تشخیص نقاط بحرانی تابع و انواع آن در متلب(MATLAB)

یگانه ترابی

دانشجوی کارشناسی، مهندسی مواد و متالورژی، دانشگاه تهران

y.torabi۹۱٤۷@gmail .com

چکیده

نقطه بحرانی اصطلاحی است که در بسیاری از شاخه های ریاضیات استفاده می شود.

وقتی با توابع یک متغیر حقیقی سروکار داریم ، نقطه بحرانی نقطه‌ای در دامنه تابع است که در آن تابع یا مشتق پذیر نیست یا مشتق آن برابر با صفر است. به طور مشابه، هنگام برخورد با متغیرهای مختلط ، یک نقطه بحرانی نقطه‌ای در دامنه تابع است که در آن یا هولومورفیک نیست یا مشتق آن برابر با صفر است. به همین ترتیب، برای تابعی از چندین متغیر حقیقی ، یک نقطه بحرانی مقداری در دامنه آن است که در آن گرادیان تعریف نشده یا برابر با صفر است. مقدار تابع در یک نقطه بحرانی یک مقدار بحرانی است .

مفهوم نقطه بحرانی اجازه توصیف ریاضی یک پدیده نجومی را می دهد که قبل از زمان کوپرنیک توضیح داده نشده بود . نقطه ثابت در مدار یک سیاره، نقطه ای از مسیر سیاره در کره آسمانی است ، جایی که به نظر می رسد حرکت سیاره قبل از شروع مجدد در جهت دیگر متوقف می شود. این به دلیل نقطه بحرانی پرتاب مدار به دایره دایره البروج رخ می دهد.

در این مقاله قصد داریم به بررسی نحوه تشخیص نقاط بحرانی تابع چند متغیره و انواع آن در متلب (matlab) بپردازیم.

واژگان کلیدی: نقاط بحرانی (critical points)، توابع چند متغیره، نقاط اکسترمم (MAX,MIN)

نقطه زینی (saddle point)

فهرست

مقدمه

برای تجزیه‌وتحلیل مؤثر و ارائه‌ی نتایج، ممکن است مجبور باشید داده‌های زیادی را بررسی کنید. هنگامی که چندین منبع داده را مدیریت می‌کنید، حجم داده‌ها می‌تواند بسیار زیاد شود و این امر ممکن است شما را سردرگم و کلافه کند. در این شرایط بهتر است بدانید که چه داده‌هایی مهمند و باید پیگیری شوند. همچنین، باید بدانید که چگونه می‌توانید داده‌ها را بصری‌سازی و تجزیه‌وتحلیل کنید تا از آن‌ها اطلاعات کلیدی و عملی را به دست آورید.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، نقطه بحرانی یک تابع با متغیرهای حقیقی، نقطه‌ای درونی در دامنه تابع است که آن تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نبوده یا مشتق آن برابر صفر باشد. مقدار تابع در نقطه بحرانی، مقدار بحرانی آن تابع نامیده می‌شود(Thomas,۲۰۱۷).

فرما، یکی از اوّلین کسانی بود که روشی کلّی برای پیدا کردن اکسترمم‌ها و زینی (تابع چند متغیره) را پیشنهاد کرد و طبق قضیه فرما، هر اکسترمم نسبی و زینی، یک **نقطه بحرانی** است.

در آنالیز ریاضی، **بیشینه** (ماکسیمم) و **کمینه** (مینیمم) یک تابع که به طور جمعی به آنها اکسترمم‌های آن تابع گویند به ترتیب، به بزرگترین مقدار و کوچکترین مقدار تابع (در صورت وجود)، یا در یک بازه خاص (اکسترمم نسبی) و یا در کلّ دامنه (اکسترمم مطلق) گفته می‌شود .

در ریاضیات، یک نقطه زینی نقطه‌ای در دامنه یک تابع است که یک نقطه سکون بوده ولی اکسترمم موضعی نیست. نام آن از این موضوع گرفته شده که در حالتی که دامنه تابع باشد، نمونه مشخص نقطه زینی، سطحی است که در یک راستا به بالا و در راستای دیگر به پایین خم می‌شود (مانند یک زین یا گردنه) در حالت دوبعدی، خطوط کانتوری تابع در نقطه زینی یکدیگر را قطع می‌کنند.

نقاط بحرانی تابع هم از آن دسته نقاطی هستند که برای ما اهمیت فراوانی دارند و در بعضی مواقع لازم است به صورت جدا بررسی شوند. حال باید بتوانیم با استفاده از برنامه نویسی و کد نویسی، روشی برای پیدا کردن این نقاط و تشخیص نوع آنها و نمایش پیدا کنیم. هدف از این مقاله، اجرای کدی با این عملکرد است که مورد توجه بسیاری از مهندسان نیز است.

مفاهیم و تعاریف:

مشتق

مشتق (Derivative) از پرکاربردترین مفاهیم ابداع شده در ریاضیات است. در حقیقت می‌توان گفت قلب ریاضیات مدرن، مفهوم مشتق است. در حالت کلی مشتق بر دو نوع مشتق ساده و جزئی است. البته مشتقات ساده را می‌توان با دو روش صریح و ضمنی بدست آورد. (مسعود نیکوکار، بهمن عرب زاده،۱۳۸۲)

- **عبارات صریح** :عبارتی که در آن y مستقیما به‌صورت تابعی از x تعریف می‌شوند.
- **عبارات ضمنی** :در عبارات ضمنی، تابع y بر حسب خودش و متغیرهایش بیان می‌شوند. در این عبارات با معلوم بودن مقدار x نمی‌توان مستقیما مقدار y را محاسبه کرد.

مشتق یک تابع، برای یافتن اکسترمم نمودارها و یا محاسبه مقادیر بهینه در مسائل مهندسی، کاربرد بسیار زیادی دارد. برای توابع مختلف با توجه به تعداد متغیرهای مستقلی که در آن‌ها حضور دارند، روش‌های مشتق‌گیری متفاوتی نیز موجود است.

مشتق تابع با یک متغیر مستقل

با استفاده از فرمول زیر میتوان، مشتق توابع تک متغیره را به دست آورد.

df/dx=(f(x۰ + h) - f(x۰)) / h

h→۰

توابع چند متغیره

واقعیت این است که هدف اصلی ریاضیات توضیح پدیده‌های فیزیکی است. اما نکته این‌جا است که در طبیعت، اکثر تغییرات به چندین عامل وابسته است. این پدیده‌ها را می‌توان با استفاده از موجوداتی به نام تابع چند متغیره (Multivariable Function) توصیف کرد. در بخش‌های آینده در مورد نحوه پیاده‌سازی مفاهیم پایه‌ای هم‌چون (مشتق) روی این توابع نیز بحث خواهیم کرد.

به شکلی دقیق‌تر می‌توان گفت تابع چند متغیره موجودی است که ورودی، خروجی و یا هر دوی آن‌ها از دو یا چند عدد تشکیل شده باشد. تنها به تابعی تک متغیره گفته می‌شود که از یک ورودی و یک خروجی تشکیل شده باشد.

معمولا برای فهم توابع چند متغیره، بایستی از فضاهای دو یا چند بعدی درک واضحی داشت. در حقیقت در این توابع، هر عدد نشان دهنده یک بعد است . اگر خروجی توابع چند عدد باشد، توابع برداری نامیده مشوند.

مشتق جزئی تابع با چند متغیر مستقل

همانطور که اشاره شد، محاسبه مشتق توابع با چند متغیر مستقل، کاربرد بسیار زیادی در محاسبات مهندسی و مسائل بهینه سازی دارد. بنابراین محاسبه مشتق در تابع با یک متغیر مستقل را با روشی که در ادامه توضیح داده می‌شود، تعمیم می‌دهیم.

$df/dx= (f(x۰ + h, y۰) - f(x۰, y۰)) / h$

$df/dy=(f(x۰, y۰ + h) - f(x۰, y۰)) / h$

$h \rightarrow ۰$

مشتق جزئی دوم

اگر از تابع مشتق گرفته شده، با روش های بالا یک بار دیگر مشتق بگیریم، مشتق دوم توابع به دست می آید. اما اگر بخواهیم با تابع اولیه، مشتق دوم نسبت به متغیر اول یا دوم یا هردو بگیریم، کافی است از فرمول زیر استفاده کنیم:

$df/dx۲= (f(x۰ + h, y۰) - ۲*f(x۰, y۰) + f(x۰ - h, y۰)) / h^۲$

$df/dy۲=(f(x۰, y۰ + h) - ۲*f(x۰, y۰) + f(x۰, y۰ - h)) / h^۲$

$h \rightarrow ۰$

نقاط بحرانی توابع تک متغیره:

تابعی مانند $f\left(x\right)$ را در نظر بگیرید. نقطه $x=c$، نقطه بحرانی این تابع است در صورتی که مقدار تابع f در این نقطه، یعنی $f\left(c\right)$، موجود باشد و همچنین یکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

شرط اول:

شرط اول این است که مشتق تابع f در نقطه $x=c$ برابر با صفر باشد. این موضوع در رابطه زیر نشان داده شده است.

$$f'\left(c\right)=0$$

شرط دوم:

شرط دوم این است که مشتق تابع f در نقطه $x=c$ یعنی $f'\left(c\right)$ موجود نباشد.

در واقع همانطور که بیان شد، برای آنکه بتوان $x=c$ را به عنوان نقطه بحرانی تابع f در نظر گرفت، $f\left(c\right)$ حتما باید موجود باشد و همچنین یکی از دو شرط بالا نیز برقرار باشد. توجه کنید که معمولا در مسائل مختلف شرط موجود بودن مقدار تابع در نقطه $x=c$ فراموش می‌شود. بنابراین فراموش نکنید که شرط لازم برای بررسی یک نقطه به عنوان نقطه بحرانی این است که مقدار تابع در نقطه مورد نظر موجود باشد.

نقاط بحرانی توابع دو متغیره:

همچون تابع تک متغیره در حالت دو متغیره نیز می‌توان نقطه بحرانی را با استفاده از مفهوم اکسترمم نسبی بدست آورد. در ادامه نقطه بحرانی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف:

نقطه $\left(a,b\right)$، نقطه‌ای بحرانی از تابع $f\left(x\right)$ بوده که یکی از دو شرط زیر در آن صدق کند.

- $\nabla f\left(a,b\right)=\overrightarrow{0}$ (این شرط معادل $f_x\left(a,b\right)=0$ و $f_y\left(a,b\right)=0$ است).
- $f_x\left(a,b\right)$ یا $f_y\left(a,b\right)$ وجود نداشته باشند.

$$D = D(a,b) = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

در این صورت نوع نقاط با توجه به علامت D و همان‌طور که در ادامه آمده تفسیر می‌شوند:

۱. اگر $D > 0$ و $f_{xx}(a,b) > 0$ در این صورت (a,b) یک مینیمم نسبی است.

۲. اگر $D > 0$ و $f_{xx}(a,b) < 0$ در این صورت (a,b) به عنوان ماکزیممی نسبی محسوب می‌شود.

۳. اگر $D < 0$ باشد، در این صورت نقطه (a,b)، زینی خواهد بود.

۴. اگر $D = 0$ باشد، در این صورت نقطه (a,b)، هریک از ۳ حالت فوق را ممکن است داشته باشد.

***توجه داشته باشید، اگر تابع پیوسته باشد، مشتق نسب به X سپس به Y تفاوتی با مشتق نسبت به Y بعد X نمی کند.**

متلب(MATLAB):

مَتلب به انگلیسی (MATLAB) :یک محیط نرم‌افزاری برای انجام محاسبات عددی و یک زبان برنامه‌نویسی نسل چهارم است. واژه متلب هم به معنی محیط محاسبات رقمی و هم به معنی خود زبان برنامه‌نویسی مورد نظر است که از ترکیب دو واژه (MATrix)ماتریس و(LABoratory) آزمایشگاه ایجاد شده‌است. این نام حاکی از رویکرد ماتریس محور برنامه است، که در آن حتی اعداد منفرد هم به عنوان ماتریس در نظر گرفته می‌شود.

کار کردن با متلب بسیار ساده است. در حقیقت تمام داده‌ها در متلب به شکل یک ماتریس ذخیره می‌شوند. برای مثال یک عدد (اسکالر) به شکل یک ماتریس ۱*۱ ذخیره می‌شود. یک رشته به شکل ماتریسی با یک سطر و چندین ستون (که تعداد ستون‌ها به تعداد کاراکترهاست) ذخیره می‌شود. حتی یک تصویر به شکل یک ماتریس سه بعدی ذخیره می‌گردد که بُعد اول و دوم آن برای تعیین مختصات نقاط و بُعد سوم آن برای تعیین رنگ نقاط استفاده می‌شود. فایل‌های صوتی نیز در متلب به شکل ماتریس‌های تک ستون بردارهای ستونی ذخیره می‌شوند؛ بنابراین جای تعجب نیست که متلب مخفف عبارت آزمایشگاه ماتریس باشد.

علاوه بر توابع فراوانی که خود متلب دارد، برنامه‌نویس نیز می‌تواند توابع جدید تعریف کند.

تاریخچه

کلیو مولر، رئیس بخش علوم کامپیوتر در دانشگاه نیو مکزیکو، در اواخر دهه ۱۹۷۰ شروع به توسعه متلب کرد. او این برنامه را طراحی کرد تا به دانش‌آموزانش اجازه دسترسی به LINPACK و EISPACK بدون نیاز به یادگیری Fortran را بدهد. این موضوع به زودی به سایر دانشگاه‌ها گسترش یافت و مخاطبان علاقه‌مندی در جامعه ریاضی کاربردی پیدا کرد. مهندس جک لیتل، در طی دیدار با مولر از دانشگاه استنفورد در سال ۱۹۸۳ با متلب آشنا شد. او با تشخیص پتانسیل تجاری متلب، تصمیم به همکاری با مولر گرفت. آن‌ها در سال ۱۹۸۴ متلب را منتشر کردند و مت‌ورکس را در سال ۱۹۸۴ تأسیس کردند. در سال ۲۰۰۰، متلب بازنویسی شد تا از مجموعه جدیدتر کتابخانه برای دستکاری ماتریس، استفاده شود. متلب برای اولین بار توسط محققان و شاغلان در مهندسی کنترل، تخصصLittle's ، استفاده می‌شد، اما به سرعت در بسیاری از حوزه‌ها گسترش یافت. هم چنین در آموزش به ویژه آموزش جبر خطی، تحلیل عددی و در پردازش تصویر مورد استفاده قرار می‌گیرد. (Past,present,and future;Eaton John;۲۰۰۱)

نمونه کد تشخیص نقاط بحرانی تابع و انواع آن:

```
%final project_ Yeganeh Torabi
%۲۰۰٤/۰۹/۰۲

clear all %#ok
close all
clc

x=-5:0.5:5;
y=-5:0.5:5;

hold on % چسباندن نقاط و نمودار به هم

z= x.^2 + y.^2 - 4.*x.*y+ 2.*x - 6;

plot3(x,y,z,'Color','[0.9 0.1 0.3') % نمودار پیوسته
scatter3(x,y,z,'g') % نقاط تابع
grid on % تقسیم بندی صفحات مختصات

%syms x y نشان دادن مشتق گیری نسبت به دو پارامتر متغیر
%diff از این دستور هم میتوان برای مشتق گرفتن استفاده کرد
% polyder از این دستور هنگام مشتق گیری توابع چند جمله ای استفده میکنیم
% %critical_points نقاط بحرانی

f=@(x,y) x^2 + y^2 - 4*x*y + 2*x - 6; %فانکشن هندل
h = 1e-6;

for i=1:length(x)
    for j=1:length(y)
         df_dx(i,j) = (f(x(i) + h, y(j)) - f(x(i) - h, y(j))) / (2 * h);
         df_dy(i,j) = (f(x(i), y(j) + h) - f(x(i), y(j) - h)) / (2 * h);

%disp(['The partial derivative of f with respect to x at (',
num2str(x(i)), ', ', num2str(y(j)), ') is: ', num2str(df_dx(i,j))]);

%disp(['The partial derivative of f with respect to y at (',
num2str(x(i)), ', ', num2str(y(j)), ') is: ', num2str(df_dy(i,j))]);

if (df_dx(i,j)==0 &&  df_dy(i,j)==0)|| (df_dx(i,j)==nan &&
df_dy(i,j)==nan)

   disp(['The point x is:',num2str(x(i)),'  The point y
is:',num2str(y(i)),'  is critical point!']);

   d2f_dx2(i,j) = (f(x(i) + h, y(j)) - 2*f(x(i), y(j)) + f(x(i) - h,
y(j))) / h^2;

   d2f_dy2(i,j) = (f(x(i), y(j) + h) - 2*f(x(i), y(j)) + f(x(i), y(j) -
h)) / h^2;
```

```
   dx_dy=-4;
   D(i,j)=d2f_dx2(i,j)*d2f_dy2(i,j)- (dx_dy)^2;


         if D(i,j)>0

               if d2f_dx2(i,j)>0 && d2f_dy2(i,j)>0
                   disp('critical_point is MIN');
               elseif d2f_dx2(i,j)<0 && d2f_dy2(i,j)<0
                   disp('critical_point is MAX');
               end
         elseif D(i,j)<0
                   disp('critical_point is SADDLE');
         else
                  disp('everything can be!')
         end
         end

end
    end


disp('This function doesnt have critical point else! ')
```

مکانیزم عملکرد کد:

ابتدا باید بدانیم، برای ذخیره برنامه نوشته شده، باید آن را در یک صفحه script بنویسیم. میتوان آن را در صفحه command window نیز اجرا کرد، ولی آنجا دیگر امکان ذخیره سازی کد وجود ندارد.

دستورات clear all, close all, clc یکسری تابع های درونی تعریف شده در برنامه متلب هستند که به ترتیب برای پاک کردن پنجره command window، بستن تمام پنجره ها(تصاویر و نمودار و....) و پاک شدن حافظه (work space) به کار می روند.

```
clear all %#ok
close all
clc
```

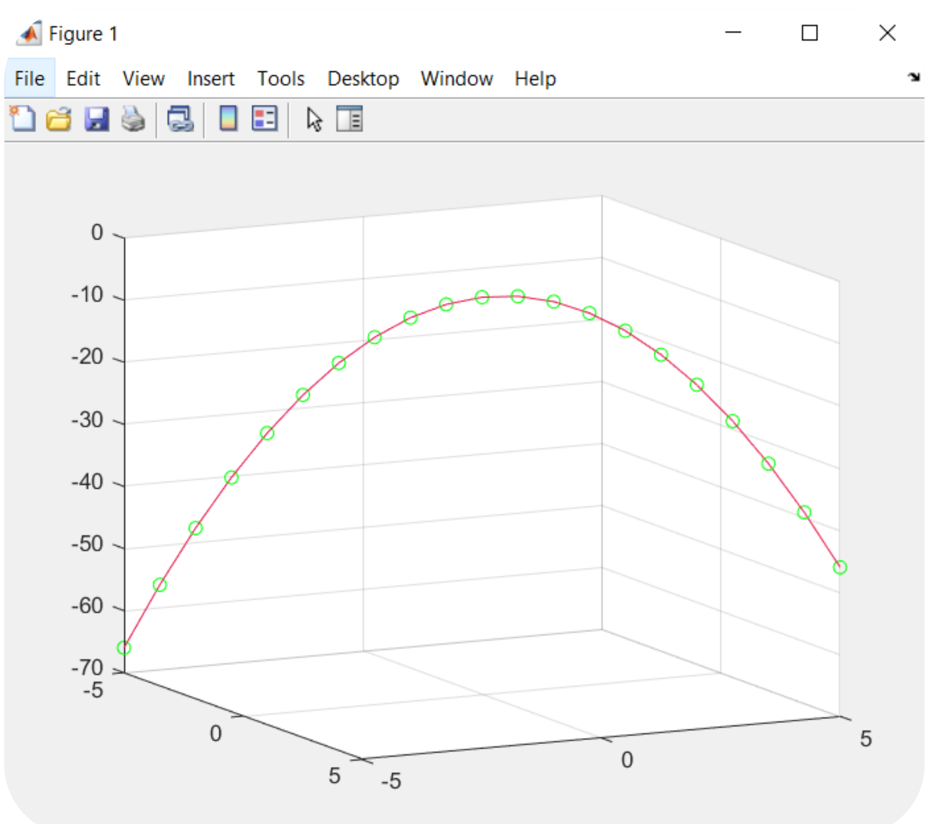
x,y پارامترهایی هستند که ابتدا باید آنها را در برنامه تعریف کرد، سپس مقادیر ابتدایی و انتهائی و فاصله نقاط را به آنها اختصاص داد.

```
x=-5:0.5:5;
y=-5:0.5:5;
```

در مرحله بعد، نوبت به تعریف کردن تابع و رسم نمودار آن میرسد.

```
hold on % چسباندن نقاط و نمودار به هم
z= x.^2 + y.^2 - 4.*x.*y+ 2.*x - 6;
plot3(x,y,z,'Color','[0.9 0.1 0.3') % نمودار پیوسته
scatter3(x,y,z,'g') % نقاط تابع
grid on % تقسیم بندی صفحات مختصات
```

در اینجا تابع به صورت پیش فرض، تابعی با دو متغیر نوشته شده است.



در این قسمت از کد، میخواهیم مشتق اول از تابع نسب به هر دو متغیر بگیریم و اگر هر دو آنها با هم صفر بودند یا حداقل یکی از آنها تعریف نشده بود، نقاط بحرانی به حساب می آیند که طبق دستوری که به برنامه دادیم، آن مختصات را برای ما چاپ می کند.

```
%syms x y  نشان دادن مشتق گیری نسبت به دو پارامتر متغیر
%diff  از این دستور هم میتوان برای مشتق گرفتن استفاده کرد
% polyder  از این دستور هنگام مشتق گیری توابع چند جمله ای استفاده میکنیم
% %critical_points  نقاط بحرانی
f=@(x,y) x^2 + y^2 - 4*x*y + 2*x - 6; %فانکشن هندل
h = 1e-6;
for i=1:length(x)
    for j=1:length(y)
         df_dx(i,j) = (f(x(i) + h, y(j)) - f(x(i) - h, y(j))) / (2 * h);
         df_dy(i,j) = (f(x(i), y(j) + h) - f(x(i), y(j) - h)) / (2 * h);
%disp(['The partial derivative of f with respect to x at (',
num2str(x(i)), ', ', num2str(y(j)), ') is: ', num2str(df_dx(i,j))]);
%disp(['The partial derivative of f with respect to y at (',
num2str(x(i)), ', ', num2str(y(j)), ') is: ', num2str(df_dy(i,j))]);
if (df_dx(i,j)==0 &&  df_dy(i,j)==0)|| (df_dx(i,j)==nan &&
df_dy(i,j)==nan)
   disp(['The point x is:',num2str(x(i)),'  The point y
is:',num2str(y(i)),'  is critical point!']);
```

مرحله بعد، مشتق دوم نسبت به متغیرها را حساب میکند و در فرمول مربوطه جایگزینی می کند. و طبق توضیحات بالا، نام نوع نقطه بحرانی پرینت می شود. و اگر هم هیچ نقطه بحرانی در تابع وجود نداشته باشد، جمله پایانی (هیچ نقطه بحرانی دیگری وجود ندارد) چاپ می شود.

```
d2f_dx2(i,j) = (f(x(i) + h, y(j)) - 2*f(x(i), y(j)) + f(x(i) - h, y(j)))
/ h^2;

   d2f_dy2(i,j) = (f(x(i), y(j) + h) - 2*f(x(i), y(j)) + f(x(i), y(j) -
h)) / h^2;

   dx_dy=-4;
   D(i,j)=d2f_dx2(i,j)*d2f_dy2(i,j)- (dx_dy)^2;


         if D(i,j)>0

               if d2f_dx2(i,j)>0 && d2f_dy2(i,j)>0

                   disp('critical_point is MIN');


               elseif d2f_dx2(i,j)<0 && d2f_dy2(i,j)<0

                   disp('critical_point is MAX');

               end
         elseif D(i,j)<0

                   disp('critical_point is SADDLE');
         else
                  disp('everything can be!')
         end
         end

end
    end


disp('This function doesnt have critical point else! ')
```

منابع

- ***Thomas' Calculus (14th Edition)***
- **حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول)، مسعود نیکوکار و بهمن عرب‌زاده، تهران، انتشارات آزاده، ۱۳۸۲**
- **https://b.fdrs.ir/۱cf**
- **https://www.mathsisfun.com/calculus/derivatives-partial.html**
- http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcI/CriticalPoints.aspx
- https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/thinking-about-multivariable-function/ways-to-represent-multivariable-functions/a/multivariable-functions
- https://web.archive.org/web/۲۰۱۴۱۲۲۷۱۴۰۹۳۸/http://archive.computerhistory.org/resources/access/text/۲۰۱۳/۱۲/۱۰۲۷۴۶۸۰۴-۰۵-۰۱-acc.pdf
- https://blog.faradars.org/%D۹٪۸۵٪D۸٪A۷٪DA%A۹٪D۸٪B۲٪DB%۸C%D۹٪۸۵٪D۹٪۸۵-%D۹٪۸۸-%D۹٪۸۵٪DB%۸C%D۹٪۸٦٪DB%۸C%D۹٪۸۵٪D۹٪۸۵-%D۹٪۸٦٪D۸٪B۳٪D۸٪A۸٪DB%۸C/