداف به محدودیت نیست. روش معیار جامع، بسته به مورد، مجموع توان اول، دوم، ... انحرافات نسبی اهداف از مقدار بهینه‌شان را حداقل می‌کند. در این روش، تابع هدف که همواره در پی حداقل کردن آنیم به گونه‌ی زیر است:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^k \left(\frac{f_i^* - f_i}{f_i^*} \right)^p$$

که در آن f_i^* مقدار بهینه‌ی تابع هدف i ام (بدون در نظر گرفتن اهداف دیگر) است.

پیشنادهای مختلفی برای مقدار P وجود دارد. برخی $P=1$ را مناسب می‌دانند (یعنی مجموع نسبی انحرافات حداقل شود) و برخی نیز $P=2$ را مناسب‌تر می‌دانند (یعنی مجموع توان دوم انحرافات حداقل شود). هدف توان دوم رساندن اهمیت بیشتر دادن به انحرافات بزرگ‌تر است. نکته: دقت کنید که در روش معیار جامع باید همه اهداف Max باشند.

مثال:

دوباره مثال ۲-۳ (اسباب بازی) را در نظر بگیرید که مدل چندهدفی آن در زیر آورده

می شود:

$$\text{Max } f_1 = 4000x_1 + 3000x_2$$

$$\text{Max } f_2 = x_1$$

st:

$$2x_1 + x_2 \leq 500$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

با روش معیار جامع و به ازای $P=1$ و همچنین $P=2$ مساله را حل کنید.

$$f_1 \rightarrow f_1^* = 1, 2, \dots$$

$$f_2 \rightarrow f_2^* = 250$$

$$\min \left(\frac{f_1^* - f_1}{f_1^*} \right)^2 + \left(\frac{f_2^* - f_2}{f_2^*} \right)^2$$

معمولا بران ایچتو

$P=1$
 $P=2$
 $P=3$

$$\min Z = \left(\frac{1, 2, \dots - [4000x_1 + 3000x_2]}{1, 2, \dots} \right)^2 + \left(\frac{250 - [x_1]}{250} \right)^2$$

s.t

$$2x_1 + x_2 \leq 500$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ابتدا دو مساله برنامه ریزی خطی یک هدفی زیر حل می شود:

مساله ۱

$$\text{Max } f_1 = 4000x_1 + 3000x_2$$

st:

$$2x_1 + x_2 \leq 500$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

جواب بهینه مساله ۱:

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 300, \quad f_1 = 1,300,000$$

مساله ۲

$$\text{Max } f_2 = x_1$$

st:

$$2x_1 + x_2 \leq 500$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

جواب بهینه مساله ۲:

$$x_1 = 250, \quad x_2 = 0, \quad f_2 = 250$$

اکنون می توان تابع هدفی جهت حداقل کردن مجموع انحرافات نسبی تهیه و بر اساس آن و با توجه به محدودیت ها، مساله را حل کرد.

حالت اول: ($p=1$) مجموع انحرافات نسبی حداقل شود.

$$\text{Min } Z = \frac{1,300,000 - (4000x_1 + 3000x_2)}{1,300,000} + \frac{750 - x_1}{750}$$

$$= 1 - 0.0030769x_1 - 0.0023077x_2$$

st:

$$2x_1 + x_2 \leq 500$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1=750, \quad x_2=0, \quad f_1=1,000,000, \quad f_2=750$$

حالت دوم: ($p=2$) مجموع انحرافات نسبی حداقل شود.

$$\text{Min } Z = \left[\frac{1,300,000 - (4000x_1 + 3000x_2)}{1,300,000} \right]^2 + \left[\frac{750 - x_1}{750} \right]^2$$

st:

$$2x_1 + x_2 \leq 500$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1=330/7, \quad x_2=38/7, \quad f_1=1,039,000, \quad f_2=330/7$$

روش پنجم:

بهترین و پراستاده ترین روش → برنامه ریزی آرمانی

Goal Programming (GP)

تفاوت های بین LP و GP

شرح	LP	GP
اهداف	یک هدف اولیه - که باید حداکثر یا حداقل شود.	تناسی اهداف (آرمانها) رتبه بندی می شوند.
محدودیتها	انحرافات ناپذیر، هیچ گونه انحرافی مجاز نیست.	متنطف، انحرافات پذیرفته شده و محدودیتها مثل می شوند.
هدف	حداکثر (حداقل) کردن مقدار تابع هدف اولیه	حداقل کردن مجموع انحرافات های نامطلوب (که بر حسب اهمیت شان وزن گرفته اند)
مقصد	بهبه سازی	رضایت بخشی
برنامه های وابسته ای	خیلی کارا، بسته های نرم افزاری مختلف	غیر کارا، محدودی بسته های نرم افزاری
کاربردها	زیاد و متنوع	در حال افزایش



آرمان (Goal) → Goal Programming
 محدودیت سخت (hard) → Linear programming

مفاهیم برنامه ریزی آرمانی

LP → متغیرهای تصمیم
 تابع هدف
 محدودیت های سخت

شالوده ی GP بر اساس سه مفهوم است:

GP → متغیرهای تصمیم
 تابع هدف
 محدودیت های سخت → آرمانی

الف) انحرافات

ب) اولویت بندی آرمانها

ج) ایجاد آرمانها

Goal 1: $10,000,000 \geq$ سود

d^+ انحراف بیشتر تحقق $11,000,000$ → سود

d^- انحراف کمتر تحقق $9,000,000$ → سود

d^- انحراف کمتر تحقق = انحراف نامطلوب $10,000,000$ → سود

$\min Z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^- + P_4 d_4^+$ → کمترین برای رتبه اولویت است. می توان جای P از وزن استاندارد کرد.

انحراف کاری ≤ 1000

انحراف کمتر تحقق $+d^- - d^+ = 1000$

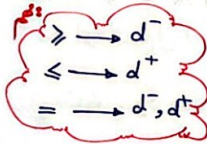
انحراف نامطلوب: انحراف بیشتر تحقق 1100

انحراف کمتر تحقق 18

انحراف بیشتر تحقق 22

سطح موجودی $(d^- - d^+) = 20$

انحرافات مقادیری هستند که آرمانها از مقدار مورد نظر خود کمتر (یا بیشتر) محقق



شده اند. فرض کنید سه آرمان به صورت زیرند:

- کسب سودی معادل ۱۰ میلیون تومان در هر ماه.
- اضافه کاری ماهانه از ۱۰۰۰ ساعت بیشتر نشود.
- سطح موجودی دقیقاً معادل ۲۰ واحد باشد.

۱۰۰۰۰۰۰ ... ۱۰

۳۰۰۰۰۰۰۰ ... ۱۰ ... ۱۰۰۰۰۰۰۰

(۲۰۰۰۰۰۰۰) → ۱۰۰۰۰۰۰۰ ... ۱۰۰۰۰۰۰۰
 انحراف بیشتر تحقق

۱۰۰۰۰۰۰۰ ... ۹۰۰۰۰۰۰۰ → (۱۰۰۰۰۰۰۰)
 انحراف کمتر تحقق (نامطلوب) در ۲۰

انحرافات های بیشتر محقق^۱ میزانی را اندازه گیری می کنند که بیشتر از مقدار آرمان است. این انحرافات را با متغیر d_i^+ نشان می دهیم.

انحرافات های کمتر محقق^۱ میزانی را اندازه گیری می کنند که کمتر از مقدار آرمان بوده است. این انحرافات را با d_i^- نشان می دهیم.

انحراف‌های مطلوب و نامطلوب. انحراف می‌تواند مطلوب یا نامطلوب باشد. برای نمونه در مثال سود، d^+ مطلوب و d^- نامطلوب است. در مثال اضافه‌کاری d^+ نامطلوب و d^- مطلوب است. در مورد سطح موجودی هر دو d^+ و d^- نامطلوب است زیرا ما را از آرمان دقیقاً ۲۰ واحد دور می‌کند. در همه‌ی موارد، روابط زیر را مشاهده می‌کنیم:

انحراف‌های نامطلوب	نوع محدودیت
d_i^-	\geq
d_i^+	\leq
d_i^+ و d_i^-	$=$

بر طبق تعریف مان، کمتر محقق زمانی نامطلوب است که با محدودیت \geq مواجه باشیم. هم‌چنین بیشتر محقق هنگامی نامطلوب است که با محدودیت \leq مواجه باشیم. در حالت‌های (=) هم بیشتر و هم کمتر محقق نامطلوب هستند.

ب) اولویت‌بندی آرمان‌ها

- رتبه‌بندی ترتیبی. در این روش آرمان‌ها بر حسب اهمیت‌شان فهرست می‌شوند، از P_1 (اول حرف Priority) برای نشان دادن شماره‌ی اولویت استفاده می‌کنیم، برای نمونه P_1 نشان می‌دهد که آرمان مورد نظر از بیشترین اهمیت برخوردار بوده و انحراف نامطلوب از آن در ابتدا باید حداقل شود. P_2 نشان می‌دهد آرمان مورد نظر از اولویت دوم برخوردار است، و به همین ترتیب.
- رتبه‌بندی اصلی. در این روش وزن مشخصی به هر یک از انحرافات داده می‌شود. این وزن‌ها اهمیت نسبی هر انحراف را نشان می‌دهند.
- ترکیبی از این دو. این روش زمانی که تابع هدف معرفی می‌شود، تشریح خواهد شد.

هر تابع هدف مدل GP به دنبال آن است که مجموع انحراف‌های نامطلوب موزون را برحسب اهمیت‌شان حداقل کند. با این وجود اگر ابعاد (مقیاس) هر آرمانی با دیگری متفاوت باشد چنین حاصل جمعی ممکن است مورد توجه نباشد. برای نمونه اگر d_1 بیانگر انحراف از سود (برحسب ریال)، d_2 بیانگر انحراف از اضافه کاری (برحسب ساعت)، و d_3 نشانگر انحراف از میزان موجودی انبار (بر حسب واحد کالا) باشند، در این شرایط مناسب‌ترین روش، رتبه‌بندی ترتیبی است.

ساختار برنامه‌ریزی آرمانی

مدل GP متشکل از ۴ جزء به قرار زیر است:

الف) متغیرهای تصمیم،

ب) محدودیت‌های سیستمی،

ج) محدودیت‌های آرمانی،

د) تابع هدف.

الف) متغیرهای تصمیم
متغیرهای تصمیم مدل GP همانند متغیرهای تصمیم مدل LP هستند. متغیرهای تصمیم، متغیرهایی هستند که تصمیم گیرنده درصدد تعیین مقدار آنهاست. برای نمونه در مساله‌ی ترکیب تولید، میزان تولید هر محصول یک متغیر تصمیم است. در مساله‌ی تبلیغات، تعداد آگهی در هر رسانه یک متغیر تصمیم تلقی می‌شود، و در مساله‌ی ترکیب فلزات میزان استفاده از هر فلز در ترکیب مورد نظر یک متغیر تصمیم است.

ب) محدودیت‌های سیستمی
محدودیت‌های سیستمی مدل GP همانند محدودیت‌های مدل LP هستند، یعنی امکان تخطی از چنین محدودیت‌هایی وجود ندارد و جواب مساله (مقدار متغیرهای تصمیم) باید در آنها صدق کند. برای مثال اگر در مساله‌ی تبلیغات میزان بودجه جهت تبلیغ محدود به مبلغی مشخص است و امکان تبلیغ با صرف هزینه‌ای بیش از آن مبلغ به هیچ عنوان امکان‌پذیر نباشد، این محدودیت (بودجه)، محدودیتی سیستمی خواهد بود. در حل مساله، محدودیت‌های سیستمی قبل از هر نوع محدودیت آرمانی باید مورد توجه قرار گیرند.

ج) محدودیت‌های آرمانی
محدودیت‌های آرمانی سطوح مورد نظر از هر هدف را نشان می‌دهند.

کسب سودی معادل ۱۰ میلیون تومان مورد نظر است. متغیرهای تصمیم میزان تولید هر محصول A، B، و C است. هر واحد محصول A، B، و C به ترتیب ۰/۵، ۰/۲، و ۰/۱ میلیون سود دارد. محدودیت آرمانی مربوطه را بنویسید.

$$0.5x_A + 0.2x_B + 0.1x_C \geq 10$$

ولی در برنامه‌ریزی آرمانی، که انحراف از ۱۰ میلیون تومان پذیرفتنی است، این گونه خواهد بود:

$$0.5x_A + 0.2x_B + 0.1x_C + d_1^- - d_1^+ = 10$$

معمولاً d_1^- را برداشته و به جای آن $(d_1^- - d_1^+)$ می‌نویسیم.
در صورتی که مطلوب ما است.

$$\min z = d_1^-$$

↓
تأثیر آن حداقل به صفر است

در مورد محدودیت آرمانی پیش ۳ حالت وجود دارد:

الف) مقدار سود $(0.5x_A + 0.2x_B + 0.1x_C)$ دقیقاً ۱۰ میلیون تومان باشد که در این صورت هر دو متغیر انحرافی صفر می‌شوند $(d_1^- = d_1^+ = 0)$.

ب) مقدار سود $(0.5x_A + 0.2x_B + 0.1x_C)$ کمتر از ۱۰ میلیون تومان باشد (کمتر محقق)، برای مثال ۸ میلیون تومان، که در این صورت متغیر انحرافی d_1^- مقدار مثبت و d_1^+ مقدار صفر خواهد گرفت $(d_1^- = 2, d_1^+ = 0)$.
 $8 + d_1^- - d_1^+ = 10 \rightarrow d_1^- - d_1^+ = 10 - 8 = 2$

ج) مقدار سود $(0.5x_A + 0.2x_B + 0.1x_C)$ بیشتر از ۱۰ میلیون تومان باشد (بیشتر محقق)، برای مثال ۱۲ میلیون تومان، که در این صورت متغیر انحرافی d_1^- مقدار صفر و d_1^+ مقدار مثبت خواهد گرفت.
 $12 + d_1^- - d_1^+ = 10 \rightarrow d_1^- - d_1^+ = -2$

د) تابع هدف
 تابع هدف در مدل (IL) به گونه‌ای تهیه می‌شود که مجموع وزنی انحراف‌های نامطلوب را حداقل کند. بدین جهت، ساختار تابع هدف بستگی به سیستم وزندهی به آرمان‌ها دارد که حالت‌های زیر برای آن قابل تصور است:

۱. مسأله‌ای بایک آرمان. در این حالت تابع هدف می‌تواند به گونه‌ی زیر باشد:

$$\text{Min } Z = d_1^+$$

که d_1^+ انحراف نامطلوب است (اگر d_1^- انحراف نامطلوب باشد، تابع هدف $Z = d_1^-$ می‌شود، اگر هم d_1^- و هم d_1^+ نامطلوب باشد، $Z = d_1^- + d_1^+$ خواهد شد).

۲. چند آرمان، رتبه‌بندی ترتیبی. در این حالت تابع هدف به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{Min } Z = p_1 d_1^+ + p_2 d_2^- + p_3 d_3^- + \dots$$

که p_1 معرف اولویت نام است (و p_1 مهم‌ترین اولویت را نشان می‌دهد)، برای مثال $p_1 d_1^+$ نشان می‌دهد که اولویت اول حداقل کردن d_1^+ است. $p_2 d_2^-$ نشان می‌دهد که اولویت دوم حداقل کردن d_2^- است.

چند حالت مختلف برای آرمانی که دو متغیر انحرافی نامطلوب دارد قابل تصور است:

نخست، وضعیتی همانند $p_1 d_1^- + p_2 d_1^+$ نشان می‌دهد که هر دو متغیر انحرافی آرمان اول نامطلوبند، ولی اولویت با d_1^- است. یعنی ابتدا باید d_1^- حداقل شود، سپس d_1^+ .
 دوم، وضعیتی همانند $p_1 (d_1^- + d_1^+)$ نشان می‌دهد که هر دو متغیر انحرافی آرمان اول نامطلوبند، مجموع این دو باید حداقل شود. ولی هیچکدام از d_1^+ و d_1^- بر دیگری برتری ندارد.

۳. چند آرمان، استفاده از مقیاس اصلی. در این حالت وزن خاصی به هر متغیر انحرافی نامطلوب داده می‌شود، سپس با هم جمع می‌شوند. برای نمونه

$$\text{Min } Z = 15d_1^- + 10d_1^+ + 8d_m^- + 10d_m^+$$

این حالت زمانی به کار می‌رود که متغیرهای انحرافی دارای واحد اندازه‌گیری یکسانی باشند (برای نمونه همه‌ی انحراف‌ها بر حسب ریال باشند)، و گزینه جمع چند واحد ناهمگن (برای مثال ریال و سهم بازار) محلی از اعراب نخواهد داشت. نکته‌ی دیگر در این حالت، پیدا کردن وزن انحراف‌ها است که کار ساده‌ای نخواهد بود. (جواب مدل به شدت تحت تاثیر این وزن‌ها قرار خواهد گرفت).

۴. چند آرمان، استفاده از رتبه‌بندی ترتیبی و اصلی. این حالت ترکیبی از دو حالت پیش (حالت‌های ۲ و ۳) است. برای نمونه در تابع هدف:

$$\text{Min } Z = p_1d_1^+ + p_2d_2^+ + 3p_3d_3^- + 2p_3d_3^+ + p_4d_4^-$$

چهار آرمان هست که آرمان سوم به گونه‌ای است که هر دو متغیر انحرافی آن نامطلوبند. انحراف منفی از آرمان سوم (d_3^-) ، $\frac{3}{2} = 1.5$ برابر انحراف مثبت (d_3^+) اهمیت دارد. ضرایب برای متغیرهای انحرافی آرمان سوم از نوع اصلی و به طور کلی برای چهار نوع آرمان از نوع ترتیبی است (آرمان اول از اولویت بالاتر و آرمان چهارم از کمترین اولویت برخوردار است). می‌توانستیم تابع هدف فوق را به گونه‌ی زیر نیز نمایش دهیم:

$$\text{Min } Z = p_1d_1^+ + p_2d_2^+ + p_3(3d_3^- + 2d_3^+) + p_4d_4^-$$

$$\text{Min } Z = p_1d_1^+ + p_2d_2^+ + p_3(5d_3^- + 2d_3^+ + 3d_4^+ + 4d_4^-)$$

د چند آرمان که دارای اهمیت باشند. اگر آرمان‌ها دارای اهمیت یکسان باشند، تابع هدف را می‌توان صرفاً با جمع زدن متنبرهای انحرافی نامطلوب تهیه کرد. برای مثال

$$\text{Min } Z = d_1^- + d_2^- + d_3^+ + d_4^+$$

توجه: یاد آوری می‌شود در صورتی می‌توان چنین جمع ساده‌ای را به کار برد که همی آرمان‌ها دارای واحد اندازه‌گیری یکسان (برای نمونه ریال) باشند.

مثال های مدل سازی برنامه ریزی آرمانی

مسئله ساخت تسهیلات ورزشی شورای شهر به شهرداری این اجازه را داده است که با توجه به بودجه ۳ میلیارد تومانی، تسهیلات ورزشی شهر را توسعه دهد. چهار نوع مختلف تسهیلات توسط شهروندان درخواست شده است که بدین فرارند: زمین بسکتبال، زمین فوتبال، زمین تنیس، و استخر شنا. تقاضاهای مختلف از گروه‌های مختلف شهر ۶ عدد زمین بسکتبال، ۴ زمین فوتبال، ۱۰ زمین تنیس، و ۱۲ استخر شنا بوده است. برخی از اطلاعات در مورد تسهیلات ورزشی در جدول ۳-۲ آورده شده است.

جدول ۳-۲. اطلاعات تسهیلات ورزشی برای آرمان‌های زیر قابل شده است:

تسهیلات	هزینه (میلارد تومان)	مساحت (هکتار)	مردم استفاده کننده گان (هر دو هفته)
زمین بسکتبال	۳۵۰	۳	۶۰۰
زمین فوتبال	۱۰۰	۱۰	۱۳۰۰
زمین تنیس	۵۰	۲	۵۰۰
استخر شنا	۲۰۰	۲	۱۰۰۰

P_1 : شهرداری مایل است تمامی بودجه صرف تسهیلات ورزشی شود.
 P_2 : شهرداری مایل است که با توسعه تسهیلات در هر هفته ۱۰,۰۰۰ نفر یا بیشتر از آن‌ها استفاده کنند.
 P_3 : شهرداری می‌خواهد که حتی‌الامکان زمین لازم از ۴۵ هکتار زمین موجود بیشتر نشود.
 P_4 : اگر لازم شد زمین بیشتری به کار برده شود، مایل است زمین اضافی محدود به ۱۰ هکتار باشد.
 P_5 : شهرداری مایل است که تمامی تقاضاهای شهروندان را برآورده کند ولی این اولویت باید مناسب با تعداد متوسط استفاده کنندگان از هر نوع تسهیلات وزن‌دهی شود.

و سرانجام این که شهرداری باید دست کم ۱۴ تسهیلات را احداث کند و از بودجه بیشتر نشود. این محدودیت‌ها تنطقی پذیر نیست (محدودیت‌ها سیستمی است). مدل برنامه‌ریزی آرمانی برای این مساله طراحی کنید.

$$\text{Min } Z = d_1^- + d_2^- + d_3^+ + d_4^+ + d_5^- + d_6^- + d_7^+ + d_8^+$$

محدودیت‌های سیستمی:

$$1) x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 14$$

$$2) 350x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 200x_4 \leq 3000$$

محدودیت‌های آرمانی:

$$P_1) 350x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 200x_4 + d_1^- - d_1^+ = 3000$$

(توجه کنید که d_1^+ به دلیل محدودیت سیستمی صفر خواهد شد و d_1^- نامطلوب است.)

$$P_2) 600x_1 + 1300x_2 + 500x_3 + 1000x_4 + d_2^- - d_2^+ = 10000$$

(d_2^+ نامطلوب است)

$$P_3) 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 2x_4 + d_3^- - d_3^+ = 45$$

(d_3^+ نامطلوب است)

محدودیت این آرمان را به یکی از شکل‌های زیر می‌توان نوشت:

$$P_4) (3x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 45 + d_4^- - d_4^+ = 10 \quad d_4^+ + d_5^- - d_5^+ = 10$$

متغیرهای تصمیم:

x_1 : تعداد زمین بسکتبال

x_2 : تعداد زمین فوتبال

x_3 : تعداد زمین تنیس

x_4 : تعداد استخر شنا

$$P_5) \begin{cases} x_1 + d_5^- - d_5^+ = 4 \\ x_2 + d_6^- - d_6^+ = 4 \\ x_3 + d_7^- - d_7^+ = 10 \\ x_4 + d_8^- - d_8^+ = 12 \end{cases}$$

$$11 + 42 + 43 + 44 \geq 14$$

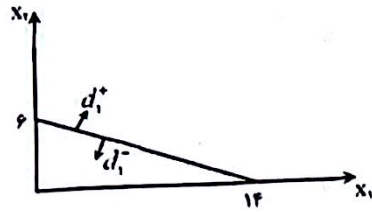
$$350 \times 11 + 100 \times 42 + 50 \times 43 + 200 \times 44 \leq 3000$$

تابع هدف در تابع هدف متنبرهای انحرافی نامطلوب آرمان ۵ بر حسب تعداد متوسط استفاده کنندگان از تسهیلات، ضریب (وزن) می‌گیرند:

$$\text{Min } Z = p_1 d_1^- + p_2 d_2^- + p_3 d_3^+ + p_4 d_4^+ + p_5 (4d_5^- + 4d_6^- + 10d_7^- + 12d_8^- + 10d_5^+)$$

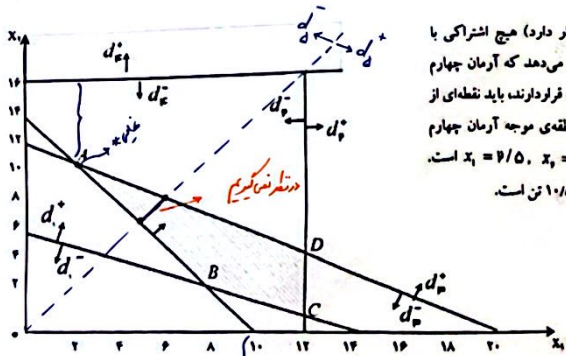
چنانچه مشخص است تابع هدف از پنج آرمان تشکیل شده است که از نوع رتبه‌بندی ترتیبی اند در آرمان پنجم از رتبه‌بندی اصلی (تعداد استفاده کنندگان که برحسب ۱۰۰ نفر

نحوه تعیین منطقه موجه محدودیت های آرمانی



شکل ۲-۲. محدودیت سود

$$30x_1 + 70x_2 + d_1^- - d_1^+ = 140$$



منطقه موجه مربوط به این آرمان (که در اولویت آخر قرار دارد) هیچ اشتراکی با منطقه موجه پیش (چهار ضلعی ABCD) ندارد. این امر نشان می‌دهد که آرمان چهارم به طور کامل محقق نمی‌شود. چون آرمان‌های پیشین در اولویت قرار دارند، باید نقطه‌ای از ABCD را انتخاب کنیم که کمترین فاصله (انحراف) را با منطقه موجه آرمان چهارم داشته باشد. این نقطه، نقطه A است که مختصات آن $x_1 = 10/5$ ، $x_2 = 10/5$ است. بنابراین میزان تولید محصول اول برابر ۲/۵ و محصول دوم برابر ۱۰/۵ تن است.

$$x_1 + d_2^- - d_2^+ = 17$$

$$10/5 + d_2^- - 0 = 17 \rightarrow d_2^- = 5/5$$

* اگر محدودیت دیگری اندر هر شرکتی d_2^- و d_2^+ داشت و باید $d_2^- = d_2^+$ در این صورت چون پاسخ‌های برتری در اولویت‌های بالاتر است که کمتر است که بر روی ترانزوا حرکت.

$$11 - 4x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0$$

حل مسایل GP: روش ترسیمی

مسایلی را که دارای دو متغیر تصمیم باشند می‌توان با روش ترسیمی حل کرد.

مدل GP زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

$$\text{Min } Z = p_1 d_1^- + p_2 d_1^+ + p_3 d_2^- + p_4 d_2^+$$

← St: $14x_1 + 10x_2 \geq 140$ (استفاده از ماشین آلات - بر حسب ساعت)

← $30x_1 + 70x_2 + d_1^- - d_1^+ = 140$ (سود بر حسب میلیون ریال)

← $x_1 + d_2^- - d_2^+ = 17$ (حداکثر تقاضای محصول ۱ بر حسب تن)

← $300x_1 + 500x_2 + d_2^- - d_2^+ = 4000$ (بودجه بر حسب میلیون ریال)

$x_1 + d_2^- - d_2^+ = 17$ (حداقل تقاضای محصول ۲ بر حسب تن)

$$x_1, d_1^-, d_1^+ \geq 0$$

$$14x_1 + 10x_2 = 140$$

$$30x_1 + 70x_2 = 140$$

$$x_1 = 17$$

$$300x_1 + 500x_2 = 4000$$

نقطه $(0,0)$ را در جدول است
تستی کنیم مثلاً: $30x_1 + 70x_2 = 140 \xrightarrow{(0,0)} 0 \neq 140 \rightarrow 30x_1 + 70x_2 + d_1^- - d_1^+ = 140$

$$(30 \times 17) + (70 \times 10) = 140$$

$$750 + 700 = 1450 \Rightarrow d_1^- = 0, d_1^+ = 300$$

$$(300 \times 17) + (500 \times 10) = 4000$$

$$5100 + 5000 = 10100$$

$$d_2^- = 9100, d_2^+ = 0$$

$$d_2^- = d_2^+ = 0$$

$$d_2^- = 17 - 10 = 7$$

$$10, 7 \geq 17$$

$$14x_1 + 10x_2 = 14(2/5) + 10(10/5) = 140$$

یعنی میزان به کارگیری ماشین آلات ۱۴۰ (ساعت) است.

$$30x_1 + 70x_2 + d_1^- - d_1^+ = 470$$

$$30(2/5) + 70(10/5) + 0 - d_1^+ = 470 \rightarrow d_1^+ = 390$$

یعنی سودمان ۳۹۰ (میلیون ریال) از میزان هدف (۴۲۰ میلیون ریال) بیشتر خواهد شد.

سود به دست آمده ۸۱۰ میلیون ریال می شود.

$$x_1 + d_2^- + d_2^+ = 12$$

$$2/5 + d_2^- + 0 = 12 \rightarrow d_2^- = 9/5$$

حداکثر تقاضای محصول اول ۱۲ تن است که ما ۲/۵ تن تولید می کنیم، یعنی ۹/۵ تن

زیر سقف.

$$300x_1 + 500x_2 + d_3^- - d_3^+ = 4000$$

$$300(2/5) + 500(10/5) = 4000 \rightarrow d_3^-, d_3^+ = 0$$

یعنی میزان هزینه ای که جهت تولید صرف خواهد شد دقیقاً برابر با بودجه ای

۶,۰۰۰ (میلیون ریالی) بوده و انحراف از بودجه صفر است.

مثال: در مثال قبل، فرض کنید آرمان پنجمی به صورت زیر به مساله اضافه شود:

$$x_1 - x_2 + d_5^- - d_5^+ = 0 \quad (\text{میزان تولید یکسان دو محصول})$$

که d_5^-, d_5^+ هر دو نامطلوب باشند. مشخص نمایید اضافه شدن این آرمان چه تاثیری بر

جواب بهینه خواهد گذاشت؟

حل

تابع هدف جدید به صورت زیر خواهد شد:

$$\text{Min } Z = p_1 d_1^- + p_2 d_1^+ + p_3 d_3^- + p_4 d_3^+ + p_5 (d_5^- + d_5^+)$$

مشخص است به دلیل این که آرمان با اهمیت بیشتر (یعنی آرمان چهارم) به طور کامل

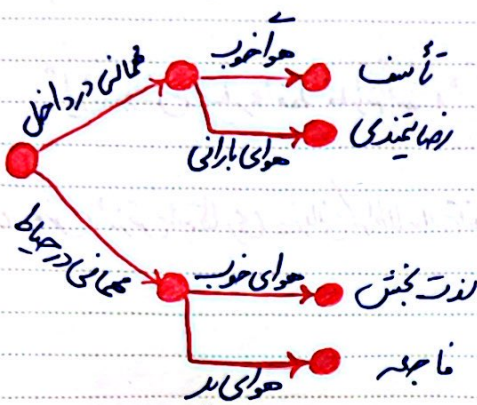
برآورده نشده است، این آرمان (آرمان پنجم) بررسی نخواهد شد و جواب بهینه ی پیش

($x_1 = 2/5, x_2 = 10/5$) تغییر نخواهد کرد. میزان انحراف از این آرمان پنجم:

$$x_1 - x_2 + d_5^- - d_5^+ = 0$$

$$2/5 - 10/5 + d_5^- - 0 = 0 \rightarrow d_5^- = 8$$

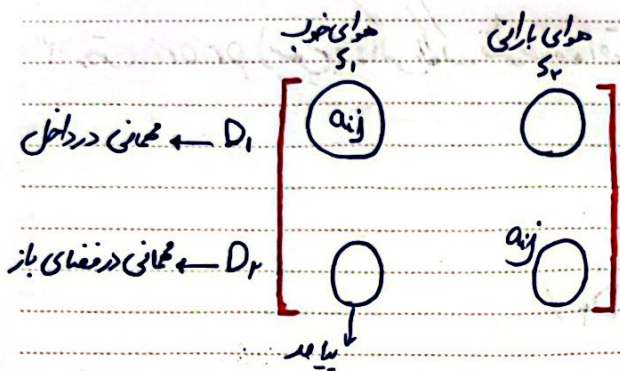
یعنی محصول دوم ۸ تن بیشتر از محصول اول تولید می شود.



«جدول عایدی»

حالت طبیعت امدام	s_1	s_2	...	s_m
D_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
D_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
...
D_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

عایدی حاصل از انجام D_i در حالت s_j ، a_{ij}



a_{ij} ← باید حاصل از انتخاب امدام D_i در صورتی که در شرایط s_j قرار بگیریم.

* مثال: یک شرکت بزرگ نفوس به فردی که مهاجر زمین بزرگی در یک ناحیه می باشد، ۹۰۰۰۰۰۰۰ گاز باشد (د) $100,000,000$ $40,000,000$ $100,000,000$ $20,000,000$

شخصی که در است که در ازای دریافت ۱۰ هزار واحد پول، مجوز اکتشاف زمین برای گاز را به این شرکت بدهد. اگر در این زمین گاز یافت شود، شرکت نفوس ۱۰ هزار واحد پول دیگر بابت استخراج گاز به مهاجر زمین خواهد پرداخت ولی اگر گاز یافت نشود مبلغ ۲۰ میلیون واحد پول اولیه پس گرفته خواهد شد. مهاجر زمین بخواهد شرکت نفوس را * تا زمانیکه احتمال وقوع s_1 و s_2 را بدانیم، تعیین کند خودی از وجود گاز در زمین خودی داند و همین دلیل به نظر افتاده است که زمین را با هزینه شخصی خود اکتشاف نماید. هزینه اکتشاف شخصی ۱۰ هزار واحد پول می باشد که عملاً صورت یافتن گاز در زمین، سوخت خواهد شد ولی در صورت وجود گاز در زمین، مهاجر زمین بود خالص معادل ۲۰ میلیون واحد پول خواهد داشت. بهترین تصمیم برای این فرد چیست؟

مکارم تو به آفاق می بردشاعر از وظیفه وزاد سفر دریغ ندارد



ذی الحجه ۱۴۳۷

انواع روش برای تعیین بهترین اقدام:

$$D_1 \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ 40,000 & 440,000 \end{bmatrix} \rightarrow 40,000 \checkmark$$

$$D_2 \begin{bmatrix} -100,000 & 2,100,000 \end{bmatrix} \rightarrow -100,000$$

۱. روش ماکس مین $Max(min)$

این روش بسیار محافظ کارانه است

۲. روش ارزش انتظاری: زمانی که اطلاعات نداریم، از تابع توزیع کینواخت (که کمترین واریانس را دارد) استفاده می کنیم.

$$D_1 = 40,000 \times \frac{1}{3} + 440,000 \times \frac{1}{3} = 320,000$$

$$D_2 = -100,000 \times \frac{1}{3} + 2,100,000 \times \frac{1}{3} = 950,000 \rightarrow D_2 \checkmark$$

۳. روش $priori$ (پسین): اگر بایک نظر خبره، احتمالات subjective را داشته باشیم.

$$p(S_1) = 0.4 \text{ و } p(S_2) = 0.6$$

$$D_1 = 0.4 \times 40,000 + 0.6 \times 440,000 = 420,000$$

$$D_2 = 0.4 \times (-100,000) + 0.6 \times (2,100,000) = 1,120,000 \rightarrow D_2 \checkmark$$

مثال: یک فروشنده لباس، لباس را مورد نیاز خود را از ۹ ماه جلوتر به یک تولیدی لباس سفارش می دهد. بزرگترین دغدغه این فروشنده این است که در زمان تحویل لباس کم، اگر با آن کم مطابق روز خواهد بود یا خیر.

الف) اگر این فرو... بسیار محافظ کار باشد، بهترین تصمیم وی چه خواهد بود؟
ب) کاملاً از داده قابل قبول کاملاً قدروز

حالت طبیعت اقدام	S_1	S_2	S_3
سفارش زیاد: D_1	-50	0	80
سفارش کم: D_2	-10	30	25
سفارش متوسط: D_3	0	45	-30
سفارش زیاد: D_4	80	40	-45

$$0.33 = p(S_1) = p(S_2) = p(S_3)$$

$$D_1 \rightarrow 30 \times 0.33$$

$$D_2 \rightarrow 55 \times 0.33$$

$$D_3 \rightarrow 75 \times 0.33$$

$$D_4 \rightarrow 75 \times 0.33$$

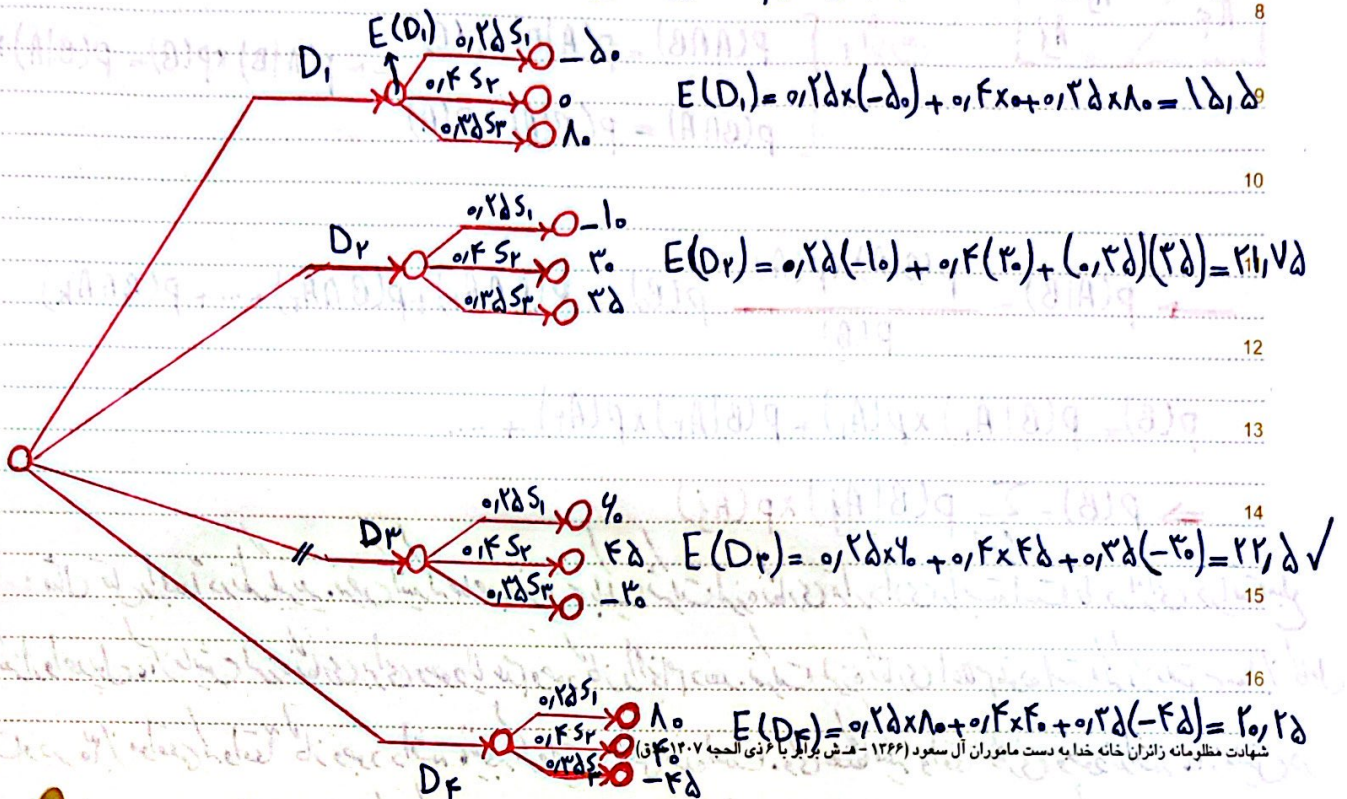
با استفاده از روش $Max(min)$

$$D_1 = -50 \text{ و } D_2 = -10 \text{ و } D_3 = -30 \text{ و } D_4 = -45 \Rightarrow D_2 \checkmark$$

ای صباختی از کوی فلانی به من آر
زارو بیارم راحت جانی به من آر

ب) اگر این فرد از تجارت سال ۱ قبل خود به این نتیجه رسیده باشد که: $P(S_1) = 0,25$, $P(S_2) = 0,4$, $P(S_3) = 0,35$

با استفاده از روش *priori* بهترین تصمیم وی را تعیین کنید.

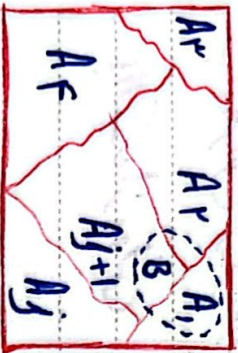


این از انجام آزمایش *posteriori*: در این روش، این امکان وجود دارد که ادعای خبره بگویند دست و گزمن قرار هم.

در تصمیم گیری در شرایط *priori*، احتمالات طبیعت به صورت داده ثابت و بدون تغییر در نظر گرفته می شود اما اگر این امکان فراهم باشد که بتوان نسبت به دست یا داده این احتمالات و مقادیر آن را، آزمایشی را ترتیب داد، مسئله را *posteriori* می نامند.

نتایج این آزمایش هم در هر دو جهت و دارای خطا می باشد، به همین جهت از مانور نیز برای تحلیل آن استفاده می گردد.

ای صبا کنتی از خاک ره یاریار
ببر اندوه دل و مژده دلدار یاریار



$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) \times P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j) \times P(A_j)}$$

مثبت: $P(A \cap B) = P(A | B) \times P(B)$

$$P(B \cap A) = P(B | A) \times P(A)$$

$$\rightarrow P(A | B) \times P(B) = P(B | A) \times P(A)$$

$$\rightarrow P(A | B) = \frac{P(B | A) \times P(A)}{P(B)} = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_k)$$

$$P(B) = P(B | A_1) \times P(A_1) + P(B | A_2) \times P(A_2) + \dots$$

$$\Rightarrow P(B) = \sum_{j=1}^n P(B | A_j) \times P(A_j)$$



جزوه باما

دانلود جزوات، نمونه سوالات
و پروپونته‌های دانشگاهی

Jozvebama.ir

