



# جزوه باما

دانلود جزوات، نمونه سؤالات  
و پروپوزنت‌های دانشگاهی

**Jozvebama.ir**



## مقدمه

مجموعه‌ی حاضر در ۱۱ فصل برحسب اهمیت و ارتباط مفهومی‌شان با یکدیگر طبقه بندی شده است که شامل مطالب مهم درسی به همراه تست های کنکور سراسری سال های ۸۵ تا ۸۹ می باشد. با توجه به حذف ماشین حساب و تغییر در روند سوالات درس کنترل موجودی در تهیه ی این جزوه سعی شده است تا کلیه ی نکات کلیدی لازم برای پاسخگویی به سوالات مفهومی و محاسباتی لحاظ شود تا در حداقل زمان ممکن داوطلبان به مهمترین مطالب درسی مبحث "کنترل موجودی" دسترسی داشته باشند. بدین امید که راهکار مناسب برای کسب نتیجه ی بهتر در آزمون کارشناسی ارشد باشد.

با آرزوی موفقیت

پورسعیدی

پورسلطان

# Jozvebama.ir

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیمانده خود را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

درصد ۵ سال	مجموع سوالات در ۵ سال	۱۳۸۹	۱۳۸۸	۱۳۸۷	۱۳۸۶	۱۳۸۵	سر فصل اصلی درس کنترل موجودی	
		تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست		
		<b>تعاریف و مفاهیم موجودی</b>						
٪۱۸,۱۸	۲۰							
٪۴,۵	۵			۱		۴	مفاهیم کلی	
٪۸,۲	۹	۲	۱	۲		۴	هزینه های سیستم موجودی	
٪۳,۶	۴	۲	۱		۱		خط مشی مرور سیستم موجودی	
٪۱,۸	۲			۱		۱	انالیز ABC	
٪۱۴,۵	۱۶	<b>مدل مقدار سفارش اقتصادی EOQ</b>						
٪۱۳,۶	۱۵	۱	۵	۲	۳	۴	مدل اصلی	
٪۰,۹	۱					۱	مدل EOQ گسسته	
٪۵,۵	۶	<b>مدل های کمبود</b>						
٪۱,۸	۲				۱	۱	کمبود فروش از دست رفته	
٪۳,۶	۴	۲	۲			۰	کمبود پس افت	
٪۹,۱	۱۰	<b>مدل تولیدی</b>						
٪۹,۱	۱۰	۲	۲	۱	۳	۲	تولیدی ساده	
٪۰,۰	۰						تولیدی کمبود دار	
٪۹,۱	۱۰	<b>مدل چند محصولی و محدودیت دار</b>						
٪۶,۴	۷	۳		۳		۱	مدل چند محصولی تولیدی	
٪۱,۸	۲				۱	۱	مدل چند محصولی محدودیت دار	
٪۰,۹	۱		۱				مدل تک محصولی محدودیت دار	
٪۶,۴	۷	<b>مدل های تخفیف</b>						
٪۲,۷	۳		۲	۱			تخفیف کلی	
٪۰,۹	۱				۱		تخفیف نموی	
٪۲,۷	۳		۱	۱	۱		مدل حراج و افزایش قیمت	
٪۳۰,۰	۳۳	<b>مدل های احتمالی</b>						
٪۷,۳	۸	۱	۱	۲	۲	۲	مدل های احتمالی یک دوره ای	
٪۱۵,۵	۱۷	۳	۲	۲	۴	۶	مدل های احتمالی FOS	
٪۷,۳	۸	۲	۱	۲	۱	۲	مدل های احتمالی FOI	
٪۷,۳	۸	<b>پیش بینی</b>						
٪۴,۵	۵	۲	۱	۱	۱		هموار سازی نمائی	
٪۲,۷	۳			۱	۱	۱	سایر روش ها	
٪۱۰۰,۰	۱۱۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۳۰	<b>جمع</b>	

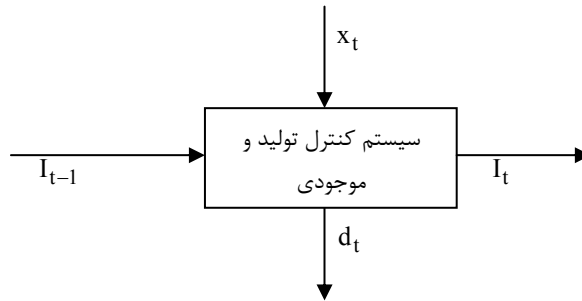
## ۱- تعاریف و مفاهیم کنترل موجودی

### ۱-۱- تعریف موجودی و کنترل موجودی

- **موجودی:** ذخیره‌ای از مواد و کالا است که برای مدت زمان مشخصی جهت جوابگویی تقاضا تحت کنترل سازمان به صورت ثابت نگهداری می‌شود.

**تعریف کنترل تولید و موجودی:** برنامه‌ریزی و کنترل جریان مواد و عملیات تولیدی شامل موادی که وارد سیستم می‌شود. (مواد اولیه و قطعات) موادی که در خط تولید جریان دارند (کالای نیمه ساخته) و اقلامی که از سیستم بصورت محصولات نهایی (کالای ساخته شده) خارج می‌شوند، عبارت بهتر کنترل تولید و موجودی عبارت است از فن نگهداری موجودی اقلام در سطح مطلوب به منظور برآوردن تقاضای مشتریان به میزان مناسب و در موعد مقرر بطوریکه هزینه سیستم حداقل گردد.

بطور کلی هر سیستم موجودی را می‌توان بصورت زیر نمایش داده و پارامترهای آن را تعریف نمود:



$x(t)$ : تابع چگالی خرید (تولید) هر یک از اقلام (قطعی، احتمالی)

$D(t)$ : تابع چگالی مصرف (تقاضا) هر یک از اقلام (قطعی، احتمالی)

$I(t)$ : تابع چگالی مقدار موجودی در دسترس (قطعی، احتمالی)

$$I_{t-1} + x_t = I_t + d_t$$

**نکته:** موادی که به صورت ثابت نگهداری نمی‌شوند مانند نفت داخل لوله‌های پالایشگاه جزو موجودی به حساب نمی‌آیند ولی موادی مانند نفت داخل مخازن نفتی که بر طبق تعریف هستند، جزو موجودی به حساب می‌آیند.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

## ۱-۲- عوامل موثر در مدل های موجودی

عوامل زیر سازنده فرضیات مدل های موجودی می باشند و با شناخت نوع آن ها در هر مدل می توان مدل های مختلف را از یکدیگر متمایز ساخت.

**۱- تقاضا:** مهم ترین عامل در کنترل موجودی است و به دو دسته قطعی و احتمالی که آن ها نیز به دو دسته ساکن و پویا تقسیم می گردند.

**۲- کمبود:** تقاضایی است که در زمان مقرر به آن جواب نمی دهیم. در مدل های موجودی می تواند کمبود مجاز باشد و یا مجاز نباشد

**۳- محدودیت:** در مدل های موجودی ممکن است محدودیت های زیر وجود داشته باشد:

- محدودیت فضا

- محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال

- محدودیت سرمایه درگیر موجودی

**۴- سفارش:** مدل های موجودی با توجه به نرخ و چگونگی دریافت سفارش به دو نوع مدل های تولیدی و مدل های خرید تقسیم می شوند.

- مدل خرید: در مدل خرید کل سفارش در یک لحظه به انبار تحویل داده می شود بنابراین نرخ دریافت سفارش بی نهایت است.

- مدل تولید: در مدل تولید سفارش به تدریج به انبار تحویل می گردد و در واقع نرخ دریافت سفارش یک عدد است.

**۵- مدت زمان تحویل سفارش (L):** مدت زمان بین لحظه سفارش تا لحظه دریافت اولین قطعه سفارش است و می تواند قطعی و یا احتمالی باشد.

**۶- قیمت کالا در طول مدت برنامه ریزی:** قیمت کالا در طول مدت برنامه ریزی می تواند ثابت باشد و یا این که متغیر باشد مانند مدل های تورمی، حراج، تخفیف و ...

**۷- برنامه ریزی:** در مدل های موجودی می توان برای یک محصول به صورت جدا و یا چند محصول به طور همزمان برنامه ریزی کرد.

**نکته:** تقاضا، محدودیت ها، هزینه ها، جایگزینی اجزایی هستند که با شناخت آن ها می توان سیستم های موجودی را از یکدیگر متمایز کرد و آن ها را شناخت.

**مثال:** کدام یک از موارد زیر مجموعه اجزای کاملی هستند که با شناخت آن ها می توان سیستم موجودی را تجزیه و تحلیل کرد؟

(کنکور ۸۵)

۱) زمان تدارک، تقاضا، محدودیت ها و هزینه ها

۲) محدودیت ها، جایگزینی، تقاضا، زمان تدارک

۳) زمان تدارک، تقاضا، هزینه ها و جایگزینی

۴) تقاضا، محدودیت ها، هزینه ها و جایگزینی (Replenishment)

حل : گزینه ۴ درست است.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

## ۳-۱- متغیرهای حالت در یک سیستم موجودی

در یک سیستم موجودی، متغیرهای حالت، متغیرهایی هستند که در هر لحظه وضعیت یا حالت سیستم موجودی را مشخص می‌کنند. این متغیرها به شرح ذیل می‌باشند:

$I(t)$ : موجودی در دست در زمان  $t$

$b(t)$ : مقدار کمبود در زمان  $t$

$O(t)$ : مقدار مواد در سفارش در زمان  $t$  یا مقدار سفارش در راه در زمان  $t$

**نکته:** سه متغیر فوق همگی غیرمنفی و مستقل می‌باشند در حالی که ۲ متغیری که در ادامه می‌آید وابسته به سه متغیر فوق هستند و می‌توانند منفی یا مثبت باشند.

**نکته:** در هر لحظه از زمان داریم:

$$I(t) - b(t) = 0$$

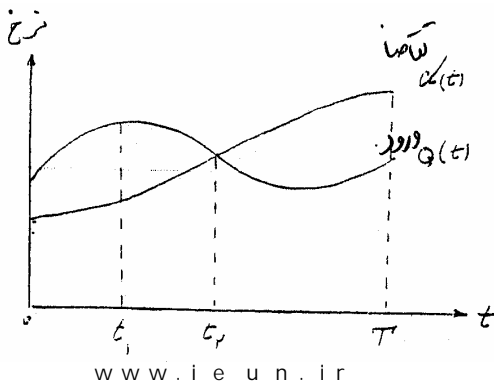
$NS(t)$ : موجودی خالص در زمان  $t$

$$NS(t) = I(t) - b(t)$$

$Y(t)$ : موقعیت موجودی در زمان  $t$

$$Y(t) = NS(t) + O(t) = O(t) + I(t) - b(t)$$

**مثال:** اگر در شکل زیر  $Q(t)$  و  $d(t)$  به ترتیب نرخ ورود کالا به سیستم و نرخ کالا از سیستم در زمان  $t$  باشد و در زمان صفر هیچ موجودی در سیستم نباشد؟ (کنکور ۸۵)



(۱) در مورد موجودی سیستم نمی‌توان اظهار نظر قطعی کرد.

(۲) در زمان  $t_2$  بیشترین موجودی انباشته شده در سیستم وجود خواهد داشت.

(۳) در زمان  $t_1$  بیشترین موجودی انباشته شده در سیستم وجود خواهد داشت.

(۴) در زمان  $T$  بیشترین موجودی انباشته شده در سیستم وجود خواهد داشت.

**حل:** گزینه ۲ درست است.

تا زمان  $t_2$  همیشه نرخ ورود کالا بیشتر از نرخ خروج کالا است، پس کالاها به صورت موجودی انباشته می‌شوند، از لحظه  $t_2$  به بعد  $d(t)$  از  $Q(t)$  کوچکتر خواهد شد پس کالاها بیشتر از این که وارد شوند خارج می‌شوند و از موجودی کاسته می‌شود بنابراین در زمان  $t_2$  بیشترین موجودی انباشته در سیستم وجود خواهد داشت.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

نکته :

$$NS(t) = \text{موجودی خالص}$$

$$\omega(t) = \text{نرخ خروجی} = \begin{cases} d(t) & NS(t) > 0 \\ a(t) & NS(t) < 0 \end{cases}$$

$$a(t) = \text{نرخ ورود}$$

$$d(t) = \text{نرخ تقاضا}$$

در این سؤال با توجه به نکته از آنجا که مدت فعالیت این سیستم نرخ تقاضا  $d(t)$  بیش از نرخ خروج  $\omega(t)$  بوده است. بنابراین نرخ خروج باید برابر با نرخ ورود  $a(t)$  باشد و همچنین با توجه به این که  $d(t) > \omega(t) \leftarrow d(t) > a(t)$  نیز خواهد بود و از آن جا که سطح موجودی اولیه برابر صفر بوده و نرخ ورود نیز از نرخ تقاضا کمتر است هیچ گاه امکان ندارد موجودی در انبار انباشته شود و همیشه با کمبود روبرو هستیم.

**مثال:** فرض کنید در ابتدا شروع فعالیت یک سیستم موجودی سطح موجودی صفر و در مدت فعالیت این سیستم نرخ تقاضا بیش از

نرخ خروج کالا از سیستم بده است کدام عبارت زیر غلط است؟ (کنکور ۸۷)

- ۱) حتماً در سیستم تقاضای عقب افتاده وجود خواهد داشت.
- ۲) هیچگاه موجودی انباشته شده در سیستم وجود نداشته است.
- ۳) حتماً نرخ ورود کالا در این مدت کوچکتر از نرخ تقاضا بوده است.
- ۴) دقیقاً نرخ خروج کالا برای نرخ ورود کالا به سیستم بوده است.

حل : گزینه ۱ درست است.

## ۴-۱- هزینه‌های سیستم موجودی

انواع هزینه‌های کنترل موجودی:

بطو کلی هزینه‌های کنترل تولید و موجودی به پنج دسته زیر تقسیم می شوند:

**الف) هزینه نگهداری:**

عبارتست از کلیه هزینه‌های درون کارخانه ای انبار که به تعداد اقلام وابسته می‌باشد. این هزینه وابسته به زمان می‌باشد، یعنی با افزایش زمان نگهداری هزینه بیشتر می شد و شامل موارد زیر است:

هزینه انبارداری هر واحد کالا در طول دوره (H)

هزینه فضای انبار (W)

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

بیمه و مالیات در درون کارخانه اگر به تعداد اقلام وابسته باشد.

هزینه سربرار (سرمایه راکد)

اگر همین پول را در جای دیگر بکار می‌گرفتیم سود بیشتری حاصل می‌شد. این هزینه گاهی به هزینه فرصت از دست رفته (بهره وام) تعبیر می‌شود.

هزینه حمل و نقل درون کارخانه‌ای اگر به تعداد اقلام وابسته باشد.

هزینه متروکه یا دمده شدن کالا به دلیل تغییر تکنولوژی و دلایل مشابه.

هزینه فاسد شدن، خرابی و ضایعات کالا اگر به تعداد اقلام وابسته باشد.

هزینه کم شدن کالا (تبخیر، خشک شدن، آب رفتن، دزدی و ...)

اگر این مقدار کم شدن ناچیز باشد از آن صرف‌نظر می‌کنند.

هزینه اسقاط، جابجایی کالا در انبار و ...

هزینه بازرسی صددرصد

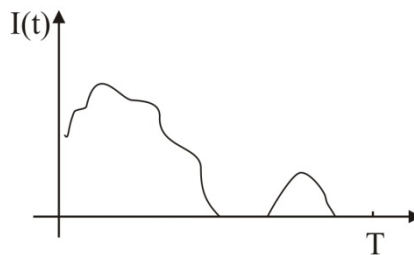
این هزینه بدلیل صددرصد بودن بازرسی به تعداد اقلام وابسته می‌باشد.

(الف) روش‌های محاسبه هزینه نگهداری (H)

در انباری که قطعات با ابعاد مختلف، اشکال مختلف، موارد مصرف مختلف، مدت نگهداری مختلف، قیمت‌های مختلف، حساسیت‌های مختلف و ... وجود دارد، اگر بخواهیم هزینه نگهداری یک قطعه را به دلخواه انتخاب کرده و محاسبه کنیم می‌توانیم به یکی از سه روش زیر عمل کنیم.

## نحوه محاسبه هزینه نگهداری از 0 تا T

هزینه نگهداری بر اساس منحنی موجودی در دست به صورت زیر محاسبه می‌گردد.



$$T \text{ تا } 0 \text{ هزینه نگهداری کل} = h \times (\text{مساحت زیرمنحنی موجودی در دست}) = h \int_0^T I(t) dt = h \bar{I} T$$

$$\bar{I} (\text{متوسط موجودی}) = \frac{\text{مساحت زیرمنحنی در دست}}{T} = \frac{\int_0^T I(t) dt}{T}$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....



با استفاده از رابطه هزینه نگهداری، کل هزینه نگهداری سالیانه با قرار دادن  $T=1$  به دست می‌آید.

$$h\bar{I} = \text{کل هزینه نگهداری سالیانه}$$

**نکته:** تمامی هزینه‌های نگهداری موجودی عموماً به قیمت محصول بستگی دارد به جز هزینه تسهیلات انبار که از دو جهت با بقیه متفاوت است:

۱- به قیمت واحد محصول (C) بستگی ندارد.

۲- تسهیلات انبار می‌تواند بر اساس ماکزیمم موجودی در مدت زمان بررسی می‌شود، اما سایر هزینه‌های نگهداری بر اساس متوسط موجودی بیان می‌شود.

کل هزینه‌های سالیانه برای این حالت به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$h_1$ : هزینه‌هایی از نگهداری که به متوسط موجودی بستگی دارد.

$h_2$ : هزینه‌هایی از نگهداری که به ماکزیمم موجودی بستگی دارد.

$$\text{کل هزینه نگهداری سالیانه} = h_1 \bar{I} + h_2 I_{\max}$$

**نکته:** هزینه ساخت انبار جزو هزینه های سرمایه گذاری می‌باشد.

## ب) هزینه ثابت و سفارش یا تدارک:

عبارتست از کلیه هزینه‌هایی که در زمان تدارک انجام می‌شود، این هزینه برخلاف هزینه نگهداری مستقل از تعداد اقلام است ولی هر چه LT زیادتر شود این هزینه زیادتر می‌شود و شامل موارد زیر است:

هزینه آماده‌سازی تجهیزات

هزینه پیگیری های خرید

هزینه بازرسی بصورت نمونه‌گیری

هزینه مهارت یافتن کارگران انبار (راندمان کاری)

هزینه تهیه و اجرای سیستم انبار

هزینه کارهای دفتری انبار

هزینه عدم استفاده از تخفیف

هزینه خرابی، ضایعات و فاسد شدن کالا اگر به تعداد اقلام وابسته نباشد.

هزینه حمل و نقل درون و برون کارخانه‌ای اگر به تعداد اقلام وابسته نباشد.

هزینه گمرک اگر مستقل از تعداد اقلام باشد.

هزینه خدمات ویژه (نور، حرارت، مرتب کردن تجهیزات، تهیه ابزار جدید و ...)

هزینه استهلاك اماکن و تجهیزات انبار

هزینه ناشی از تغییرات فصلی قیمت‌ها

سایر موارد (هزینه سربار = سرمایه راکد)

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....



## ج) هزینه کمبود

این هزینه بطور کلی به دو دسته زیر تقسیم می‌شود:

الف) هزینه کمبود وابسته به زمان (قابل جبران - سفارشات عقب افتاده)  $\hat{b} = \pi$

ب) هزینه کمبود مستقل از زمان (غیرقابل جبران - فروش از دست رفته)  $\hat{b} = \pi$

تذکر:

اگر با کمبود مواجه شویم در صورت برآوردن تقاضا در آینده کمبود قابل جبران است ولی اگر مشتری از دست برود حالت غیرقابل جبران است.

هزینه‌های کمبود وابسته به زمان شامل موارد زیر است:

متوقف شدن خط تولید (بیکاری کارگران و ماشین آلات)

هزینه کاهش اعتبار شرکت (دیرکرد سفارشات عقب افتاده)

هزینه جایگزینی اقلام گران از منابع دیگر (خالی بودن انبار)

هزینه ناشی از عدم اجرای قرارداد در موعد مقرر (فرصت از دست رفته)

سایر موارد

## محاسبه ی هزینه کمبود

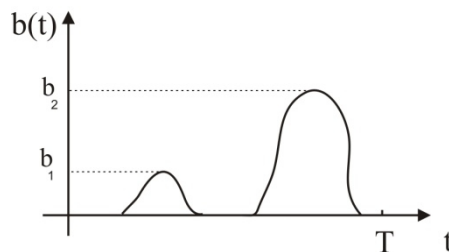
هزینه ی کمبود هزینه‌ای است که به صورت جریمه باعث عدم تامین به موقع تقاضا به سیستم شارژ می‌شود. این هزینه به دو دسته تقسیم می‌شود.

- هزینه کمبود وابسته به زمان ( $\hat{\pi}$ )

- هزینه کمبود مستقل از زمان ( $\pi$ )

## نحوه محاسبه کل هزینه کمبود از 0 تا T

هزینه کمبود بر اساس منحنی میزان کمبود بر حسب زمان محاسبه می‌گردد.



تعداد کمبود از 0 تا T)  $\pi$  + (مساحت زیرمنحنی کمبود)  $\hat{\pi}$  = کل هزینه کمبود از 0 تا T

$$= \hat{\pi} \int_0^T b(t) dt + \pi(b_1 + b_2) = \hat{\pi} \bar{b} T + \pi(b_1 + b_2)$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

$$\bar{b} = \frac{\int_0^T b(t) dt}{T} \quad (\text{متوسط کمبود})$$

### د) هزینه خرید

این هزینه وابسته به مقدار یا تعداد کالا می‌باشد و معمولاً بصورت متوسط قیمت وزنی (هزینه تولید سالیانه وزنی) محاسبه شده و شامل موارد زیر است:

قیمت خرید یا هزینه متغیر تولید

هزینه حمل و نقل کالا در بیرون کارخانه اگر به تعداد اقلام وابسته باشد.

هزینه گمرگ در صورتیکه به تعداد اقلام وابسته باشد.

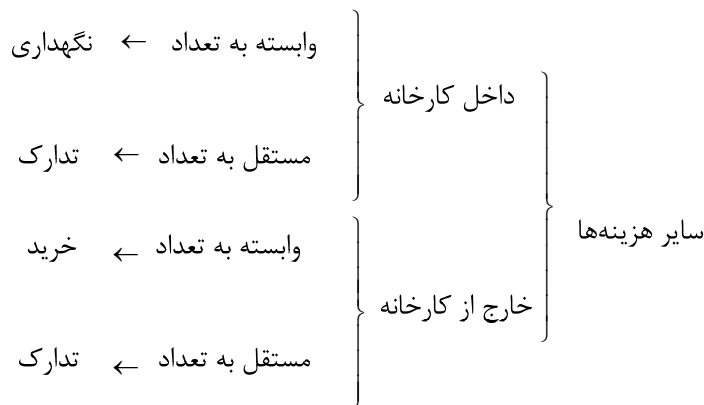
هزینه فاسد شدن خرابی و ضایعات اقلام در بیرون کارخانه اگر به تعداد اقلام وابسته است.

هزینه بارگیری و باراندازی اگر به تعداد اقلام وابسته باشد.

سایر موارد

### ه) سایر موارد

این هزینه‌ها بطور کلی شامل تقسیم‌بندی زیر می‌باشد:



کلیه هزینه‌ها باید به کمک دسته‌بندی بالا در جای خود قرار گرفته و محاسبه شوند.

**تذکر:** هزینه های بیمه، مالیات، گمرک، ضایعات، شمارش کالا، مرور خرابی، فاسد شدن، بارگیری، باراندازی، حمل و نقل درون کارخانه‌ای بطور معمول به تعداد اقلام وابسته است.

**نکته:** هزینه‌های حمل و نقل مواد سفارش داده شده و بازرسی جزو هزینه‌های تدارک مواد محسوب می‌شوند. این هزینه‌ها اگر قابل بیان به ازای واحد محصول باشند در قیمت محصول محاسبه شده و جزو هزینه‌های خرید مواد و یا هزینه‌های تولید محصول قرار می‌گیرند. در غیر این صورت در هزینه‌های سفارش‌دهی و یا هزینه‌های آماده‌سازی محاسبه می‌گردند.

### یادداشت:

.....

.....

.....

.....

**مثال:** هزینه‌های بازرسی و دریافت موجودی می‌تواند جزو کدام یک از هزینه‌های زیر باشد؟ (کنکور ۸۵)

(۱) هزینه خرید

(۲) هزینه نگهداری

(۳) هزینه افت موجودی

(۴) جزو هیچ یک از هزینه‌های خرید، نگهداری و افت موجودی نمی‌تواند باشد.

**حل:** گزینه ۱ درست است.

**مثال:** کدام یک از جملات زیر نادرست است؟ (کنکور ۸۵)

(۱) نگهداری موجودی بعضاً باعث هموار سازی عملیات سازمان می‌شود.

(۲) نگهداری موجودی می‌تواند به دلیل مقابله با عدم قطعیت تقاضا باشد.

(۳) نگهداری موجودی می‌تواند به دلیل جلوگیری از زیان ناشی از افزایش قیمت در آینده باشد.

(۴) نگهداری موجودی در هر شرایطی امری غیر اقتصادی است، چرا که اصولاً نگهداری موجودی هزینه زا است.

**حل:** گزینه ۴ درست است.

**مثال:** کدام یک از موارد زیر جزو هزینه‌های نگهداری موجودی محسوب نمی‌شود؟ (کنکور ۸۵)

(۱) هزینه ساخت انبار

(۲) هزینه فاسد شدن موجودی

(۳) هزینه حمل و نقل موجودی در داخل انبار

(۴) هیچ کدام

**حل:** گزینه ۱ درست است.

**مثال:** هزینه‌های حمل و نقل موجودی جزو کدام یک از هزینه‌های سیستم موجودی است؟

(۱) هزینه خرید

(۲) هزینه سفارش

(۳) هزینه نگهداری

(۴) می‌تواند جزو هر یک از هزینه‌های نگهداری، خرید یا سفارش باشد.

**حل:** گزینه ۴ درست است.

**نکته:** هزینه‌های حمل و نقل در صورتی که در داخل انبار باشد و بر اساس واحد محصول قابل بیان باشد جزو هزینه‌های نگهداری

است. در صورتی که خارج از انبار و از زمان سفارش تا درب انبار باشد، اگر به ازای واحد محصول قابل بیان باشد جزو هزینه‌های

خرید و اگر قابل بیان به ازای واحد محصول نباشد جزو هزینه‌های سفارش‌دهی است.

**یادداشت:**

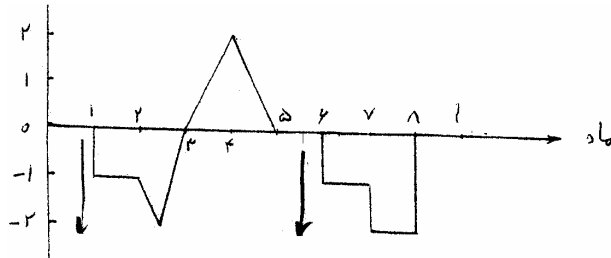
.....

.....

.....

.....

**مثال:** اگر هزینه نگهداری یک واحد موجودی در ماه برابر 300 تومان و هزینه کمبود یک واحد موجودی برابر 100 تومان باشد و منحنی موجودی خالص به شرح شکل زیر باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد هزینه نگهداری و کمبود در طی 9 ماه گذشته صحیح است؟ (کنکور ۸۵)



(۱) 1300 تومان

(۲) 1100 تومان

(۳) 1000 تومان

(۴) 900 تومان

گزینه ۳ درست است.

$$h = 300 \rightarrow \text{هزینه نگهداری} = 30 \times \left( \frac{2 \times 2}{2} \right) = 600$$

$$\pi = 100 \rightarrow \text{هزینه نگهداری} = 100(2+2) = 400$$

$$\text{مجموع هزینه‌ها} = 600 + 400 = 1000$$

**نکته:** هزینه انبارگردانی پایان سال مالی جهت دقیق کردن اطلاعات موجودی بوده و بنابراین جزو هزینه‌های موجودی است

**مثال:** هزینه انبار گردانی پایان سال مالی جزو هزینه‌هاست؟ (کنکور ۸۵)

(۲) جزو هزینه‌های سیستم خرید است.

(۱) جزو هزینه‌های سیستم تولید است.

(۴) جزو هزینه‌های سیستم مالی و حسابداری است.

(۳) جزو هزینه‌های سیستم موجودی است.

حل : گزینه ۳ درست است.

**مثال:** مدیر یک موسسه تهیه و توزیع کالاهای اساسی تصمیم گرفته است برای هر یک از کالاها، ذخیره احتیاطی ایجاد نماید.  $C$  قیمت هر واحد کالا،  $H$  هزینه نگهداری سالیانه هر واحد کالا،  $ROP$  نقطه سفارش مجدد و  $SS$  مقدار ذخیره احتیاطی یک نوع کالا است. به نظر شما در صورت ایجاد ذخیره احتیاطی برای این نوع کالا، هزینه سالیانه سیستم کنترل موجودی چقدر افزایش پیدا می‌کند؟ (کنکور ۸۹)

(۲)  $H \times SS$

(۱)  $H \times ROP$

(۴)  $(C + H) \times ROP$

(۳)  $(C + H) \times SS$

حل : گزینه ۳ درست است.

هزینه‌ی خرید و نگهداری موجودی اطمینان اضافه می‌گردد.

$(C + H) \times SS$

یادداشت:

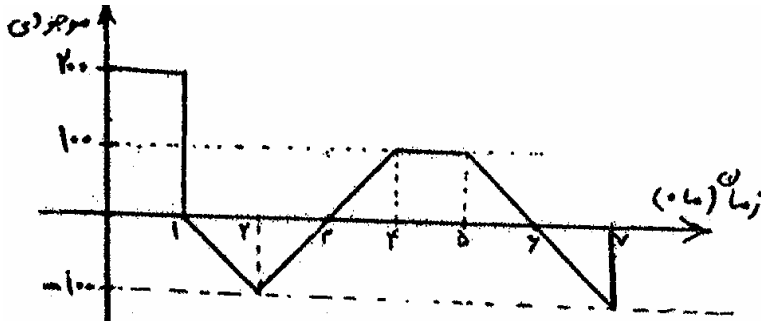
.....

.....

.....

.....

**مثال:** هزینه نگهداری هر واحد کالا 10 تومان در ماه و هزینه ثابت کمبود هر واحد آن 20 تومان است. مجموع هزینه‌های نگهداری و کمبود مربوط به کالایی که وضعیت موجودی آن مشابه شکل زیر است، در طی هفت ماه چند تومان است؟ (کنکور ۸۹)



- 4000 (۱)
- 2000 (۲)
- 8000 (۳)
- 10000 (۴)

حل : گزینه ۳ درست است.

$$h = 10 \text{ در ماه} \quad b = b_1 + b_2 = 100 + 100 = 200$$

$$\pi = 20 \quad \pi(b) = 20 \times 200 = 4000 \text{ هزینه کمبود}$$

$$4000 \times 10 = 4000 \text{ هزینه نگهداری} = 400 + \frac{4 \times 100}{2} = 200 \text{ سطح بالای نمودار}$$

$$4000 + 4000 = 8000 \text{ مجموع هزینه‌ی کمبود نگهداری}$$

## ۲- مدل قطعی ساده، ویلسون، مقدار سفارش اقتصادی یا EOQ

فرضیات مدل به شرح ذیل است. این فرضیات همان‌طور که ذکر گردید بر اساس عوامل موثر در مدل‌های موجودی تعیین می‌گردند.

- ۱- تقاضا قطعی و ساکن است.
- ۲- کمبود جایز نیست.
- ۳- محدودیت وجود ندارد.
- ۴- سفارش یک‌جا دریافت می‌شود.
- ۵- مدت زمان تحویل سفارش قطعی و عددی است.
- ۶- قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی ثابت است.
- ۷- مدل تک محصولی است.

پارامترهای مدل:

A : هزینه هر بار سفارش (هزینه سفارش‌دهی)

D : نرخ تقاضا

h : هزینه نگهداری هر واحد کالا در واحد زمان

i : نرخ هزینه نگهداری در سال

c : قیمت واحد کالا

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

$\omega$ : هزینه نگهداری که به قیمت کالا بستگی ندارد

$\pi, \hat{\pi}$ : هزینه‌های کسری واحد کالا هزینه‌های کسری در مدل EOQ بسیار زیاد ( $\infty$ ) می‌باشند

$P$ : نرخ تولید، دریافت سفارش در مدل EOQ آنی و بنابراین نرخ تولید بسیار زیاد ( $\infty$ ) می‌باشد

$L$ : مدت زمان تحویل سفارش

متغیرهای مدل:

$Q$ : مقدار هر بار سفارش

$\Gamma$ : نقطه سفارش بر حسب موقعیت موجودی. بدین معنی که هر وقت در نمودار موقعیت موجودی، موجودی محصول برابر مقدار  $\Gamma$  شود زمان سفارش است.

$\Gamma_h$ : نقطه سفارش بر حسب موجودی خالص یا موجودی در دست. بدین معنی که هر وقت در نمودار موجودی خالص موجودی محصول برابر مقدار  $\Gamma_h$  شود، زمان سفارش است.

متغیر دیگری که می‌توان آن را از طریق بقیه متغیرها به دست آورد  $T$  است.

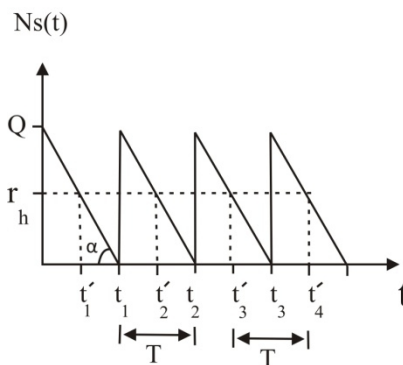
$T$ : فاصله بین دو سفارش متوالی یا فاصله بین رسیدن دو سفارش متوالی یا مدت زمانی یک دوره

هدف مدل EOQ تعیین مقدار سفارش اقتصادی ( $Q^*$ ) و تعیین  $\Gamma_h^*, \Gamma^*$  با کمینه کردن هزینه‌ها (مجموع هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی سالیانه) است.

در این مدل  $Q^*$  را با  $Q_\omega$  یا EOQ نیز نشان می‌دهند.

## ۱-۲ نحوه محاسبه مقدار سفارش اقتصادی ( $Q^*$ )

نمودار موجودی خالص در مدل EOQ مانند شکل زیر می‌باشد. در این نمودار زمان‌های  $t$ ، زمان دریافت سفارش و زمان‌های  $t'$ ، زمان صدور سفارش است که فاصله زمانی بین هر دو  $t$  و  $t'$  متوالی برابر زمان یک دوره  $T$  است.



$$b(t)=0$$

$$Ns(t)=I(t)-b(t)$$

$$D=tg\alpha \text{ نرخ کاهش یا مصرف کالا}$$

$$\text{متوسط کل هزینه سالیانه سیستم موجودی} = n \text{ (هزینه یک دوره)} = \frac{D}{Q}A + h\frac{Q}{2} + CD$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

کل هزینه نگهداری سالیانه  $h \frac{Q}{2}$

کل هزینه سفارشی طی سالیانه  $\frac{D}{Q} A$

کل هزینه خرید سالیانه  $CD$

برای یافتن  $Q^*$  باید از رابطه فوق بر حسب  $Q$  مشتق گرفته شود. از آنجا که  $CD$  به مقدار  $Q$  بستگی ندارد بنابراین در مشتق گیری مقادیرش برابر صفر قرار می گیرد. از این رو  $k(Q)$  را به صورت زیر تعریف کرده و هزینه متغیر سالیانه می نامند.

$$K(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{hQ}{2}$$

در صورتی که مشتق تابع فوق بر حسب  $Q$  برابر صفر قرار دهیم، مقدار  $Q^*$  به دست می آید.

$$\frac{dK(Q)}{dQ} = 0 \Rightarrow Q^* = Q_{\omega} = EOQ = \sqrt{\frac{2DA}{h}}$$

همچنین هزینه متغیر سالیانه بهینه  $(K(Q^*))$  و زمان دوره بهینه  $(T^*)$  از روابط زیر محاسبه می گردد:

$$K(Q^*) = \frac{DA}{Q^*} + \frac{hQ^*}{2} = \sqrt{2DAh}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}$$

**نکته:** اگر  $h \rightarrow 0$  در رابطه مقدار سفارش اقتصادی  $Q \rightarrow \infty$  میل می کند.

**مثال:** کدام عبارت زیر در مورد مدل ساده قطعی صادق است؟ (کنکور ۸۷)

- (۱) هزینه هر بار سفارش دهی بستگی به مقدار دارد.
- (۲) هزینه خرید واحد موجودی بستگی به محدوده‌ی خرید دارد.
- (۳) هزینه نگهداری سالیانه موجودی مستقل از مقدار سفارش است.
- (۴) هزینه سالیانه سیستم موجودی بدون در نظر گرفتن محدودیت‌ها تعیین می شود.

**حل:** گزینه ۴ درست است.

**مثال:** در یک سیستم کنترل موجودی با شرایط مدل ساده قطعی دو نوع کالا کنترل می شود. تقاضای سالیانه و هزینه ثابت هر بار

سفارش برای کالای یک به ترتیب ۵۰۰ واحد کالا و ۵۰ واحد پول و برای کالاش شماره ۲ به ترتیب ۴۰۰ واحد کالا و ۲۰

واحد پول برآورده شده است. اگر هزینه نگهداری قابل چشم پوشی باشد مقدار سفارش برای هر کالا چقدر است؟ (کنکور ۸۶)

$$Q_2 = 100, \quad Q_1 = 500 \quad (۲)$$

$$Q_2 = 80, \quad q_1 = 1100 \quad (۱)$$

$$Q_2 = 80, \quad Q_1 = 50 \quad (۴)$$

$$Q_2 = Q_1 = \text{مقدار بسیار زیاد} \quad (۳)$$

**حل:** گزینه ۳ درست است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....



**مثال:** تقاضای محصول 300 کیلو در ماه و هزینه آماده سازی دستگاه برای تولید هر بار محصول 7000 تومان تخمین زده است. نرخ بهره قابل قبول به عنوان هزینه سرمایه گذاری در موجودی 20% در سال و هزینه نگهداری هر کیلو موجودی در ماه 10 تومان است. با فرض نرخ تولید نامحدود و مجاز نبودن کمبود در صورتی که هزینه تولید هر کیلوی این محصول 100 تومان باشد، به نظر شما مقدار سفارش اقتصادی تولید بر حسب کیلوگرم حدوداً چقدر است؟ (کنکور ۸۸)

$$Q^* = 374 \quad (۱) \quad Q^* = 458 \quad (۲) \quad Q^* = 648 \quad (۳) \quad Q^* = 600 \quad (۴)$$

حل : گزینه ۴ درست است.

$$D = 300 \times 12 = 3600$$

$$A = 7000 \quad i = 0.2 \quad w = 10 \times 12 = 120 \quad C = 100$$

$$h = i \cdot c + w = 0.2 \times 100 + 120 = 140$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 3600 \times 7000}{140}} = 600$$

**مثال:** در مدل EOQ اگر هزینه اجاره انبار یکی از اجزای هزینه نگهداری محصول باشد، آنگاه در فرمول EOQ هزینه اجاره بر چه مبنایی محاسبه شده است؟ (کنکور ۸۵)

(۱) بر مبنای حداکثر موجودی در انبار محاسبه شده است.

(۲) بر مبنای متوسط موجودی در انبار محاسبه شده است.

(۳) بر مبنای حداقل موجودی در انبار محاسبه شده است.

(۴) بستگی به سایر اجزاء هزینه نگهداری دارد.

حل : گزینه ۲ درست است.

## ۲-۲- نقطه سفارش بهینه $r^*, r_h^*$

نقطه سفارش مجدد در مدل EOQ از رابطه‌های زیر محاسبه می‌گردد.

$$\begin{cases} r^* = D.L \\ r_h^* = D.L - mQ^* \end{cases}$$

$$m = \left\lfloor \frac{L}{T} \right\rfloor$$

**مثال:** فرض کنید در یک سیستم کنترل موجودی با فرضیات مدل ساده قطعی  $L = mT$  است که در آن  $L$  مدت زمان تحویل،  $m$  یک عدد و  $T$  طول یک دوره سفارش است. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (کنکور ۸۵)

(۱) کالای در سفارش برابر  $(m+1)Q$  است.

(۲) همیشه موجود در دست در لحظه صدور سفارش برابر صفر خواهد بود.

(۳) همیشه موجودی در دست در لحظه صدور سفارش برابر  $Q$  خواهد بود.

(۴) به جز در نقطه سفارش، کالای در سفارش برابر  $(m+1)Q$  است.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

حل : گزینه ۲ درست است.

نکته : در صورتی که  $L = mT$  (مدت زمان تحویل مضرب صحیحی از طول یک دوره سفارش است) موجودی در دست در لحظه‌ی صدور سفارش برابر صفر است .

$$r_h^* = D.L' = D.0 = 0$$

مثال: در یک مدل ساده قطعی کنترل موجودی مصرف سالانه 1000 واحد و مقدار اقتصادی سفارش 200 واحد تعیین شده است اگر مدت زمان تحویل سه ماه باشد متوسط موجودی در سفارش چند واحد خواهد بود؟ (کنکور ۸۶)

- 100 (۱)      200 (۲)      250 (۳)      300 (۴)

حل : گزینه ۳ درست است.

$$D \times L = 1000 \times \frac{3}{12} = 250$$

متوسط موجودی در سفارش برابر است با :

مثال: مقدار سفارش اقتصادی محصولی برابر 1000 واحد است. تقاضا برای این محصول در سال برابر 20000 واحد است. بر اساس اطلاع فروشنده زمان تدارک (مدت تحویل) محصول به نصف کاهش پیدا کرده است. با توجه به این اطلاع کدام عبارت، صحیح است؟ (کنکور ۸۸)

- ۱) نقطه سفارش کالا کاهش پیدا می کند.
- ۲) مقدار سفارش اقتصادی کاهش پیدا می کند.
- ۳) هزینه نگهداری سالانه سیستم افزایش پیدا می کند.
- ۴) هزینه نگهداری سالانه کاهش ولی هزینه سفارش دهی افزایش می یابد.

حل : گزینه ۱ درست است.

نکته: در تقاضای قطعی مدت زمان تحویل فقط روی نقطه سفارش تأثیر مستقیم دارد.

## ۲-۳- نکات مدل EOQ

نکته ۱: روابط زیر برای موقعیت موجودی  $(y(t))$  برقرار است.

$$r^* \leq y(t) \leq r^* + Q^*$$

$$D.L \leq y(t) \leq DL + DT^*$$

همچنین برای موجودی در دست  $(I(t))$  داریم:

$$0 \leq I(t) \leq Q^* = DT^*$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

**نکته ۲:** در مدل‌های EOQ،  $r_h^*$  می‌تواند برابر صفر گردد ولی نمی‌تواند برابر  $Q^*$  شود.

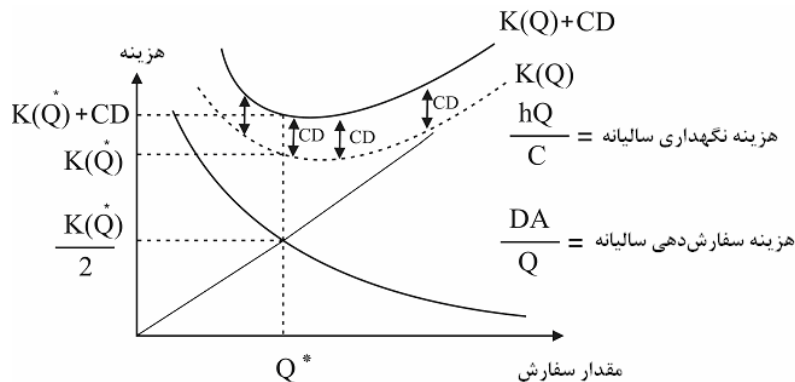
$$0 \leq r_h^* < Q^* = DT^*$$

اگر مدت زمان تحویل سفارش مضرب صحیحی از  $T$  باشد ( $L = mT$ ،  $L' = 0$ ) آن‌گاه  $r_h^*$  برابر با صفر است ( $r_h^* = D.L' = 0$ )

**نکته ۳:** در مدل EOQ در زمان‌های قبل از زمان سفارش مقدار سفارش در راه معادل  $mQ^*$  و زمان‌های پس از سفارش، مقدار آن  $(m+1)Q^*$  است. به‌طور متوسط مقدار سفارش در راه معادل  $D.L$  است. همچنین متوسط تعداد محموله‌های در سفارش یا

متوسط تعداد دفعات سفارشی که به دست ما نرسیده برابر با  $\frac{L}{T^*} = \frac{DL}{Q^*}$  است.

**نکته ۴:** بررسی هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری سالیانه با افزایش مقدار سفارش



همان‌طور که مشاهده می‌شود منحنی  $k(Q)$  از جمع دو منحنی هزینه سفارش‌دهی سالیانه و هزینه نگهداری سالیانه به دست می‌آید. منحنی هزینه نگهداری سالیانه روند صعودی و منحنی هزینه سفارش‌دهی سالیانه روند نزولی دارد. منحنی کل هزینه‌های سالیانه  $(k(Q)+CD)$  نیز با اضافه شدن مقدار ثابت  $CD$  به منحنی  $K(Q)$  به دست آمده است.

**نکته ۵:** در نقطه بهینه هزینه سفارش‌دهی سالیانه با هزینه نگهداری سالیانه برابر است یعنی محل تلاقی منحنی‌های هزینه نگهداری سالیانه و هزینه سفارش‌دهی سالیانه نقطه بهینه است.

$$\frac{DA}{Q^*} = \frac{hQ^*}{2} = \frac{\sqrt{2DAh}}{2} = \frac{K(Q^*)}{2} \Rightarrow K(Q^*) = \sqrt{2DAh} = hQ^* = \frac{2DA}{Q^*} = \frac{2A}{T} = 2nA$$

**نکته ۶:** شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه به ترتیب برای هزینه نگهداری سالیانه و هزینه سفارش‌دهی سالیانه معادل  $\frac{-h}{2}$ ،  $\frac{h}{2}$  است.

**نکته ۷:** رابطه بین هزینه سفارش‌دهی سالیانه و هزینه نگهداری سالیانه در صورتی که بیشتر یا کمتر از سفارش اقتصادی سفارش دهیم به صورت زیر است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

- اگر  $Q > Q^*$  ↔ هزینه نگهداری < هزینه سفارش دهی  
 اگر  $Q = Q^*$  ↔ هزینه نگهداری = هزینه سفارش دهی  
 اگر  $Q < Q^*$  ↔ هزینه نگهداری > هزینه سفارش دهی

نکته ۸: شیب منحنی هزینه‌ها در سمت راست نقطه بهینه نسبت به سمت چپ آن ملایم‌تر است.

$$K(Q^* - a) > K(Q^* + a)$$

نکته ۹: در صورتی که در محاسبه مقدار سفارش بهینه به اشتباه یا از روی تخمین به جای یکی از پارامترها مقداری را جایگزین کنیم، مقدار سفارش انجام شده با این پارامتر ناهینه خواهد بود و هزینه‌های سالیانه افزایش خواهد یافت. به طور کلی هنگامی که به جای  $Q^*$ ،  $Q$  ناهینه سفارش دهیم، نسبت این افزایش برای کل هزینه متغیر سالیانه از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)} = \frac{1}{2} \left( \frac{Q^*}{Q} + \frac{Q}{Q^*} \right)$$

مثال: شرکتی در پایان یک دوره ۱۲ ماهه متوجه می‌شود که هزینه‌های کنترل موجودی نسبت به حالت بهینه ۲۵ درصد افزایش داشته است طی بررسی‌های به عمل آمده مشخص می‌شود که هزینه‌های نگهداری هر واحد کالا اشتباهاً عدد ۲ واحد پول در نظر گرفته شده است هزینه نگهداری واقعی برابر است با: (کنکور ۸۷)

- ۴) ۲۰ واحد پول      ۳) ۱۲ واحد پول      ۲) ۸ واحد پول      ۱) ۴ واحد پول

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)} = 1.25 \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{Q^*} + \frac{Q^*}{Q} \right) \Rightarrow \frac{Q}{Q^*} = 2 \text{ یا } \frac{1}{2}$$

$$(۱) Q = 2Q^* \quad h' = \frac{h}{4} \rightarrow h = 4 \times 2 = 8$$

$$(۲) Q = \frac{Q^*}{2} \quad h' = 4h \rightarrow h = \frac{2}{4} = 0.5$$

با توجه به رابطه  $Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$  حالت (۱) زمانی اتفاق می‌افتد که واحد هزینه نگهداری به اشتباه  $\frac{1}{4}$  مقدار واقعی قرار گرفته باشد و

حالت (۲) زمانی اتفاق می‌افتد که واحد هزینه نگهداری ۴ برابر مقدار واقعی در رابطه ویلسون قرار باشد.

مثال: در یک شرکت خدماتی هزینه سالیانه سیستم موجودی ۱.۲۵ برابر هزینه سالیانه سیستم در حالت بهینه است مقدار افزایش هزینه سالیانه سیستم به نظر شما ناشی از کدام مورد، است؟ (کنکور ۸۸)

- ۱) مقدار سفارش ۲.۵ برابر مقدار بهینه است.  
 ۲) مقدار سفارش نسبت به حالت بهینه ده درصد کمتر است.  
 ۳) مقدار سفارش به میزان نصف مقدار سفارش اقتصادی است.  
 ۴) مقدار سفارش ۲۵٪ بیش‌تر از مقدار سفارش اقتصادی است.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

حل : گزینه ۳ درست است.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)} = \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{Q^*} + \frac{Q^*}{Q} \right) = 1.25$$

$$\frac{Q}{Q^*} = 2 \text{ یا } \frac{1}{2}$$

نکته ۱۰: برای مقایسه تغییرات کل هزینه سالیانه  $(K(Q)+CD)$  نمی‌توان مانند هزینه متغیر سالیانه  $K(Q)$  رابطه‌ای یافت، تنها می‌توان حدود تغییر آن را از نامساوی زیر به دست آورد.

$$1 \leq \frac{K(Q)+CD}{K(Q^*)+CD} < \frac{K(Q)}{K(Q^*)}$$

نکته ۱۱: در صورتی که یکی از پارامترهای مدل تغییر کند، آنگاه مطمئناً مقدار سفارش بهینه  $(Q^*)$  و هزینه بهینه متغیر سالیانه  $(K(Q^*))$  تغییر می‌کند و نسبت این تغییرات به صورت زیر است.

$$\frac{Q_1^*}{Q_0^*} = \frac{\sqrt{\frac{2D_1 A_1}{h_1}}}{\sqrt{\frac{2D_0 A_0}{h_0}}} = \sqrt{\frac{D_1}{D_0}} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \cdot \sqrt{\frac{h_0}{h_1}}$$

$$\frac{K(Q_1^*)}{K(Q_0^*)} = \frac{\sqrt{2D_1 A_1 h_1}}{\sqrt{2D_0 A_0 h_0}} = \sqrt{\frac{D_1}{D_0}} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \cdot \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$$

نکته ۱۲: با افزایش پارامترهای مدل مقدار سفارش بهینه و هزینه متغیر سالیانه به صورت زیر تغییر می‌کند:

$K(Q^*)$	$Q^*$	
افزایش	افزایش	افزایش A
افزایش	افزایش	افزایش D
افزایش	کاهش	افزایش h
افزایش	کاهش	افزایش i
افزایش	کاهش	افزایش c
افزایش	کاهش	افزایش w
تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند	افزایش L

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

**نکته ۱۳:** اگر  $h_1$ ، هزینه نگهداری هر واحد موجودی در سال بر اساس متوسط موجودی و  $h_2$  هزینه نگهداری هر واحد در سال بر اساس ماکزیمم موجودی باشد. در محاسبه فرمول‌های مدل EOQ به جای مقدار  $h$ ، مقدار  $h_1 + 2h_2$  جایگزین می‌گردد، در واقع هزینه نگهداری که بر اساس ماکزیمم موجودی باشد در ۲ ضرب شده و با هزینه نگهداری متوسط موجودی جمع می‌گردد و جایگزین  $h$  می‌شود.

**نکته ۱۴:** هزینه نگهداری در سال که بر اساس واحد موجودی بیان نشود، تاثیری در مقدار بهینه سفارش ندارد.

**نکته ۱۵:** فقط در حالت بهینه هزینه نگهداری سالیانه با هزینه سفارش‌دهی سالیانه برابر است.

هزینه سفارش‌دهی سالیانه بهینه = هزینه نگهداری سالیانه بهینه

**نکته ۱۶:** در مدل EOQ چون هزینه سفارش دهی سالیانه در حالت بهینه با کل هزینه نگهداری سالیانه برابر است. بنابراین اگر کل هزینه‌های سفارش‌دهی سالیانه بهینه کاهش یابد، کل هزینه‌ی نگهداری سالیانه نیز به همان میزان کاهش خواهد یافت.

**مثال:** کدام عبارت زیر در مورد مدل ساده قطعی صادق است؟ (کنکور ۸۸)

- (۱) هزینه هر بار سفارش دهی بستگی به مقدار دارد.
- (۲) هزینه خرید واحد موجودی بستگی به محدوده‌ی خرید دارد.
- (۳) هزینه نگهداری سالیانه موجودی مستقل از مقدار سفارش است.
- (۴) هزینه سالیانه سیستم موجودی بدون در نظر گرفتن محدودیت‌ها تعیین می‌شود.

**حل:** گزینه ۴ درست است.

**مثال:** یک کارخانه تولید بتن آماده جهت نگهداری سیمان، از سیلوئی با ظرفیت ۲۰۰ تن استفاده می‌کند. این شرکت با هدف مینیمم کردن مجموع هزینه‌های نگهداری و سفارش دهی سالیانه، مقدار سفارش هر بار سیمان را ۱۵۰ تن در نظر گرفته است که در برابر این تصمیم کل هزینه‌های نگهداری سالیانه (اجاره سیلو، هزینه‌های راکد سرمایه گذاری و ...) برابر ۷۵۰۰ تومان و کل هزینه‌های سفارش دهی سالیانه نیز برابر ۷۵۰۰ برآورد شده است. به نظر شما مقدار سفارش این کالا باید: (کنکور ۸۷)

- (۱) افزایش یابد.
- (۲) کاهش یابد.
- (۳) ثابت باقی بماند.
- (۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

**حل:** گزینه ۱ درست است.

با توجه به هزینه‌هایی که در هزینه نگهداری سالیانه محاسبه شده‌اند در می‌یابیم که هزینه ثابت اجاره سیلو نیز در هزینه نگهداری گنجانده شده است. در صورتی که این هزینه ثابت را از کل هزینه نگهداری سالیانه کسر نماییم عدد به دست آمده که مبنای مقایسه با هزینه سفارش‌دهی سالیانه است از مقدار این هزینه سفارش‌دهی کمتر خواهد بود پس  $Q < Q_0$  است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

**مثال:** اگر برآورد پارامترها در مدل EOQ همراه با خط باشد ..... (کنکور ۸۶)

- ۱) اگر کل هزینه‌های واقعی کمتر از کل هزینه‌های تخمینی باشد، سیستم به حالت بهینه اجرا شده است.
- ۲) ممکن است کل هزینه‌های واقعی کمتر از کل هزینه‌های تخمینی باشد.
- ۳) حتماً کل هزینه‌های واقعی بیشتر از کل هزینه‌های تخمینی خواهد بود.
- ۴) حتماً کمینه کل هزینه‌های واقعی کمتر از کل هزینه‌های تخمینی خواهد بود.

**حل :** گزینه ۲ درست است.

**مثال:** در یک کارخانه که از مدل سفارش اقتصادی (EOQ) پیروی می‌کند، بر اثر تمهیدات مسئولین کارخانه کل هزینه‌های سفارش

دهی از  $c$  به  $\frac{3c}{4}$  کاهش می‌یابد. در این حالت هزینه‌های نگهداری: (کنکور ۸۷)

- ۱) به همان میزان کاهش می‌یابد.
- ۲) تغییری نمی‌کند.
- ۳) به همان میزان افزایش می‌یابد.
- ۴) کاهش می‌یابد ولی میزان آن بستگی به سایر عوامل دارد.

**حل :** گزینه ۱ درست است.

**مثال:** در یک موسسه همواره مقدار سفارش محصول براساس فرمول‌های اقتصادی E.O.Q تعیین می‌شود. براساس تغییرات در شرایط تدارک در بازار هزینه ثابت سفارش دهی در حال حاضر به سه برابر افزایش یافته است. با توجه به این شرایط کدام عبارت

صحیح است؟ (کنکور ۸۸)

- ۱) هزینه سالیانه سیستم موجودی تغییر نمی‌کند.
- ۲) هزینه سالیانه سیستم موجودی افزایش می‌یابد.
- ۳) هزینه سالیانه سیستم موجودی تعدیل شده و کاهش می‌یابد.
- ۴) هزینه سالیانه سفارش دهی افزایش یافته ولی هزینه نگهداری موجودی کاهش می‌یابد.

**حل :** گزینه ۴ درست است.

**مثال:** سفارش محصولی تنها در بسته‌های ۲۰۰ تایی قابل انجام است، چنانچه تقاضای سالانه این محصول ۲۰۰۰، هزینه هر بار سفارش ۱۰۰ و هزینه نگهداری هر واحد محصول در سال ۲۰ واحد پولی باشد مقدار اقتصادی هر بار سفارش چقدر است؟

(کنکور ۸۵)

۱۰۰ (۴)

۲۰۰ (۳)

۳۰۰ (۲)

۴۰۰ (۱)

**حل :** گزینه ۳ درست است.

سفارش باید ضرب صحیحی از ۲۰۰ باشد پس می‌تواند ۲۰۰ یا ۴۰۰ باشد.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

$$Q(Q-n) \leq \frac{2AD}{h}$$

بزرگترین عددی که در نامساوی

$$200 \rightarrow 200(200-0) \leq \frac{2 \times 200 \times 100}{20} = 20000$$

$$400 \rightarrow 80,000 \quad 400(400-200) \not\leq \frac{2 \times 2000 \times 100}{20} = 20000$$

**مثال:** در یک سیستم کنترل موجودی از انبارهایی با حجم ثابت 45 واحد و هزینه اجاره سالانه هر انبار 75 واحد پول استفاده می‌شود. اگر مصرف سالانه 10000 واحد، هزینه ثابت هر بار سفارش دهی دو واحد پول و هزینه نگهداری یک واحد پول برای هر واحد موجودی در سال باشد برای تعیین مقدار اقتصادی هر بار سفارش چند بار باید تابع هزینه را محاسبه نمود؟ (کنکور ۸۶)

- (۱) سه بار                      (۲) چهار بار                      (۳) پنج بار                      (۴) شش بار

**حل :** گزینه ۳ درست است.

هر چه مقدار سفارش بیشتر باشد هزینه‌ی اجاره انبار بیشتر می‌شود پس باید از محدوده‌ی اول شروع می‌کنیم.

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 10000 \times 2}{1}} = 200$$

چون محدوده‌ها 45 تایی است بنابراین بازه‌های مورد نظر به صورت زیر است:

$$[0-45], [46-90], [91-135], [136-180], \dots$$

در محدوده  $Q \in [181-225]$  قرار می‌گیرد و تابع هزینه در نقاط 45, 90, 135, 180, 200 (یعنی 5 بار) محاسبه گردد.

**مثال:** در یک سیستم موجودی از نوع EOQ می‌دانیم هزینه بهینه سالانه نگهداری و سفارش برابر با 10,000 واحد پولی و مقدار اقتصادی هر بار سفارش 150 عدد است. اگر تقاضای محصول سالانه 3000 عدد باشد، هزینه هر بار سفارش چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

- (۱) 200                      (۲) 250                      (۳) 300                      (۴) 350

**حل :** گزینه ۲ درست است.

$$K^* = \frac{2AD}{Q} = \frac{2 \times 3000 \times A}{150} = 40A = 10,000 \Rightarrow A = 250$$

**مثال:** در یک سیستم موجودی با مدل EOQ اگر هزینه هر بار سفارش 100 واحد پولی و نرخ هزینه نگهداری و تقاضای سالانه به ترتیب 20 درصد و 2000 عدد در سال باشند و در هر بار سفارش 100 عدد سفارش داده شود، با فرض این که قیمت هر واحد کالا 20 واحد پولی باشد کل هزینه سیستم موجودی به طور متوسط در سال چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

- (۱) 2200                      (۲) 4000                      (۳) 40400                      (۴) 42200

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....



حل : گزینه ۴ درست است.

$$h = ic = 0.2 \times 20 = 4$$

$$K(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{hQ}{2} = \frac{200 \times 100}{100} + \frac{4 \times 100}{2} = 2200$$

$$\text{کل هزینه سیستم موجودی} = K(Q) + CD = 2200 + 20 \times 2000 = 42200$$

**مثال:** در انباری که 100 تن ذخیره اطمینان داریم، هزینه نگهداری هر تن کالا در سال 1000 ریال است. کل هزینه‌های سالیانه تدارکاتی (سفارشات) در این انبار 180,000 ریال و کل هزینه‌های نگهداری کالا در انبار در سال 200,000 ریال است. در این شرایط کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (کنکور ۸۷)

- (۱) ممکن است کالا به مقدار اقتصادی سفارش شود.  
 (۲) مقدار هر بار سفارش کالا از مقدار EOQ کمتر است.  
 (۳) مقدار سفارش کالا 1/9 برابر مقدار EOQ است.  
 (۴) مقدار اقتصادی سفارش کالا از مقدار EOQ بیشتر است.

حل : گزینه ۲ درست است.

$$SS = 100, \quad C = 1000$$

ابتدا باید مقدار ثابت سالیانه (در اینجا هزینه موجودی اطمینان) را از هزینه نگهداری کم کنیم:

$$\text{هزینه متغیر نگهداری} = 200000 - 100 \times 1000 = 100000$$

حال با مقایسه‌ی هزینه نگهداری سالیانه و سفارشی در می‌یابیم که  $Q < EOQ$  می‌باشد.

**مثال:** در مؤسسه‌ای با تخمین انجام شده برای پارامترهای مدل E.O.Q دو خطا صورت گرفته است یکی تقاضای سالیانه محصول 1.5 برابر مقدار واقعی و هزینه ثابت سفارش دهی برابر نصف مقدار واقعی تعیین شده است. در این حالت 'x' نسبت مقدار سفارش قطعه Q، به مقدار بهینه واقعی  $Q^*$ ، تقریباً چقدر است؟ (کنکور ۸۸)

- (۱)  $x = 0.87$       (۲)  $x = 0.75$       (۳)  $x = 0.25$       (۴)  $x = 1$

حل : گزینه ۱ درست است.

$$D' = 1.5D$$

$$A' = \frac{A}{2}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2A'D'}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.5 \times D \times \frac{A}{2}}{h}} = \sqrt{\frac{3}{4}} Q^*$$

$$X = \frac{Q}{Q^*} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1.73}{4} = 0.87$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

**مثال:** در مدل EOQ با مدل کلاسیک کنترل موجودی درست در یک لحظه قبل و بعد از صدور سفارش موقعیت موجودی به ترتیب

چقدر است؟  $\left( m = \left[ \frac{LT}{T} \right] \right)$  (کنکور ۸۹)

(۱)  $r+mQ$  ,  $r$  (۲)  $r+mQ$  ,  $r+(m+1)Q$   
 (۳)  $r+mQ$  ,  $r+(m+1)Q$  (۴)  $r+(m+1)Q$  ,  $r+(m+1)Q$

**حل:** گزینه ۳ درست است.

در لحظه ی قبل از سفارش موقعیت موجودی  $r+mQ$  می باشد که با سفارش به اندازه ی  $Q$  این مقدار به موقعیت موجودی اضافه می گردد.

### ۳- مدل های کمبود

#### ۳-۱- مدل کمبود پس افت

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که کمبود به صورت سفارشات عقب افتاده جایز است هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه  $(Q^*)$ ، مقدار کمبود بهینه در هر دوره  $(b^*)$  و همین طور  $r_h^*, r^*$  همراه با کمینه کردن هزینه ها می باشد.

#### ۳-۱-۱- نحوه محاسبه روابط مقدار سفارش اقتصادی

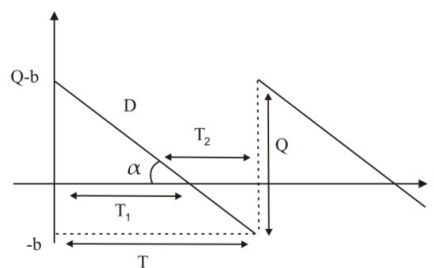
در این مدل  $\hat{\pi}, \pi$  برابر مقدار ثابتی می باشند و بقیه پارامترها مانند مدل EOQ است.

$T_2$ : مدت زمانی از یک دوره که کمبود رخ می دهد.

$T_1$ : مدت زمان یک دوره که در حالت کمبود نیستیم.

$b$ : مقدار هر بار کمبود

موجودی خالص



$$D = \tan \alpha = \frac{Q-b}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{Q-b}{D}$$

$$T_2 = \frac{b}{D}$$

$$\Rightarrow T = T_1 + T_2 = \frac{Q}{D} \quad \text{متوسط تعداد دوره ها در سال} = n = \frac{D}{Q} = \frac{1}{T}$$

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

برای به دست آوردن  $Q^*$ ,  $b^*$  باید از تابع هزینه متغیر  $K(Q, b)$  نسبت به  $Q$  و  $b$  مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم و معادلات مربوطه را حل کنیم.

$$K(Q, b) = \frac{DA}{Q} + \frac{h(Q-b)^2}{2Q} + \frac{\hat{\pi}b^2}{2Q} + \pi \frac{D}{Q}b$$

از تابع هزینه به سادگی می توان روابط زیر را به دست آورد:

$$\text{متوسط موجودی در یک سال} = \frac{(Q-b)^2}{2Q}$$

$$\text{متوسط کمبود در سال} = \frac{b^2}{2Q}$$

$$\text{تعداد کمبود در سال} = \frac{D}{Q}b$$

### ۳-۱-۲- الگوریتم حل مدل

الگوریتم حل مسایل کمبود پس افت با توجه به مقایسه دو هزینه  $\sqrt{2DAh}$  (که معادل  $k(Q_w)$  است) و  $\pi D$  به صورت زیر می باشد:

اگر  $\pi D \geq \sqrt{2DAh}$  باشد به مدل EOQ بر می گردیم یعنی به سیستم موجودی بدون کمبود که در آن:

$$Q = Q_w, \quad K(Q^*) = K(Q_w), \quad b^* = 0$$

اگر  $\pi D < \sqrt{2DAh}$  باشد دو حالت زیر وجود دارد:

- اگر  $\hat{\pi} = 0$  باشد در این حالت سیستم موجودی وجود نخواهد داشت.

$$Q^* = 0, \quad K(Q^*) = \pi D, \quad b^* = \infty$$

- اگر  $\hat{\pi} > 0$  باشد به روابطی خواهیم رسید که در قسمت قبل به دست آوردیم یعنی:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h} - \frac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}, \quad b^* = \frac{hQ^* - \pi D}{\hat{\pi}+h}$$

### ۳-۱-۳- حالت خاص مدل کمبود پس افت

مدل کمبود پس افت حالت خاصی دارد که مسایل موجودی عموماً بر اساس این حالت مورد بررسی و مقایسه قرار می گیرند. در این حالت  $\pi = 0$ ,  $\hat{\pi} > 0$  است و بنابراین حالت خاصی از قسمت دوم  $\pi D < \sqrt{2DAh}$  است. روابط زیر در این حالت برقرار است.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = Q_w \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$

$$b^* = \frac{hQ^*}{\hat{\pi}+h} = \sqrt{\frac{2DAh}{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}} = \frac{hQ_w}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

$$I_{\max}^* = Q^* - b^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi} + h}} = Q_{\omega} \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi} + h}}$$

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh} \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi} + h}} = hI_{\max}^* = \hat{\pi} b^*$$

روابط  $r^*$  و  $r_h^*$  مانند مدل EOQ است تنها مقدار  $b^*$  از آن کسر می‌شود.

$$r^* = DL - b^* \quad r_h^* = DL - mQ^* - b^* \quad , \quad m = \left[ \frac{L}{T} \right]$$

**نکته:** مقایسه مدل کمبود پس‌افت (حالت خاص) با مدل EOQ در حالت یکسان بودن کلیه پارامترها.

- مقدار سفارش بهینه در مدل پس‌افت بیشتر از مدل EOQ است.

- حداکثر موجودی در مدل EOQ بیشتر از مدل پس‌افت است.

- کل هزینه‌های متغیر سالیانه در مدل EOQ بیشتر از مدل پس‌افت است.

**مثال:** در مدل تقاضای پس‌افت که مقدار کمبود با تأخیر برآورده می‌شود، در صورتی که هزینه‌های کمبود افزایش پیدا کند، کدام

مورد در ارتباط با حجم مورد نیاز برای نگهداری کالا در انبار صحیح است؟

(۱) کاهش می‌یابد. (۲) تغییر پیدا نمی‌کند.

(۳) افزایش می‌یابد. (۴) بسته به سایر پارامترهای مسئله قابل تغییر است.

**حل:** گزینه ۲ درست است.

**نکته:** با افزایش هزینه کمبود گویی از مدل کمبود به سمت EOQ می‌رویم.

**مثال:** در مدل ساده موجود که کمبود مجاز بوده و مقدار کمبود پس‌افت می‌شود، اطلاعات زیر در دسترس است. هزینه کمبود هر

واحد موجودی در سال برابر 100 تومان و هزینه کمبود هر واحد موجودی برابر  $\pi$  تومان است. اگر تقاضای سالیانه  $D$  واحد

باشد و  $K_w$  هزینه بهینه سالیانه در صورت مجاز نبودن کمبود باشد و رابطه  $\pi D = 0.75 K_w$  را داشته باشیم به نظر شما

کدام عبارت صحیح است؟ (کنکور ۸۸)

(۱) در جواب بهینه مقدار سفارش اقتصادی در هر دور از E.O.Q بیشتر است.

(۲) در جواب بهینه مقدار کمبود در یک دور برابر تقاضای سالیانه است.

(۳) در جواب بهینه مقدار کمبود در یک دور برابر مقدار سفارش است.

(۴) در جواب بهینه مقدار کمبود نامتناهی است.

**حل:** گزینه ۱ درست است.

$$\pi D = 0.7 K_w \rightarrow \pi D < k_w$$

$$\hat{\pi} = 100 > 0$$

در مدل کمبود پس‌افت در صورتی که  $\pi D < k_w$  و  $\hat{\pi} > 0$  باشد مقدار سفارش اقتصادی از روابط کمبود محاسبه می‌شود که از

EOQ بیشتر است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

## ۲-۳- مدل کمبود در حالت فروش از دست رفته

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که کمبود جایز است و جبران نمی‌شود.

هدف مدل تعیین مقدار اقتصادی سفارش  $(Q^*)$ ، مدت زمان بهینه کمبود در هر دوره  $(\hat{T}^*)$  و نقطه سفارش مجدد  $(r_h^*, r^*)$  با کمینه کردن هزینه‌هاست.

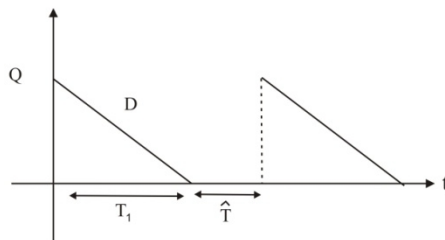
## ۳-۲-۱- نحوه محاسبه روابط مقدار سفارش اقتصادی

در این مدل  $\pi$  برابر مقدار ثابتی می‌باشند و سایر پارامترها مانند مدل EOQ است.

$\hat{T}$ : مدت زمانی از یک دوره که دارای کمبود هستیم.

$T_1$ : مدت زمانی از یک دوره که دارای کمبود نیستیم.

موجودی خالص



$$\left. \begin{aligned} T &= T_1 + \hat{T} \\ T_1 &= \frac{Q}{D} \end{aligned} \right\} \rightarrow T = \frac{Q}{D} + \hat{T} = \frac{Q + D\hat{T}}{D}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{D}{Q + D\hat{T}}$$

$$K(Q, \hat{T}) = \frac{DA}{Q + D\hat{T}} + \frac{hQ^2}{2(Q + D\hat{T})} + \frac{\pi D^2 \hat{T}}{Q + D\hat{T}} + CQ \frac{D}{Q + D\hat{T}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مدل هزینه خرید هم جزو هزینه‌های متغیر است، زیرا به برخی از تقاضاها اصلاً جواب نخواهیم داد.

## ۳-۲-۲- الگوریتم حل مدل

الگوریتم حل مسایل در حالت فروش از دست رفته مانند الگوریتم حل مسایل کمبود پس‌افت با مقایسه  $\sqrt{2DAh}$  و  $\pi D$  با هم شکل می‌گیرد و به صورت زیر است:

اگر  $\pi D \geq \sqrt{2DAh}$  باشد به مدل EOQ بر می‌گردیم یعنی به سیستم موجودی بدون کمبود و بنابراین داریم:

$$Q^* = Q_\omega, \quad K(Q^*) = K(Q_\omega), \quad \hat{T}^* = 0$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

$$\hat{T}^* = \infty$$

اگر  $\pi D < \sqrt{2DAh}$  باشد سیستم موجودی وجود نخواهد داشت یعنی:

نکته کلی در مدل فروش از دست رفته

$$\left. \begin{aligned} \pi D \geq \sqrt{2ADh} \text{ از مدل ویسلون استفاده خواهیم کرد. } Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}} \text{ که اگر } A \text{ کم شود } Q \text{ نیز کم می‌شود.} \end{aligned} \right\}$$

$\pi D < \sqrt{2ADh}$  سیستم موجودی نداریم و  $Q$  را برابر صفر در نظر می‌گیریم حال اگر  $A$  کم شود ممکن است  $\pi D \geq \sqrt{2ADh}$  شود و  $Q$  عددی مثبت گردد.

**مثال:** مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) را در نظر بگیرید. فرض کنید کمبود کالا مجاز ولی قابل جبران نباشد، در این صورت به ترتیب مقدار بهینه (سفارش اقتصادی، حداکثر فضای انبار، متوسط هزینه کل سالانه) نسبت به زمانی که کمبود مجاز نباشد:

(۱) به ترتیب (بیشتر، کمتر، کمتر) است.

(۲) به ترتیب (کمتر، بیشتر، بیشتر) است.

(۳) به ترتیب (بیشتر، کمتر، بیشتر) است.

(۴) در صورت داشتن سیستم موجودی، برابر زمانی خواهد بود که کمبود مجاز نباشد.

**حل:** گزینه ۴ درست است.

**مثال:** کدام یک از عبارتهای زیر غلط است؟ (کنکور ۸۵)

(۱) اگر در سیستمی کسری مجاز شوند هزینه نگهداری سالانه افزایش پیدا خواهد کرد.

(۲) اگر در سیستمی کسری به صورت تقاضای عقب افتاده مجاز شود هزینه کل سیستم ممکن است کاهش پیدا کند.

(۳) اگر در سیستمی کسری به صورت فروش از دست رفته مجاز شود هزینه کل سیستم کاهش پیدا خواهد کرد.

(۴) اگر در سیستمی کسری به صورت تقاضای عقب افتاده مجاز شود و هزینه‌های کسری مستقل از زمان، صفر و هزینه‌های کسری وابسته به زمان مخالف  $\infty$  باشد هزینه کل سیستم حتماً کاهش پیدا خواهد کرد.

**حل:** گزینه ۳ درست است.

**مثال:** در یک مدل ساده قطعی که در آن کسری به صورت فروش از دست رفته مجاز شده است: (کنکور ۸۶)

(۱) با کاهش هزینه هر بار سفارش دهی ممکن است مقدار سفارش بهینه کمتر شود.

(۲) با کاهش هزینه هر بار سفارش دهی ممکن است مقدار سفارش بهینه بیشتر شود.

(۳) با کاهش هزینه هر بار سفارش دهی حتماً مقدار سفارش کاهش پیدا خواهد کرد.

(۴) مواد ۱ و ۲

**حل:** گزینه ۴ درست است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

**مثال:** در یک سیستم موجودی با نرخ تقاضای ثابت، در حالتی که کمبود موجودی مجاز نیست، میزان سفارش اقتصادی برابر 4000 تن و نقطه سفارش مجدد (بر مبنای موجودی در دست و سفارش در راه) برابر 13000 تن محاسبه شده است. چنانچه کمبود مجاز باشد میزان اقتصادی سفارش 8000 تن محاسبه شده است. در این حالت نقطه سفارش مجدد (بر مبنای موجودی در دست و سفارش در راه) چقدر است؟ (کنکور ۸۹)

- 5000(۱)                      8000 (۲)                      7000 (۳)                      12000 (۴)

حل : گزینه ۳ درست است.

$$Q^* = 40000t \Rightarrow Q^* = 8000 \qquad 4000\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = 8000$$

$$r^* = 13000 \qquad r'^* = ? \qquad \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = 2 \Rightarrow 4\hat{\pi} = \hat{\pi} + h$$

$$3\hat{\pi} = h$$

$$\frac{h}{\hat{\pi}} = 3$$

$$b^* = \frac{h}{\hat{\pi}} \times \frac{Q_{\omega}}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}} = 3 \times \frac{4000}{\sqrt{1+3}} = 6000$$

$$r'^* = r_{EOQ}^* - b^* = 13000 - 6000 = 7000$$

**مثال:** در مدل سفارش وقتی کمبود کالا جایز است، اگر هزینه کمبود وابسته به زمان ( $\hat{\pi}$ ) به ازای کمبود هر واحد کالا بسیار ناچیز

(تقریباً برابر صفر) باشد، مقدار کمبود در حالت بهینه چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۹)

- (۱) بستگی به موجودی در راه دارد.                      (۲) نامعین  
 (۳) برابر مقدار ذخیره ایمنی                      (۴) برابر با مقدار سفارش

حل : گزینه ۴ درست است.

در حالتی که هزینه کمبود به ازای هر واحد ناچیز باشد پس  $b^* = \infty$  می شود. یعنی هر چقدر تقاضا داشته باشیم با کمبود مواجه می شویم.

## ۴- مدل تولیدی ساده یا مدل مقدار تولید اقتصادی یا مدل EPQ

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که سفارش یکجا دریافت نمی شود بلکه با نرخ ثابت P و به تدریج دریافت می شود. هدف مدل تعیین مقدار هر بار تولید اقتصادی ( $Q^*$ ) و نقطه سفارش مجدد ( $r_h^*, r^*$ ) با کمینه کردن هزینه ها است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

## ۱-۴- نحوه محاسبه روابط مدل

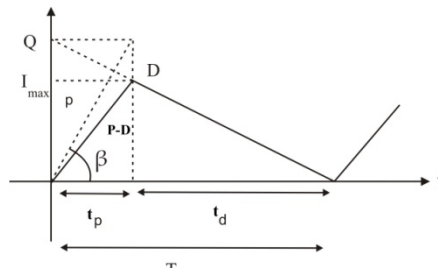
پارامترهای این مدل مانند مدل EOQ است با تغییرات زیر:

A: هزینه هر بار آماده‌سازی

C: هزینه متغیر با قیمت تمام شده هر واحد

P: نرخ دریافت سفارش یا نرخ تولید

موجودی خالص



نکته: همواره  $P \geq D$  است زیرا همان‌طور که از شکل مشخص است اگر  $P < D$  باشد به کمبود بر می‌خوریم.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta = P = \frac{Q}{t_p} &\Rightarrow t_p = \frac{Q}{P} \\ T = \frac{Q}{D} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_d = T - t_p = \frac{Q}{P} - \frac{Q}{D} = \frac{Q}{D} \left( 1 - \frac{D}{P} \right) = T \left( 1 - \frac{D}{P} \right)$$

$$I_{\max} = (P - D)t_p = Dt_d = Q \left( 1 - \frac{D}{P} \right)$$

$$\bar{I} = \frac{I_{\max}}{2} = \frac{Q}{2} \left( 1 - \frac{D}{P} \right)$$

$$\text{متوسط تعداد دوره‌ها در سال} = \frac{D}{Q} = \frac{1}{T}$$

$$\text{کل هزینه سالیانه} = \underbrace{\frac{DA}{Q} + h \frac{Q}{2} \left( 1 - \frac{D}{P} \right)}_{K(Q)} + CD$$

$$\frac{dK(Q)}{dQ} = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h \left( 1 - \frac{D}{P} \right)}} = \frac{Q_{\omega}}{\sqrt{1 - \frac{D}{P}}}$$

$$I_{\max} = Q^* \left( 1 - \frac{D}{P} \right) = Q_{\omega} \sqrt{1 - \frac{D}{P}}$$

$$\bar{I} = \frac{Q^*}{2} \left( 1 - \frac{D}{P} \right) = \frac{Q_{\omega}}{2} \sqrt{1 - \frac{D}{P}}$$

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh \left( 1 - \frac{D}{P} \right)}$$

$$\text{کل هزینه بهینه سالیانه} = K(Q^*) + CD = \sqrt{2DAh \left( 1 - \frac{D}{P} \right)} + CD$$

یادداشت:

.....  
 .....  
 .....  
 .....



نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی در دست در مدل EPQ با توجه به این که لحظه صدور سفارش در قسمت صعودی نمودار یا نزولی آن بیافتد دو حالت مختلف دارد و این دو حالت از مقایسه بین  $L' = L - mT$  و  $t_d$  (مدت زمانی که فقط در حال مصرف هستیم) به دست می آید.

$$r^* = D.L$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} r_h^* = DL' = D(L - mT) = DL - mQ^* & \text{اگر } L' = L - mT < t_d \\ r_h^* = (P - D)(T - L') = DL - PL + (m + 1) \left( \frac{P}{D} - 1 \right) Q^* & \text{اگر } L' = L - mT \geq t_d \end{array} \right.$$

## ۴-۲- نکات مدل EPQ

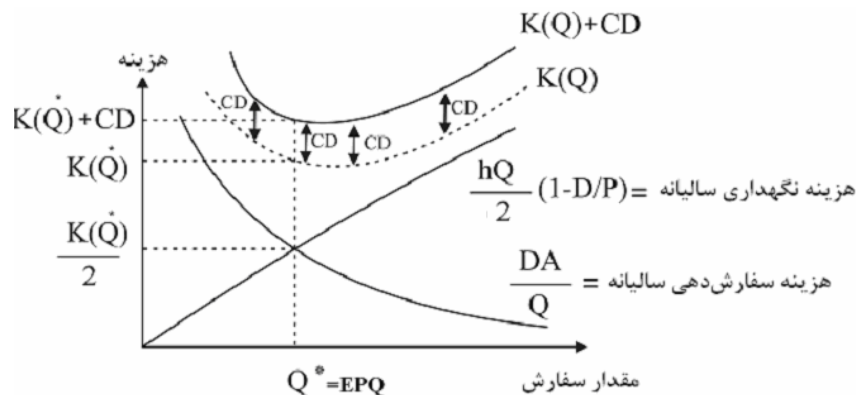
نکته ۱: مقایسه مدل EPQ و مدل EOQ در حالت یکسان بودن پارامترها.

- مقدار سفارش بهینه در مدل EPQ بیشتر از مدل EOQ است.
- حداکثر موجودی در مدل EOQ بیشتر از مدل EPQ است.
- هزینه بهینه سالیانه در مدل EOQ بیشتر از مدل EPQ است.

نکته ۲: نمودار موقعیت موجودی مدل EPQ کاملاً مشابه مدل EOQ و به همان شکل است.

$$D.L \leq y(t) \leq DL + Q^*$$

نکته ۳: نمودار هزینه‌ها بر حسب مقدار سفارش در مدل EPQ مانند مدل EOQ و به شکل زیر است:



نکته ۴: محل تلاقی منحنی هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه نقطه بهینه است.

$$K(Q^*) = \frac{2DA}{Q^*} = hQ^* \left( 1 - \frac{D}{P} \right) = 2nA = \frac{2A}{T^*} = \sqrt{2DAh \left( 1 - \frac{D}{P} \right)} = hI_{max}^*$$

نکته ۵:

- اگر  $Q > EPQ$  باشد آن‌گاه هزینه نگهداری سالیانه < هزینه سفارش‌دهی سالیانه
- اگر  $Q = EPQ$  باشد آن‌گاه هزینه نگهداری سالیانه = هزینه سفارش‌دهی سالیانه
- اگر  $Q < EPQ$  باشد آن‌گاه هزینه نگهداری سالیانه > هزینه سفارش‌دهی سالیانه

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

نکته ۶: شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه برای هزینه نگهداری سالیانه و هزینه سفارش‌دهی سالیانه به ترتیب برابر  $\frac{h}{2} \left(1 - \frac{D}{P}\right)$  و  $-\frac{h}{2} \left(1 - \frac{D}{P}\right)$  است.

نکته ۷: در صورتی که به جای مقدار  $Q^*$  مقدار نابینه  $Q$  سفارش دهیم، نسبت افزایش هزینه متغیر سالیانه از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)} = \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{Q^*} + \frac{Q^*}{Q} \right)$$

نکته ۸: مانند مدل EOQ شیب منحنی هزینه‌ها در سمت راست نقطه بهینه نسبت به سمت چپ آن ملایم‌تر است یعنی:

$$K(Q^* - a) > K(Q^* + a)$$

نکته ۹: در صورتی که یکی از پارامترهای مدل تغییر کند، برای مقایسه و یافتن مقدار سفارش بهینه و هزینه بهینه متغیر سالیانه باید از روابط زیر استفاده کرد:

$$\frac{Q_1^*}{Q_0^*} = \frac{\sqrt{\frac{2D_1A_1}{h_1 \left(1 - \frac{D_1}{P_1}\right)}}}{\sqrt{\frac{2D_0A_0}{h_0 \left(1 - \frac{D_0}{P_0}\right)}}} = \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \cdot \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} \cdot \sqrt{\frac{D_1 \cdot \left(1 - \frac{D_0}{P_0}\right)}{D_0 \cdot \left(1 - \frac{D_1}{P_1}\right)}}$$

$$\frac{K(Q_1^*)}{K(Q_0^*)} = \sqrt{\frac{2D_1A_1h_1 \left(1 - \frac{D_1}{P_1}\right)}{2D_0A_0h_0 \left(1 - \frac{D_0}{P_0}\right)}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \cdot \sqrt{\frac{D_1 \left(1 - \frac{D_1}{P_1}\right)}{D_0 \left(1 - \frac{D_0}{P_0}\right)}}$$

نکته ۱۰: با افزایش پارامترهای مدل مقدار سفارش بهینه و هزینه بهینه سالیانه به صورت زیر تغییر می‌کند.

$K(Q^*)$	$Q^*$	
افزایش	افزایش	افزایش A
تغییرات مشخص نیست	افزایش	افزایش D
افزایش	کاهش	افزایش h
افزایش	کاهش	افزایش i
افزایش	کاهش	افزایش c
افزایش	کاهش	افزایش w
افزایش	کاهش	افزایش p
تغییری نمی‌کند	تغییری نمی‌کند	افزایش L

یادداشت:

.....

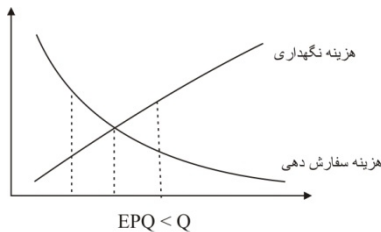
.....

.....

.....

نکته ۱۱: مقایسه بین مدل EOQ، EPQ و مدل EOQ در حالت کمبود پس افت (حالت خاص)

مدل EPQ		مدل EOQ		مدل EOQ در حالت کمبود پس افت	
$\frac{Q_{\omega}}{\sqrt{1-\frac{D}{P}}}$	>	$Q_{\omega}$	<	$Q_{\omega} \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$	مقدار سفارش بهینه ( $Q^*$ )
$Q_{\omega} \sqrt{1-\frac{D}{P}}$	<	$Q_{\omega}$	>	$Q_{\omega} \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$	حداکثر موجودی بهینه ( $I_{max}$ )
$\frac{Q_{\omega} \sqrt{1-\frac{D}{P}}}{2}$	<	$\frac{Q_{\omega}}{2}$	>	$\frac{(Q^*-b^*)^2}{2Q^*}$	متوسط موجودی بهینه ( $\bar{I}$ )
$h\bar{I}$	<	$h\bar{I}$	>	$h\bar{I}$	هزینه نگهداری سالیانه
$\sqrt{2DAh} \sqrt{\left(1-\frac{D}{P}\right)}$	<	$\sqrt{2DAh}$	>	$\sqrt{2DAh} \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$	کل هزینه متغیر سالیانه $K(Q^*)$



نکته ۱۲: با توجه به منحنی هزینه‌ها بر حسب مقدار سفارش مشخص است که هنگامی که  $EPQ < Q$  باشد، هزینه نگهداری  $THC$  از هزینه سفارش‌دهی  $TOC$  بیشتر خواهد بود.

**مثال:** موقعیت موجودی بر حسب مجموع موجودی در دست و در راه در یک مدل کنترل موجودی قطعی در مقایسه با مدل با دریافت

تدریجی به چه صورتی است؟ ( $y(t)$ : موقعیت موجودی در لحظه  $t$ )

$$DL + Q \left(1 - \frac{D}{P}\right) \leq y(t) \leq DL + Q \left(1 - \frac{D}{P}\right) \quad (۲) \qquad DL \leq y(t) \leq DL + Q \left(1 - \frac{D}{P}\right) \quad (۱)$$

$$DL + Q \left(1 - \frac{D}{P}\right) \leq y(t) \leq DL + Q \quad (۳) \qquad (۴) \text{ مانند موقعیت موجودی در مدل ساده قطعی است.}$$

**حل:** گزینه ۴ درست است.

همان‌طور که در نکات مدل EPQ ذکر شد نمودار موقعیت موجودی مدل EPQ مشابه نمودار موقعیت موجودی مدل EOQ است و محدوده تغییرات آن به صورت زیر است:

$$DL \leq y(t) \leq DL + Q$$

**یادداشت:**

.....

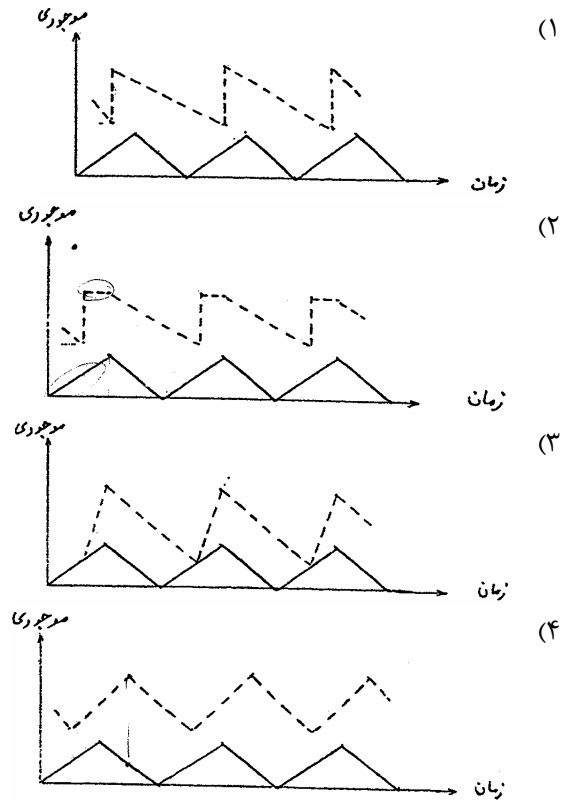
.....

.....

.....

مثال: وقتی که مدت تحویل (L) از T کوچکتر ولی از  $T_d$  بزرگتر است (T مدت یک دور و  $T_d$  مدت زمانی از یک دور که محصول تولید نمی‌شود) کدام یک از شکل‌های زیر در مورد موقعیت موجودی صحیح است؟ (کنکور ۸۶)

..... موقعیت موجودی ————— موجودی در دست



حل: گزینه ۱ درست است.

شکل موقعیت موجودی مدل EPQ کاملاً مشابه موقعیت موجودی EOQ است.

مثال: تقاضا برای محصولی 4000 واحد در سال است و این محصول در موسسه با نرخ تولید 1600 واحد در سال تولید می‌شود. اگر مدیریت، مقدار سفارش مناسب را برابر 2000 واحد تعیین کرده باشد آنگاه حداکثر موجودی در دست در این حالت چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

- (۱) 1500 واحد      (۲) 2500 واحد      (۳) 4000 واحد      (۴) 500 واحد

حل: گزینه ۱ درست است.

$$I_{\max} = Q \left( 1 - \frac{D}{P} \right) = 2000 \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = 1500$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

**مثال:** کالای A به صورت تدریجی و با سرعت P عدد در واحد زمان به انبار وارد می‌شود. کالای B به صورت آنی (یک باره) وارد انبار می‌شود برای کالای A نسبت سرعت ورود به انبار به سرعت مصرف برابر  $\frac{10}{3}$  است. سایر پارامترهای دو کالا با هم برابرند. و برای هیچ یک ذخیره اطمینان منظور نشده است. اگر هر دو کالا به مقدار اقتصادی سفارش داده شوند. متوسط موجودی کالای B چند برابر متوسط موجودی کالای A خواهد بود؟ (کنکور ۸۷)

(۱) تقریباً 1.2      (۲) تقریباً 1.4      (۳) تقریباً 2.3      (۴) تقریباً برابر هستند.

**حل:** گزینه ۱ درست است.

$$\frac{D_A}{P_A} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{\bar{I}_B}{\bar{I}_A} = \frac{\frac{Q_\omega}{2}}{\frac{Q_\omega}{2} \sqrt{1 - \frac{D_A}{P_A}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{10}}} = \sqrt{\frac{10}{7}} = 1.2$$

**مثال:** در مدل تولید اقتصادی، مقدار تولید بهینه 200 واحد است. اگر در این حالت در یک دوره T (فاصله‌ی زمانی بین دو سفارش تولید متوالی)، به مدت  $\frac{T}{4}$  تولید داشته باشیم آنگاه فاصله‌ی بین دو زمانی که موجودی به سطح 75 واحد می‌رسد چقدر است؟ (کنکور ۸۹)

$\frac{2T}{3}$  (۴)
 $\frac{T}{3}$  (۳)
 $\frac{T}{2}$  (۲)
 $\frac{T}{4}$  (۱)

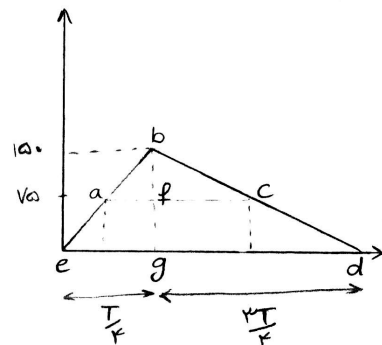
**حل:** گزینه ۲ درست است.

$$t_p = \frac{T}{4}$$

$$t_p = \frac{Q}{P} = \frac{T}{4}$$

$$\frac{DV}{P} = \frac{T}{4}$$

$$\frac{D}{P} = \frac{1}{4}$$



تولید بهینه  $Q^* = 200$

$$I_{\max} = 200 \times \left(1 - \frac{D}{P}\right) = 200 \times \frac{3}{4} = 150$$

$$\frac{bf}{bg} = \frac{ac}{ed} = \text{طبق قوانین تشابه} \Rightarrow \frac{75}{150} = \frac{aT}{T}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

**مثال:** در یک مدل دریافت تدریجی که براساس مقدار اقتصادی تولید عمل می‌کند. در صورتی که تقاضای سالیانه افزایش یابد ولی همواره کوچکتر از نرخ تولید سالیانه باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر در رابطه با سیکل زمانی بین دو بار سفارش تولید صحیح است؟ (کنکور ۸۹)

- (۱) با افزایش تقاضای سالیانه مدت زمان دوره افزایش می‌یابد.
- (۲) با افزایش تقاضای سالیانه مدت زمان دوره ممکن است افزایش و یا کاهش یابد.
- (۳) با افزایش تقاضای سالیانه مدت زمان دوره کاهش می‌یابد.
- (۴) تغییر در تقاضای سالیانه هیچ تأثیری در مدت زمان دوره ندارد.

**حل :** گزینه ۲ درست است.

$$EPQ \quad T = \sqrt{\frac{2A}{Dh \left(1 - \frac{D}{P}\right)}}$$

با افزایش تقاضای سالیانه ( $D$ ) در مخرج کسر  $D$  افزایش یافته است ولی  $1 - \frac{D}{P}$  کاهش یافته است پس بسته به نسبت  $\frac{D}{P}$  می‌تواند در نهایت افزایش یا کاهش داشته باشیم.

**مثال:** شرکتی دارای یک دستگاه تولیدی برای تولید دو نوع محصول است که تولید همزمان آن‌ها توسط این دستگاه ممکن نیست. اگر  $T_{pi}$  زمان تولید و مصرف محصول  $i$  ( $i=1,2$ ) و  $T_{di}$  زمان مصرف محصول  $i$  ( $i=1,2$ ) باشند و  $P_1, D_1$  به ترتیب نرخ

تقاضا و نرخ تولید محصول  $i$  باشند و داشته باشیم  $\frac{D_1}{P_1} = \frac{P_2 - D_2}{P_2}$  ، کدام گزینه زیر همواره صحیح است؟ (کنکور ۸۹)

$$\frac{T_{p1}}{T_{d1}} = \frac{T_{p2}}{T_{d2}} \quad , \quad T_{p1} + T_{d1} = T_{p2} + T_{d2} \quad (۱)$$

$$\frac{T_{p1}}{T_{d1}} = \frac{T_{p2}}{T_{d2}} \quad , \quad T_{p1} + T_{p2} = T_{d1} + T_{d2} \quad (۲)$$

$$\frac{T_{p1}}{T_{p2}} = \frac{T_{d1}}{T_{d2}} \quad , \quad T_{p1} + T_{p2} = T_{d1} + T_{d2} \quad (۳)$$

$$T_{p1} + T_{d1} = T_{p2} + T_{d2} \quad , \quad T_{p1} + T_{p2} = T_{d1} + T_{d2} \quad (۴)$$

**حل :** گزینه ۳ درست است.

$$\frac{D_1}{P_1} = 1 - \frac{D_2}{P_2} \Rightarrow \frac{T_{d1}}{T_{d2}} = \frac{T_{p2}}{T_{p1}} \Rightarrow \frac{T_{d1}}{T_{d2}} = \frac{T_{p2}}{T_{p1}}$$

$$T_{p1} T_{d1} = T_{d2} T_{p2}$$

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

پس :

$$\frac{T_{p_1}}{T_{p_2}} = \frac{T_{d_2}}{T_{d_1}}$$

$$T_{p_1} + T_{d_1} = T_{p_2} + T_{d_2} = T$$

و

و چون داریم

$$T_{d_1} = T_{p_2}$$

$$T_{d_2} = T_{p_1}$$

$$T_{p_1} + T_{p_2} = T_{d_1} + T_{d_2}$$

پس :

**مثال:** در مدل مقدار تولید اقتصادی (E.P.Q) اگر  $P < D$  باشد کمبود رخ می‌دهد. در شرکتی که  $P < D$  است، برای جبران کمبود، هر  $T$  واحد زمانی یکبار به مقدار  $Q$  واحد سفارش داده می‌شود. اگر  $D$ : نرخ تقاضا،  $P$ : نرخ تولید،  $A$ : هزینه سفارش دهی و  $h$ : هزینه نگهداری واحد موجودی در واحد زمان باشند، مقدار بهینه  $Q$  کدام است؟ (کنکور ۸۹)

$$\sqrt{\frac{2A}{h(D-P)}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{\frac{2DA}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{2\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{P}\right)A}{h}} \quad (۴)$$

$$\sqrt{\frac{2(D-P)A}{h}} \quad (۳)$$

حل : گزینه ۳ درست است.

مقدار تقاضایی که در مدل تولید برآورد نمی‌شود و سبب کمبود می‌شود که برای جلوگیری از آن سفارش می‌دهیم  $D-P$  می‌باشد.

پس:

$$Q = \sqrt{\frac{2A(D-P)}{h}}$$

## ۳-۴- مدل EPQ در حالت کمبود پس افت

فرضیات مدل مانند مدل EPQ است با این تفاوت که کمبود به صورت سفارشات عقب افتاده مجاز می‌باشد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی بهینه ( $Q^*$ )، مقدار کمبود بهینه در هر دوره ( $b^*$ ) و همین‌طور  $r_h^*$ ,  $r^*$  با کمینه کردن هزینه‌ها است.

پارامترهای هزینه کمبود ( $\pi, \hat{\pi}$ ) و نرخ تولید ( $P$ ) مقدار ثابتی را دارا می‌باشند.

یادداشت:

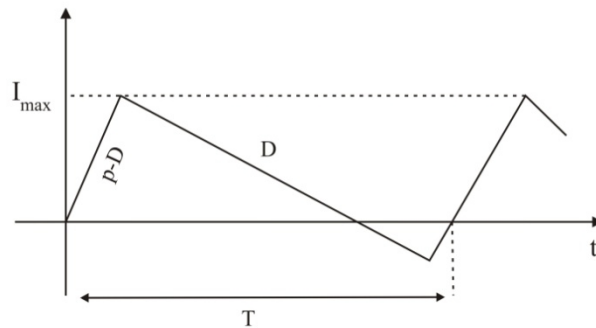
.....

.....

.....

.....

موجودی خالص



الگوریتم حل مدل:

اگر  $\pi D \geq \sqrt{2DAh \left(1 - \frac{D}{P}\right)}$  باشد به مدل EPQ بر می‌گردیم:  $Q^* = EPQ$  ,  $K(Q^*) = \sqrt{2DAh \left(1 - \frac{D}{P}\right)}$  ,  $b^* = 0$

اگر  $\pi D < \sqrt{2DAh \left(1 - \frac{D}{P}\right)}$  باشد، دو حالت می‌تواند رخ دهد.

اگر  $\hat{\pi} = 0$  باشد سیستم موجودی وجود ندارد.  $Q^* = 0$  ,  $K(Q^*) = \pi D$  ,  $b^* = \infty$

اگر  $\hat{\pi} > 0$  باشد، مقدار بهینه از مدل EPQ کمبود به دست می‌آید که صرفاً حالت خاص آن در متن ذیل بیان می‌گردد.

مانند مدل EOQ با کمبود پس‌افت، مدل EPQ با کمبود پس‌افت نیز حالت خاصی دارد که از این حالت برای مقایسه حل مسایل این مدل استفاده می‌گردد. در این حالت  $\pi = 0$  ,  $\hat{\pi} > 0$  است. روابط بهینه این حالت به صورت زیر است:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h \left(1 - \frac{D}{P}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi} + h}{\hat{\pi}}}$$

$$I_{\max}^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{1 - \frac{D}{P}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi} + h}}$$

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh} \sqrt{1 - \frac{D}{P}} \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi} + h}}$$

برای نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی درست در این مدل مانند مدل EPQ دو حالت وجود دارد. در ادامه روابط نقطه سفارش مجدد ذکر می‌گردد.

$$r^* = DL - b^*$$

$$\begin{cases} r_h^* = DL' - b^* = DL - mQ^* - b^* & \text{اگر } L' = L - mT \leq t_d \\ r_h^* = (P - D)(T - L') - b^* & \text{اگر } L' = L - mT > t_d \\ = DL - PL + (m + 1) \left(\frac{P}{D} - 1\right) Q^* - b^* & \end{cases}$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....



**مثال:** در یک سیستم کنترل موجودی به مقدار تولید اقتصادی (EOQ) اگر  $L - mT = \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P}\right)Q$  باشد نقطه سفارش مجدد

چقدر خواهد بود؟  $D$ : نرخ تقاضا،  $L$ : مدت زمان تحویل،  $m$ : یک عدد صحیح  $\left[\frac{L}{T}\right]$ ،  $T$ : طول یک دوره سفارش و  $Q$ :

مقدار هر بار سفارش. (کنکور ۸۵)

$$(1) \quad DL - mQ \quad (2) \quad \left(1 - \frac{D}{P}\right)Q$$

$$(3) \quad (D - P)L + (m + 1)Q \quad (4) \quad \text{موارد ۱ و ۲}$$

**حل:** گزینه ۲ درست است.

$$L' = L - mT = \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P}\right)Q = \left(\frac{P - D}{PD}\right) \times Q = \left(1 - \frac{D}{P}\right) \times \frac{Q}{D} = t_d$$

$$\rightarrow r_h^* = D \cdot L' = \left(1 - \frac{D}{P}\right) \times \frac{Q}{D} \times D = Q \left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

**مثال:** در یک مدل کنترل موجودی ساده با دریافت تدریجی نرخ دریافت ۲۰۰۰ و نرخ مصرف ۱۰۰۰ واحد در سال است. همچنین

مدت زمان تحویل ۴ ماه و مقدار هر بار سفارش ۱۰۰ واحد تعیین شده است. کدام یک از نقاط زیر می‌تواند یک نقطه سفارش

مجدد باشد؟ (کنکور ۸۶)

$r_h$ : موجودی در دست در زمان سفارش است

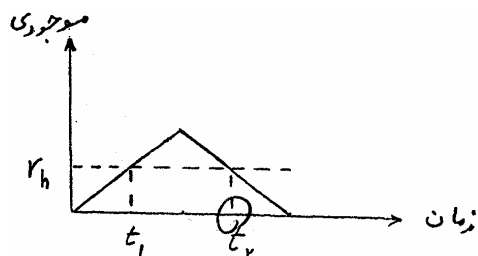
(۱)  $t_1$  یک نقطه سفارش مجدد است.

(۲)  $t_2$  یک نقطه سفارش مجدد است.

(۳)  $t_1$ ،  $t_2$  هر کدام یک نقطه سفارش مجدد هستند.

(۴) هیچ کدام از این نقاط ممکن است نقطه سفارش مجدد

نباشند.



**حل:** گزینه ۲ درست است.

$$T = \frac{Q}{D} = \frac{100}{1000} = 0.1$$

$$m = \left[\frac{L}{T}\right] = \left[\frac{0.33}{0.1}\right] = 3$$

$$\left. \begin{aligned} t_d &= T \left(1 - \frac{D}{P}\right) = 0.05 \\ L' &= 0.33 - 3 \times 0.1 = 0.03 \end{aligned} \right\} \text{بنابراین } t_2 \text{ نقطه سفارش مجدد است } L' < t_d$$

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

**مثال:** نرخ تقاضای محصولی  $\frac{3}{4}$  نرخ تولید آن می‌باشد. اگر سایت آن باشد که پیروی زمانی تولید و مصرف (طول یک سیکل) برابر 30

روز نرخ تولید 100 عدد در روز باشد مقدار تولید اقتصادی چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۷)

- (۱) 1250      (۲) 1650      (۳) 2250      (۴) 2500

حل : گزینه ۳ درست است.

$$D = \frac{3}{4}P \quad P = 100 \rightarrow D = 75$$

$$T = \frac{Q}{D} \rightarrow Q = 75 \times 30 = 2250$$

## ۵- مدل‌های چند محصولی و محدودیت‌دار

### ۵-۱- مدل چند محصولی ساده

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که برنامه‌ریزی برای چند محصول انجام می‌پذیرد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه برای هر محصول  $(Q_j^*)$  و نقطه سفارش بهینه  $(r_{h_j}^*, r_{j_j}^*)$  با کمینه کردن هزینه‌هاست. این هدف به صورت زیر قابل بیان است.

$$\min Z = \sum_j \left( \frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2} + C_j D_j \right)$$

برای یافتن می‌نیم  $Z$  از تابع فوق بر حسب  $Q_j$  مشتق گرفته و  $Q_j^*$  را می‌یابیم.

$$\frac{\delta Z}{\delta Q_j} = 0 \Rightarrow Q_j^* = Q_{\omega j} = \sqrt{\frac{2D_j A_j}{h_j}}$$

با توجه به  $Q_j^*$  های به دست آمده کل هزینه متغیر سالیانه برابر جمع هزینه‌های متغیر سالیانه هر کدام از محصولات است.

$$\text{کل هزینه متغیر سالیانه} = \sum_j \sqrt{2D_j A_j h_j}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مدل چون هیچ‌گونه محدودیتی وجود ندارد و مانند این است که چند محصول را جداگانه برنامه‌ریزی کنیم.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

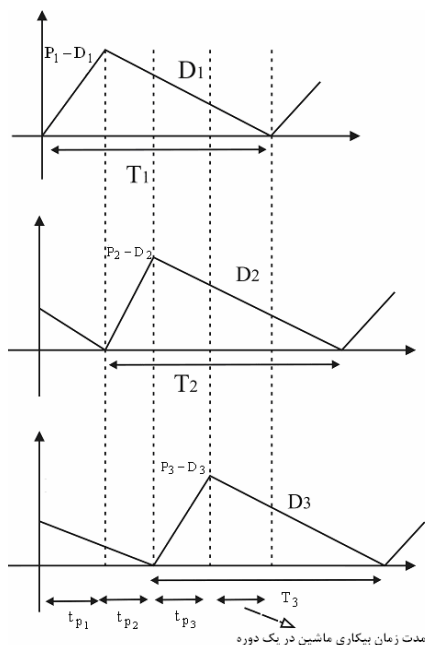
## ۲-۵- مدل چند محصولی تولیدی

فرضیات این مدل مانند مدل چند محصولی ساده است با این تفاوت که:

۱- سفارش به تدریج به انبار تحویل می‌شود.  $P = cte$

۲- کلیه محصولات توسط یک ماشین یا یک خط تولید، تولید می‌شوند.

هدف مدل تعیین مقدار تولید بهینه برای هر محصول  $(Q_j^*)$  و نقطه سفارش بهینه  $(r_{hj}^*, r_{j}^*)$  با کمینه کردن هزینه‌هاست.



برای سادگی این مدل طوری برنامه‌ریزی می‌شود که مدت زمان دوره هر محصول برابر با یکدیگر باشد. یعنی فرض می‌کنیم،

$$\forall j: T_j = T$$

$T_j$ : سیکل تولیدی محصول  $j$ ام (مجموع زمان تولید و زمان مصرف در یک دوره)

$$T_j = \frac{Q_j}{D_j}$$

$$K(T) = \sum_j \left( \frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2} \left( 1 - \frac{D_j}{P_j} \right) \right) \Rightarrow K(T) = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{2} \sum h_j D_j \left( 1 - \frac{D_j}{P_j} \right)$$

در این مدل ابتدا باید  $T^*$  را محاسبه کرده و سپس از طریق آن  $Q_j^*$  را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{dK(T)}{dT} = 0 \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j \left( 1 - \frac{D_j}{P_j} \right)}}$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

$Q_j^*$  توسط رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$Q_j^* = T^* D_j$$

هزینه متغیر سالیانه بهینه را نیز می‌توان از روابط زیر به دست آورد:

$$K(T^*) = \sqrt{2 \sum A_j \sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)} = \frac{2 \sum A_j}{T^*} = T^* \sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)$$

**نکته:** از آنجا که دوره سفارش اقلام برای سفارش همزمان یکسان است بنابراین  $T = \frac{Q_j}{D_j}$  برای تمام اقلام با هم برابر خواهد بود

بنابراین نسبت مقدار سفارش اقتصادی به مصرف سالیانه باید یکسان باشد.

## ۵-۲-۱- شرط لازم برای جوابدار بودن

$\frac{D_j}{P_j}$ : درصد زمانی از سال که ماشین مشغول تولید محصول لازم است.

$\frac{t_{p_j}}{T_j}$ : درصد زمانی از یک دوره که ماشین مشغول تولید محصول لازم است.

کسرهای فوق چون از جنس درصد هستند بنابراین واحد نداشته و در دوره یا سال بودن آنها تفاوتی نمی‌کند و با هم برابرند.

$$\frac{t_{p_j}}{T_j} = \frac{\frac{Q_j}{P_j}}{\frac{Q_j}{D_j}} = \frac{D_j}{P_j}$$

$\sum_j \frac{D_j}{P_j}$  = درصد زمان کار ماشین (در سال یا دوره)

$1 - \sum_j \frac{D_j}{P_j}$  = درصد زمان بیکاری ماشین (در سال یا دوره)

شرط جوابدار بودن مسئله این است که درصد زمان کار ماشین از یک کمتر باشد و یا به عبارتی درصد زمانی بیکاری ماشین از صفر بیشتر باشد.

$$1 - \sum \frac{D_j}{P_j} \geq 0 \Rightarrow \sum \frac{D_j}{P_j} \leq 1$$

مدت زمان بیکاری در دوره =  $\left(1 - \sum_j \frac{D_j}{P_j}\right) T$

مدت زمان بیکاری ماشین در سال =  $1 - \sum_j \frac{D_j}{P_j}$

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

## ۲-۲-۵ الگوریتم حل مدل

ابتدا شرط جواب‌دار بودن مدل را چک می‌کنیم:

$$\sum \frac{D_j}{P_j} \leq 1$$

اگر شرط فوق برقرار نباشد مدل جواب ندارد بنابراین امکان تولید این محصولات با یک ماشین وجود ندارد. در صورتی که شرط فوق برقرار باشد،  $T^*$  از روابط ذکر شده محاسبه شده و سپس  $Q_j^*$  را به دست می‌آوریم.

**مثال:** در مدل چند محصولی با محدودیت منبع تولیدی وقتی که سه قلم کالا تولید می‌شود و از سیکل ثابت گردش استفاده می‌شود

اگر  $A_1$  (هزینه راه اندازه‌ی برای تولید محصول یک) کاهش پیدا کند. کدام حالت زیر رخ نمی‌دهد؟ (کنکور ۸۷)

(۱) هزینه کل سیستم کاهش پیدا می‌کند.

(۲) مقدار سفارش کالای اول کاهش پیدا می‌کند.

(۳) هزینه‌های نگهداری سالیانه سیستم کاهش پیدا می‌کند.

(۴) مقدار سفارش کالای دوم و سوم ممکن است افزایش پیدا کند.

**حل :** گزینه ۴ درست است.

در مدل چند محصولی با محدودیت منبع تولیدی مدت زمان یک دوره به صورت :

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

$$Q_j^* = T_j^* \cdot D_j$$

حال اگر  $A_1$  کاهش یابد  $\sum A_j$  کاهش یافته و  $T^*$  ,  $Q_j^*$  هماهنگی کاهش می‌یابند.

**مثال:** در یک مدل دریافت تدریجی مصرف سالیانه 1000 واحد و نرخ دریافت در زمان‌های دریافت کالا 2000 واحد در سال است

اگر EPQ برابر 200 واحد تعیین شده باشد و مدت زمان تحویل 0.1 سال باشد پس از گذشت 20 روز ( $\frac{2}{3}$  ماه) از صدور

سفارش موقعیت موجودی حدوداً چند واحد خواهد بود؟ (کنکور ۸۶)

280 (۴)

245 (۳)

100 (۲)

80 (۱)

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

حل : گزینه درست است.

موجودی در راه + موجودی در دست = موقعیت موجودی

$$T = \frac{Q}{D} = \frac{200}{1000} = 0.2$$

روز 0.055 سال = 20 روز

$$m = \left\lceil \frac{L}{T} \right\rceil = \left\lceil \frac{0.1}{0.2} \right\rceil = 0$$

$$L = 0.1$$

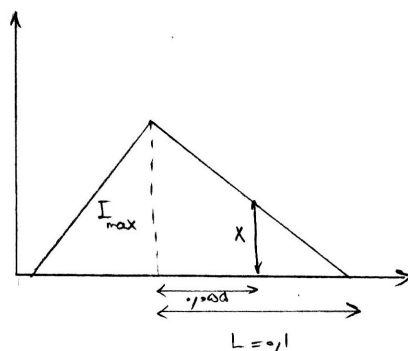
$$I_{\max} = Q \left( 1 - \frac{D}{P} \right) = 100$$

$$45 = \frac{0.045 \times I_{\max}}{0.1} =$$

X = موجودی در دست پس از گذشت 20 روز از صدور سفارش

$(m+1)Q = 200$  = موجودی در راه پس از گذشت 20 روز از صدور سفارش

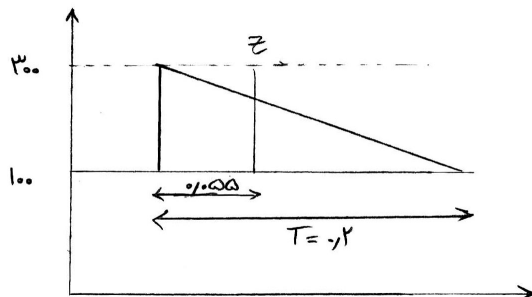
$200 + 45 = 245$  = موقعیت موجودی



راه دوم :

$$z = D \times 0.055 = 1000 \times 0.055 = 55$$

$300 - Z = 300 - 55 = 345$  = موقعیت موجودی پس از گذشت 20 روز از صدور سفارش



یادداشت:

.....

.....

.....

.....

**مثال:** در یک سیستم موجودی سه قلم کالا تحت شرایط مدل ساده‌ی قطعی کنترل می‌شود که هزینه‌های نگهداری آن ناچیز است ولی محدودیت حداکثر سرمایه درگیر در موجودی به اندازه‌ی 10000 واحد پول مطرح است اگر مصرف سالیانه به ترتیب 100, 130, 150 و هزینه تهیه یک واحد کالا به ترتیب 62, 50, 42 واحد پول و هزینه‌های سفارش‌دهی به ترتیب 10, 5, 5 واحد پول برای کالاهای اول دوم و سوم باشد و دوره سفارش همه اقلام یکسان در نظر گرفته شود مقدار سفارش اقتصادی هر قلم چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۷)

$$\begin{aligned} (۱) \quad Q_3 \approx 64.9, \quad Q_2 \approx 64.9, \quad Q_1 \approx 64.9 \\ (۲) \quad Q_3 \approx 80.65, \quad Q_2 \approx 50, \quad Q_1 \approx 59.5 \\ (۳) \quad Q_3 \approx 63.7, \quad Q_2 \approx 68.4, \quad Q_1 \approx 62.6 \\ (۴) \quad Q_3 \approx 75, \quad Q_2 \approx 65, \quad Q_1 \approx 50 \end{aligned}$$

**حل :** گزینه ۴ درست است.

با توجه به نکته عنوان شده یعنی ثابت بودن نسبت‌ها داریم:

$$\frac{500}{100} = \frac{65}{130} = \frac{75}{150} = \frac{1}{2} = T$$

**مثال:** تقاضا برای محصولی 10,000 کیلو در سال است. این محصول را می‌توان در خود مؤسسه با نرخ تولید 30,000 کیلو در سال تولید و یا محصول را از بازار تهیه کرد. مقدار سفارش اقتصادی چه در حالت تولید و چه در حالت خرید برای محصول برابر 1000 کیلو است. اگر قیمت خرید یک محصول از بازار و هزینه تولید یک واحد محصول در مؤسسه یکسان باشد، به نظر شما کدام عبارت، صحیح است؟ (کنکور 88)

- (۱) تولید محصول اقتصادی‌تر است.
  - (۲) ترکیبی از تولید و خرید بهتر است.
  - (۳) برای تعیین اقتصادی بودن خرید یا تولید نیاز به عوامل (پارامترهای) بیشتر است.
  - (۴) خرید محصول اقتصادی‌تر است به علاوه در ددرسهای تولید را نیز ندارد.
- حل :** گزینه ۱ درست است.

$$D=10,000 \quad P = 30,000$$

$$C = C \rightarrow h = h$$

$$Q = Q = 1000 \rightarrow \sqrt{\frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$$

خرید تولید      خرید تولید  
خرید تولید

$$A = A \left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

خرید تولید

$$\frac{K_{\text{تولید}}}{K_{\text{خرید}}} = \frac{\sqrt{2ADh\left(1-\frac{D}{P}\right)}}{\sqrt{2ADh}} = \sqrt{\frac{A\left(1-\frac{D}{P}\right)^2}{A}} = 1 - \frac{D}{P} < 1$$

تولید مناسب‌تر است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

## ۳-۵- مدل چندمحصولی تولیدی با زمان آماده‌سازی

در این حالت مدل چندمحصولی تولیدی را در حالتی که هر محصول برای هر بار تولید خود نیاز به زمان آماده‌سازی برابر با  $S_j$  دارد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$S_j$ : زمان هر بار آماده‌سازی محصول  $j$ ام

این زمان‌های آماده‌سازی در مدت زمان بیکاری ماشین در هر دوره جای می‌گیرد و در صورتی که از این زمان بیشتر گردد باید  $T^*$  را طوری تغییر داد که این زمان را در بر گیرد.

**الگوریتم حل مدل:**

$T_0, T_{min}$  از روابط مربوطه به‌دست آورده ،  $T^*$  ماکزیمم این دو مقدار خواهد بود.

$$T_0 = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

$$T^* = \max\{T_0, T_{min}\}$$

$$T_{min} = \frac{\sum S_j}{1 - \sum \frac{D_j}{P_j}}$$

مقدار سفارش بهینه برای هر محصول از فرمول روبرو محاسبه می‌گردد:

$$Q_j^* = T^* D_j$$

کل هزینه سالیانه مدل از رابطه زیر به‌دست خواهد آمد:

$$K = \sqrt{2 \sum A_j \sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)} \quad \text{اگر } T^* = T_0 \text{ باشد}$$

$$K = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{2} \sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right) \quad \text{اگر } T^* = T_{min} \text{ باشد}$$

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....



**مثال:** در یک سیستم سفارش تولید چند کالا، محدودیت منبع تولیدی مطرح است. با توجه به روابط زیر فرض کنید  $2T_{\min} = T^*$  باشد. (کنکور ۸۵)

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}, \quad T_{\min} = \frac{\sum S_j}{1 - \sum \frac{D_j}{P_j}}$$

$S_j$ : زمان آماده سازی برای تولید کالای زام

$A_j$ : هزینه آماده سازی برای تولید کالای زام

$D_j$ : نرخ مصرف کالای زام

$P_j$ : نرخ تولید کالای زام

$h_j$ : هزینه نگهداری یک واحد کالای زام در سال

کدام یک از عبارتهای زیر صحیح است؟

(۱) مقدار سفارش کالای زام برابر  $D_j \times T_{\min}$  خواهد بود.

(۲) با کاهش زمانهای آماده سازی مقدار سفارش کالاها تغییر نمی کند.

(۳) مقدار سفارش کالای زام کمتر از  $D_j \times T_{\min}$  است.

(۴) اگر زمانهای آماده سازی بیش از دو برابر شوند مقدار سفارش کالای زام برابر  $D_j \times T^*$  خواهد بود.

**حل:** گزینه ۲ درست است.

$$2T_{\min} = T^* = T_0 \Rightarrow T_0 > T_{\min}$$

$$T^* = \text{Max}\{T_{\min}, T_0\} = T_0 \Rightarrow Q_j = D_j \times T_0 = D_j \times T^*$$

گزینه ۱ غلط است

$$T^* > T_{\min} \Rightarrow D_j \cdot T^* > D_j \cdot T_{\min} \rightarrow$$

گزینه ۳ غلط است

اگر زمان آماده سازی بیش از ۲ برابر شود،  $T_{\min}$  بیش از ۲ برابر می شود. بنابراین  $T^*$  از  $T_0$  بزرگتر خواهد شد و  $\text{Max}\{T_{\min}, T_0\}$  برابر  $T_{\min}$  خواهد شد و  $Q_j = D_j \times T_{\min}$  گزینه ۴ غلط است.

گزینه ۲: کاهش زمان آماده سازی موجب کاهش  $T_{\min}$  خواهد شد و بنابراین  $\text{Max}\{T_0, T_{\min}\}$  برابر  $T_0$  می شود، یعنی مقدار سفارش کالاها تغییر نمی کند.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

## ۵-۴- مدل چندمحصولی با محدودیت فضا

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که حداکثر فضای موجود در انبار برابر با  $F$  می‌باشد.

$F$ : حداکثر فضای موجود در انبار

$f_j$ : فضای اشغالی هر واحد محصول  $j$ ام

در این صورت حداکثر فضای اشغالی محصول  $j$ ام از رابطه زیر به دست می‌آید:

حداکثر فضای اشغالی محصول  $j$ ام = (حداکثر موجودی محصول  $j$ ام)  $f_j$

و محدودیت فضای انبار به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_j f_j I_{\max_j} \leq F \Rightarrow \sum_j f_j I_{\max_j} \leq F$$

باید توجه کرد که برای هر مدل باید  $I_{\max}$  مربوطه را قرار داد، به عنوان مثال برای مدل تولیدی  $I_{\max} = Q \left(1 - \frac{D}{P}\right)$  و برای مدل ساده قطعی،  $I_{\max} = Q$  است.

در ادامه مدل را برای مدل چندمحصولی ساده با  $I_{\max} = Q$  بررسی می‌کنیم و بنابراین مدل به دنبال یافتن جواب مسئله زیر است

$$\text{Min } Z = \sum_j \left( \frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2} \right)$$

$$\sum_j f_j Q_j \leq F$$

برای ارضای محدودیت فضا تابع هدف را با استفاده از ضریب لاگرانژ و تکنیک مربوط به آن به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

$$\text{Min } J = Z + \theta \left( F - \sum_j f_j Q_j \right)$$

و به روش زیر جواب‌های منحصر به فرد مسئله را به دست خواهیم آورد:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial Q_j} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_j f_j \sqrt{\frac{2D_j A_j}{h_j + 2\theta^* f_j}} = F \quad \text{(I)} \\ Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_j A_j}{h_j + 2\theta^* f_j}} \quad \text{(II)} \end{array} \right.$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به صورت زیر است:

ابتدا از محدودیت فضا صرف نظر می‌کنیم، و جواب مسئله  $Q_{\omega j} = \sqrt{\frac{2D_j A_j}{h_j}}$  خواهد بود. در صورتی که این جواب محدودیت فضا

$\left( \sum_j f_j Q_j \leq F \right)$  را راضی کند، جواب‌های به دست آمده جواب‌های مدل هستند و در غیر این صورت مقدار  $\theta^*$  را با استفاده از روش

لاگرانژ از معادله (I) به دست آورده و در معادله (II) جایگزین می‌کنیم و جواب مسئله را به دست می‌آوریم.

**تذکر:** از آنجا که به دست آوردن  $\theta^*$  از روابط فوق به صورت سعی و خطاست روش فوق زمان حل زیادی را می‌طلبد بنابراین روش

حل این گونه مسائل به صورت تستی، این است که در صورتی که بعد از محاسبات متوجه می‌شویم که  $Q_{\omega j}$  محدودیت را رعایت

نمی‌کنند، گزینه‌های جواب مسئله است که محدودیت فضا را مساوی می‌کند.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

**نکته:** در صورتی که  $Q_{\omega j}$  محدودیت را ارضا نکند، جواب‌های بهینه به دست آمده الزاماً از  $Q_{\omega j}$  ها کمتر خواهد بود ( $Q_j^* < Q_{\omega j}$ )

**مثال:** تقاضا برای محصول 15000 واحد در سال و این محصول با نرخ 20000 واحد در سال تولید می‌شود. اگر به علت محدودیت فضا نتوان بیشتر از 1000 واحد از محصول را در انبار نگهداری نمود، آنگاه به نظر شما حداکثر مقدار سفارش اقتصادی از چه حد بیشتر نمی‌تواند باشد؟ (کنکور ۸۸)

$Q^* \leq 1000$  (۱)       $Q^* \leq 1500$  (۲)       $Q^* \leq 4000$  (۳)       $Q^* \leq 5000$  (۴)

**حل:** گزینه ۳ درست است.

$D=15000 \quad P = 20000$

$$I_{\max} \leq 1000 \rightarrow Q \left(1 - \frac{D}{P}\right) \leq 1000 \rightarrow Q \leq 4000$$

### ۵-۵- مدل چند محصولی با محدودیت سرمایه درگیر موجودی

فرضیات مدل مانند مدل چند محصولی ساده است با این تفاوت که حداکثر سرمایه موجود برای موجودی برابر با  $X$  می‌باشد.

$X$ : حداکثر سرمایه درگیر موجودی

محدودیت سرمایه درگیر موجودی به صورت زیر است:

$$\sum C_j (I_{\max j} + Q_j) \leq X \Rightarrow \sum C_j I_{\max j} \leq X$$

برای مدل قطعی ساده  $I_{\max} = Q$  است و محدودیت به صورت  $\sum C_j Q_j \leq X$  است. حل مدل مانند مدل محدودیت فضا است با این

تفاوت که مقدار  $\beta^*$  از رابطه (I) در زیر محاسبه شده و در رابطه‌های (II) جایگزین می‌گردد.

$$\sum C_j \sqrt{\frac{2A_j D_j}{h_j + 2\beta^* C_j}} = X \quad (I)$$

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2A_j D_j}{h_j + 2\beta^* C_j}} \quad (II)$$

**تذکر:** مانند مدل محدودیت فضا در صورتی که بعد از محاسبات متوجه شویم که  $Q_{\omega j}$  ها محدودیت را ارضا نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت سرمایه درگیر موجودی را مساوی کند.

**نکته:** در صورتی که  $Q_{\omega j}$  ها محدودیت را ارضا نکنند، جواب‌های بهینه به دست آمده مانند مدل محدودیت فضا، الزاماً از  $Q_{\omega j}$  ها کمتر خواهند بود. ( $Q_j^* < Q_{\omega j}$ )

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

**نکته:** اگر ضریب لاگرانژ موجود باشد یعنی محدودیت مساوی شده است:

www.ieun.ir

$$\sum C_j \sqrt{\frac{2AD}{(i+2\beta^*)}} = X \qquad \sum \sqrt{\frac{2ADC_j}{(i+2\beta^*)}} = X$$

$$\sum \sqrt{\frac{2AD_i h_j}{i(i+2\beta^*)}} = X \qquad \sum \sqrt{2ADh} = X \sqrt{i(i+2\beta^*)}$$

**مثال:** در یک سیستم کنترل موجودی با دریافت تدریجی  $P$  و  $D$  به ترتیب نرخ دریافت و نرخ مصرف هستند. اگر  $A$  و  $h$  هزینه‌های هر بار سفارش و نگهداری یک واحد کالا در سال و  $C$  قیمت هر واحد کالا باشد با فرض حداکثر سرمایه درگیر در موجودی برابر  $M$  واحد پول، مقدار اقتصادی هر بار سفارش از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟ (کنکور ۸۵)

$$EPQ = \sqrt{\frac{2DA}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}} \quad (Q^* = ?)$$

(۲) اگر  $C \times EPQ > M$  باشد آنگاه  $Q^* = EPQ$

$$Q^* = \frac{M}{c\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P}\right)} \quad (۱)$$

(۳) اگر  $C \times EPQ \times \left(1 - \frac{D}{P}\right) < M$  باشد آنگاه  $Q^* = EPQ$  (۴) اگر  $C \times EPQ < M$  باشد

$$Q^* = \frac{M}{C\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P}\right)}$$

**حل:** گزینه ۳ درست است.

$$CI_{\max} \leq M \rightarrow CQ\left(1 - \frac{D}{P}\right) \leq M$$

اگر مقدار  $Q = EPQ$  محدودیت بالا را ارضا کند، جواب مسأله است.

**مثال:** در یک مدل موجودی با دریافت آتی کنترل سه قلم کالا مطرح است و هزینه نگهداری هر واحد کالا با نرخ هزینه نگهداری ۲۰٪ محاسبه می‌شود اگر محدودیت حداکثر سرمایه درگیر در موجودی به صورت  $20Q_1 + 10Q_2 + 60Q_3 \leq 20000$  مطرح باشد و ضریب لاگرانژ ۰.۰۲۵ به دست آمده باشد کمترین هزینه ممکن در صورتی که بتوان بودجه کافی (به هر مقدار لازم) تهیه کرد چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۶)

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| (۱) حدوداً ۴۵۰۰ واحد پول  | (۲) حدوداً ۸۰۰۰ واحد پول  |
| (۳) حدوداً ۱۰۰۰۰ واحد پول | (۴) حدوداً ۲۰۰۰۰ واحد پول |

**حل:** گزینه ۱ درست است.  
**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

با توجه به نکته بالا مقدار بهینه‌ی هزینه متغیر سالیانه برابر است با :

$$K^* = \sum \sqrt{2ADh} = 20000 \times \sqrt{0.2(0.2+2 \times 0.025)} = 4472.1 \approx 4500$$

## ۵-۶- مدل چندمحصولی با محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که تعداد دفعات سفارش در سال حداکثر می‌تواند برابر  $\ell$  باشد.

$\ell$  : حداکثر تعداد دفعات سفارش در سال برای کلیه محصولات

$$\frac{D_j}{Q_j} : \text{تعداد دفعات سفارش در سال برای محصول } j \text{ ام.}$$

محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال به صورت زیر است:

$$\sum \frac{D_j}{Q_j} \leq \ell$$

روش حل مدل مانند مدل محدودیت فضا است، با این تفاوت که از رابطه (I) مقدار  $\alpha^*$  را به دست آورده و در رابطه‌های (II) جایگزین می‌کنیم.

$$\sum \sqrt{\frac{h_j D_j}{2(A_j + \alpha^*)}} = \ell \quad (I)$$

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_j(A_j + \alpha^*)}{h_j}} \quad (II)$$

تذکر: مانند مدل‌های محدودیت‌دار ذکر شده، در صورتی که بعد از محاسبات متوجه شویم که  $Q_{\omega j}$  ها محدودیت را ارضا نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت را مساوی می‌کند.

نکته: برخلاف دو مدل گذشته در صورتی که  $Q_{\omega j}$  ها محدودیت را ارضا نکنند، جواب‌های بهینه به دست آمده الزاماً از  $Q_{\omega j}$  ها بزرگتر خواهند بود  $(Q_j^* > Q_{\omega j})$

## ۵-۷- مدل چند محصولی در حالت الزام سفارش همزمان محصولات

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که محصولات باید با هم سفارش داده شوند. در این صورت شرط یکسان بودن سیکل بهینه تمامی محصولات به مساله تحمیل خواهد شد.

$$\forall j \quad T_j = T = \frac{Q_j}{D_j}$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

بنابراین تابع هدف مدل به صورت زیر است:

$$\min Z = \sum \left( \frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2} \right) \Rightarrow K(T) = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{2} \sum h_j D_j$$

و  $T^*$  از رابطه زیر به دست می آید.

$$\frac{dK(t)}{dT} = 0 \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j}}$$

و  $Q_j^*$  از رابطه زیر محاسبه می گردد.

$$Q_j^* = T^* D_j$$

و در انتها کل هزینه های سالیانه را محاسبه می نماییم.

$$k(T^*) = \sqrt{2 \sum A_j \sum h_j D_j}$$

**مثال:** در مدل تولید چند محصولی توسط یک منبع تولید همراه با زمان آماده سازی برای هر بار تولید محصول، مسئله وقتی جواب دارد که:

- (۱) کسر بیکاری ماشین بزرگتر یا مساوی صفر باشد.
- (۲) زمان بیکاری ماشین بزرگتر از مجموع زمان های آماده سازی می باشد.
- (۳) نسبت مجموع زمان های آماده سازی به کسر بیکاری ماشین بزرگتر از یک باشد.
- (۴) نسبت مجموع زمان های آماده سازی به کسر بیکاری ماشین کوچکتر از یک باشد.

**حل:** گزینه ۱ درست است.

همان طور که در مدل چند محصولی تولیدی ذکر گردید تنها شرط جواب دار بودن مسئله این است که  $\sum \frac{D_j}{P_j} \leq 1$  باشد یا

$$1 - \sum \frac{D_j}{P_j} \geq 0$$

باشد که همان کسر بیکاری ماشین است.

**نکته:** در صورتی که در یک مدل چند محصولی بیش از یک محدودیت ارایه گردد برای حل مدل باید یک محدودیت را در نظر بگیریم و جواب های مدل را به دست آوریم، چنانچه جواب حاصل محدودیت حذف شده را ارضا کند جواب مدل است. در غیر این صورت گزینه ای جواب مدل است که محدودیت های در نظر گرفته شده را مساوی کند.

**نکته:** در صورتی که در مدلی محدودیت دار، محدودیتی غیر از مدلهای عنوان شده برای مدلی تک محصولی ارایه گردد، ابتدا محدودیت را بر اساس متغیر خواسته شده توسط مسئله می نویسیم و بدون در نظر گرفتن محدودیت مقدار بهینه متغیر را به دست می آوریم. در صورتی که محدودیت را رعایت کرد، جواب مسئله است. در غیر این صورت مقداری که محدودیت را مساوی کند جواب مساله می باشد.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

**مثال:** در یک مدل کنترل موجودی چند کالایی، وجود کدام محدودیت ممکن است موجب افزایش مقدار سفارش اقتصادی گردد؟  
(کنکور ۸۹)

- |                            |                         |
|----------------------------|-------------------------|
| (۱) تعداد دوره‌های سفارش   | (۲) فضای انبار          |
| (۳) سرمایه درگیر در موجودی | (۴) تعداد واحد در محصول |

**حل :** گزینه ۱ درست است.

در صورتی که محدودیت تعداد دوره‌های سفارش داشته باشیم ممکن است مجبور شویم مقدار سفارش را افزایش دهیم تا با دفعات کم سفارش تقاضا پوشش داده شود.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

## ۶- مدل های تخفیف

تخفیف یعنی قیمت هر واحد کالا (C) با افزایش مقدار سفارش کاهش می یابد. تخفیف دو نوع کلی و نموی (افزایشی) دارد:

- **تخفیف کلی:** در این حالت تخفیف بر کل کالاها به صورت یکسان اعمال می شود. به عبارت دیگر در این حالت تمام واحدهای خریداری شده با یک قیمت واحد محصول خریداری می شوند.

- **تخفیف نموی یا افزایشی:** در این حالت تخفیف بر هر محدوده به صورت جداگانه اعمال می شود به عبارت دیگر در این حالت تمامی واحدهای خریداری شده با یک قیمت واحد محصول خریداری نمی شوند و تخفیف بر اساس مقادیر داخل محدوده تخفیف برای هر واحد محصول تعریف می شود.

کل هزینه خرید دو نوع تخفیف به صورت جدول زیر می باشد:

شماره محدوده	محدوده تخفیف	قیمت واحد کالا	کل هزینه خرید (تخفیف کلی)	کل هزینه خرید (تخفیف نموی)
0	$q_0 \leq Q < q_1$	$C_0$	$C_0 Q$	$C_0 Q$
1	$q_1 \leq Q \leq q_2$	$C_1$	$C_1 Q$	$C_0(q_1 - q_0) + C_1(Q - q_1)$
2	$q_2 \leq Q < q_3$	$C_2$	$C_2 Q$	$C_0(q_1 - q_0) + C_1(q_2 - q_1) + C_2(Q - q_2)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
j	$q_j \leq Q < q_{j+1}$	$C_j$	$C_j Q$	$\sum_{i=1}^j C_{i-1}(q_i - q_{i-1}) + C_j(Q - q_j)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$q_n \leq Q$	$C_n$	$C_n Q$	$\sum_{i=1}^n C_{i-1}(q_i - q_{i-1}) + C_n(Q - q_n)$

همان طور که ذکر شد در تخفیف با افزایش مقدار سفارش، قیمت هر واحد کالا کاهش می یابد یعنی:

$$C_0 > C_1 > \dots > C_n$$

کل هزینه خریدار را با  $R(Q)$  نشان می دهند. و به  $q_j$  ها نقاط تخفیف یا نقاط شکست یا نقاط تغییر قیمت می گویند. نمودار هزینه خرید برابر تخفیف کلی به شکل زیر است. این نمودار به صورت گسسته می باشد و امتداد تمام خطوط از مبدأ مختصات می گذرد. شیب خطوط نیز برابر قیمت خرید است.

یادداشت:

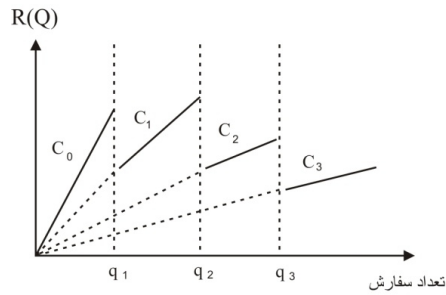
.....

.....

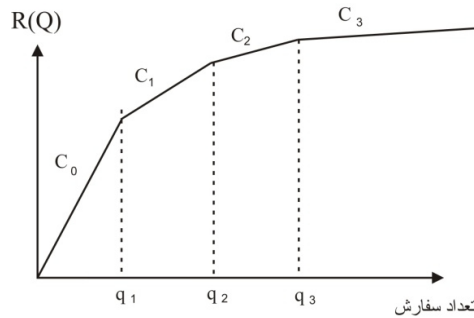
.....

.....





نمودار هزینه خرید تخفیف نموی به صورت پیوسته است. این نمودار در شکل زیر مشخص گشته است. شیب خطوط برابر قیمت خرید است.



نکته: اگر قیمت‌ها یکسان باشد، به ازای یک  $Q$  مشخص، هزینه خرید در تخفیف نموی بیشتر از تخفیف کلی است.

## ۶-۱- مدل تخفیف کلی

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است، با این تفاوت که تخفیف از نوع کلی وجود دارد.

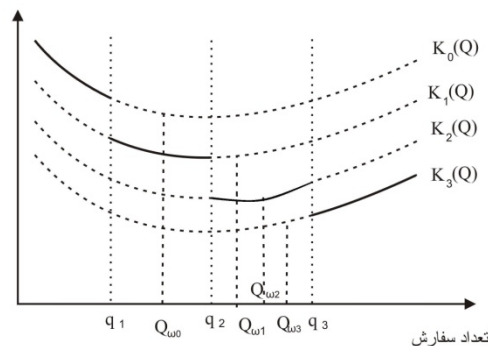
هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه ( $Q^*$ ) و نقطه سفارش بهینه با کمینه کردن هزینه‌هاست.

همان‌طور که هزینه خرید در هر محدوده متفاوت است، تابع کل هزینه‌ی سالیانه نیز برای هر محدوده متفاوت و به صورت زیر است:

$$k_j(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{h_j Q}{2} + C_j D, \quad h_j = iC_j + \omega, \quad q_j \leq Q \leq q_{j+1}$$

بنابراین مانند هزینه خرید نمودار کل هزینه‌ی سالیانه سیستم برای مدل تخفیف کلی نیز گسسته می‌باشد.

کل هزینه‌های سالیانه



یادداشت:

.....

.....

.....

.....

بهترین نقطه تابع محدوده  $z$  ام با مشتق‌گیری از  $k_j(Q)$  به دست می‌آید و به صورت زیر است:

$$Q_{\omega j} = \sqrt{\frac{2DA}{h_j}}$$

اما ممکن است این نقطه داخل محدوده خود نباشد بنابراین بهترین نقطه قابل قبول محدوده  $z$  ام به صورت زیر تعیین می‌گردد.

- اگر  $Q_{\omega j}$  از نقطه تخفیف انتهایی محدوده  $(q_{j+1})$  بیشتر باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده  $z$  ام  $(Q_j^*)$  برابر  $q_{j+1}$  می‌باشد.

$$q_{j+1} < Q_{\omega j} \Rightarrow Q_j^* = q_{j+1}$$

- اگر  $Q_{\omega j}$  بین نقاط تخفیف ابتدایی و انتهایی محدوده خود باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده برابر  $Q_{\omega j}$  می‌باشد.

$$q_j \leq Q_{\omega j} < q_{j+1} \Rightarrow Q_j^* = Q_{\omega j}$$

- اگر  $Q_{\omega j}$  از نقطه تخفیف ابتدایی محدوده  $(q_j)$  کمتر باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده  $z$  ام  $(Q_j^*)$  برابر  $q_j$  می‌باشد.

$$Q_{\omega j} < q_j \Rightarrow Q_j^* = q_j$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود.

از محدوده  $n$  ام (محدوده آخر) ابتدا  $Q_{\omega j}$  و سپس  $Q_j^*$  را برای محدوده محاسبه می‌کنیم. این کار را تا زمانی ادامه می‌دهیم که برای اولین بار  $Q_{\omega j}$  داخل محدوده قابل قبول تخفیف بیافتد  $(Q_j^* = Q_{\omega j})$  در این جا متوقف می‌شویم و برای نقاط قابل قبول بهینه به دست آمده،  $k_j(Q_j^*)$  را محاسبه می‌کنیم، کمترین هزینه، هزینه بهینه سالیانه و نقطه متناظر با آن نقطه بهینه مدل است.

$$K(Q^*) = \min K_j(Q_j^*)$$

**تذکر:** علت متوقف شدن زمانی که برای اولین بار  $Q_{\omega j}$  داخل محدوده قابل قبول تخفیف می‌افتد این است که کل هزینه سالیانه برای  $Q_{\omega j}$  از تمام هزینه‌های  $Q_{\omega j}$  های سمت چپ خود کمتر است و نیازی به محاسبه هزینه آنها نمی‌باشد. بنابراین نقطه بهینه در مدل تخفیف کلی تنها می‌تواند نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون باشد.

**نکته:** روابط زیر برای  $Q_{\omega j}$  و  $K(Q_{\omega j})$  های تمام محدوده‌ها برقرار است.

$$Q_{\omega_0} \leq Q_{\omega_1} \leq Q_{\omega_2} \leq \dots \leq Q_{\omega_n}$$

$$K_0(Q_{\omega_0}) > K_1(Q_{\omega_1}) > K_2(Q_{\omega_2}) > \dots > K_n(Q_{\omega_n})$$

**نکته:** همان‌طور که ذکر گردید. مجموعه قابل بررسی نقاط بهینه برای به دست آوردن  $Q^*$ ، نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت بعد از آن است یعنی:

$$Q^* = \{Q_{\omega_2}, q_3, q_4, \dots\}$$

**یادداشت:**

.....

.....

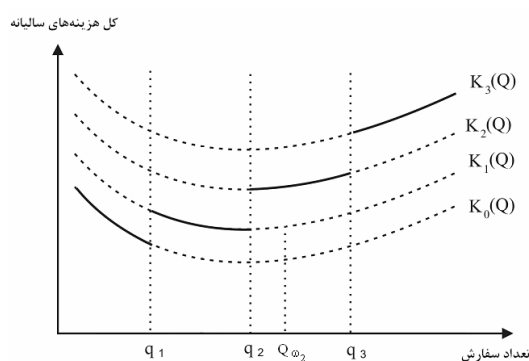
.....

.....

**نکته:** اگر کل هزینه نگهداری سالیانه را TCH و کل هزینه سفارش‌دهی سالیانه را TCS بنامیم. در نقطه  $Q_{\omega_2}$ ،  $TCH = TCS$  و در نقاط  $q_1, q_2, q_3, \dots$  از آنجا که بزرگتر از  $Q_{\omega_2}$  مربوط به خود هستند  $TCH > TCS$  است پس می‌توان گفت در نقطه بهینه مدل تخفیف رابطه بین هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه به صورت زیر است:

$$TCH \geq TCS$$

**نکته:** در یک مدل خلاف تخفیف کلی اگر به ازای افزایش مقدار سفارش، قیمت واحد کالا نیز افزایش یابد یعنی  $C_0 < C_1 < C_2 < \dots < C_n$  روش حل مدل مشابه تخفیف کلی است، با این تفاوت که از محدوده اول شروع می‌کنیم و  $Q_j^*$  را تا آنجا که  $Q_j^* = Q_{\omega_j}$  شود ادامه می‌دهیم و.... در این حالت ترتیب نمودارها برعکس می‌گردد یعنی نمودار هزینه کل به صورت زیر خواهد بود:



در این حالت مجموعه نقاط بهینه قابل بررسی، نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت چپ نقطه ویلسون است یعنی:

$$Q^* = \{Q_{\omega_2}, q_2, q_1\}$$

همچنین رابطه بین هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه به صورت زیر است:

$$TCH \leq TCS$$

**نکته:** در صورتی که تخفیف کلی برای سایر پارامترهای مدل مثل  $A, h, \dots$  باشد، دقیقاً مانند روش حل مدل تخفیف کلی عمل می‌کنیم با این تفاوت که  $Q_{\omega_j}, k_j$  را بر اساس پارامتر تغییر یافته محاسبه می‌کنیم.

**مثال:** در مدل تخفیف کلی (تخفیف برای کلیه واحدهای خریداری شده) اطلاعات زیر در دسترس است.

تابع هزینه سالیانه	$Q_w^j$	مقدار سفارش
$K_0(Q)$	۱۳۵۰	$0 < Q < 1000$
$K_1(Q)$	۱۸۱۰	$1000 \leq Q < 2000$
$K_2(Q)$	۲۲۱۰	$2000 \leq Q < 3000$
$K_3(Q)$	۳۴۸۰	$3000 \leq Q < 4000$
$K_4(Q)$	۳۹۵۰	$4000 \leq Q < \infty$

$$Q_w^j = \sqrt{\frac{2DA}{h_j}}$$

.....

.....

.....

.....

**مثال:** کدام عبارت، صحیح است؟ (کنکور ۸۸)

- ۱) مقدار سفارش اقتصادی با مقایسه  $K_2(2210)$  ,  $K_3(3000)$  ,  $K_4(3950)$  حاصل می‌شود.
- ۲) مقدار سفارش اقتصادی با مقایسه  $K_3(3480)$  ,  $K_4(4000)$  حاصل می‌شود.
- ۳) مقدار سفارش اقتصادی با مقایسه  $K_3(3480)$  ,  $K_3(3950)$  حاصل می‌شود.
- ۴) مقدار سفارش اقتصادی با مقایسه اطلاعات فوق قابل حصول نیست.

**حل :** گزینه ۲ درست است.

$$Q_{\omega_j} = \sqrt{\frac{2AD}{h_j}}$$

افزایش  $Q_{\omega_j}$  با افزایش مقدار سفارش نشاندهنده این نکته است  $h_j$  با افزایش مقدار سفارش کاهش یافته. بنابراین مقدار سفارش اقتصادی با مقایسه هزینه نقطه ویلسونی که در محدوده است. و نقاط شکست بعد از آن یعنی 3480 و 4000 .

**مثال:** در مدل تخفیف کلی (تخفیف برای کلیه داده‌های خریداری شده) در صورتی که مقدار سفارش اقتصادی ناحیه‌ای منطبق بر نقطه بهینه تابع هزینه آن ناحیه در فاصله صفر و بی نهایت باشد، آن گاه کدام عبارت، صحیح است؟ (کنکور ۸۸)

- ۱) تعیین محدوده مقدار سفارش اقتصادی بستگی به پارامترهای دیگر مسئله دارد.
- ۲) مقدار سفارش اقتصادی هرگز نمی‌تواند از این مقدار کمتر باشد.
- ۳) مقدار سفارش اقتصادی صد در صد از این مقدار بیش‌تر است.
- ۴) نتیجه خاصی از اطلاعات فوق حاصل نمی‌شود.

**حل :** گزینه ۲ درست است.

**نکته :** مقدار سفارش اقتصادی در تخفیف کلی (قیمت با افزایش مقدار سفارش کالا می‌یابد) از مقایسه‌ی هزینه نقطه ویلسونی و نقاط شکست سمت راست آن به دست می‌آید پس از نقطه‌ی ویلسون نمی‌توان کمتر باشد.

## ۶-۲ - مدل تخفیف نموی یا افزایشی

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که تخفیف از نوع نموی وجود دارد. هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه ( $Q^*$ ) و نقطه سفارش بهینه با کمینه کردن هزینه‌هاست. همان‌طور که ذکر شد تابع کل هزینه سالیانه در مدل‌های تخفیف برای هر محدوده متفاوت است و در مدل تخفیف نموی به صورت زیر است.

$$k_j(Q) = \frac{DA}{Q} + h_j \frac{Q}{2} + \bar{C}D, \quad h_j = i\bar{C} \quad q_j \leq Q < q_{j+1}$$

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

که در آن  $\bar{C} = \frac{R(Q)}{Q}$  متوسط قیمت خرید است و

$$R(Q) = \sum_{i=1}^j C_{i-1}(q_i - q_{i-1}) + C_j(Q - q_j)$$

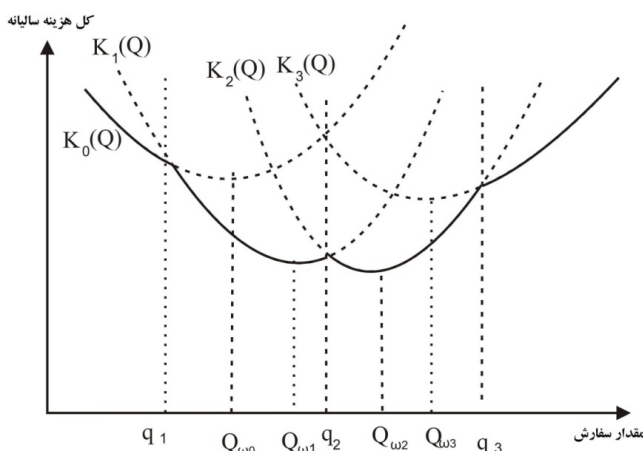
برابر کل هزینه خرید  $Q$  کالا است. به همین صورت می‌توان کل هزینه خرید تا نقطه شکست  $q_j$  را به صورت  $R(q_j)$  را به صورت  $R(q_j)$  و با استفاده از رابطه بالا محاسبه کرد. بنابراین رابطه کل هزینه سالیانه برای محدوده  $J$  ام به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$K_j(Q) = \frac{D}{Q}(A + R(q_j) - C_j q_j) + iC_j \frac{Q}{2} + C_j D + \frac{iR(q_j)}{2} - \frac{iC_j q_j}{2}$$

بر اساس این تابع و با مشتق‌گیری از آن مقدار بهینه هر محدوده به صورت زیر خواهد بود:

$$Q_{\omega_j} = \sqrt{\frac{2D(A + R(q_j) - C_j q_j)}{iC_j}}$$

نمودار هزینه کل سالیانه مدل تخفیف‌نموی مانند نمودار هزینه خرید آن پیوسته است و به صورت شکل زیر خواهد بود.



**نکته:** ثابت می‌گردد که نقاط تخفیف هیچ‌گاه نمی‌توانند نقطه بهینه باشند بنابراین نقطه بهینه از بین  $Q_{\omega_j}$  هایی خواهد بود که در محدوده خود قرار گیرند.

بر این اساس الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود:

برای تمامی محدوده‌ها  $Q_{\omega_j}$  را به دست می‌آوریم. هر محدوده‌ای که  $Q_{\omega_j}$  آن داخل محدوده تخفیف افتد،  $Q_j^* = Q_{\omega_j}$  می‌گردد. سایر محدوده‌ها نقاط بهینه قابل قبول ندارند. نقاط بهینه قابل قبول به دست آمده را در تابع هزینه مرتبط گذاشته و  $k_j(Q_j^*)$  را به دست می‌آوریم. کمترین هزینه، هزینه بهینه سالیانه و  $Q_j^*$  متناظر با آن، نقطه بهینه است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

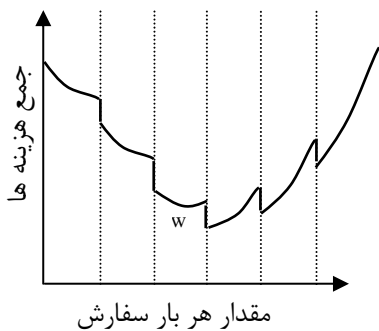
**مثال:** در یک مدل تخفیف نموی (Incremental Discount) اگر مقدار خرید مساوی و یا کمتر از  $q_1$  باشد هزینه هر واحد  $C_0$  و اگر مقدار خرید بیشتر از  $q_1$  باشد، هزینه هر واحد برای واحدهای اضافه بر  $q_1$  برابر  $C_1$  ( $C_1 < C_0$ ) است. مقدار بهینه سفارش را با  $Q_0$  نشان دهید. در این صورت به نظر شما کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

(۱)  $Q_0$  همیشه کوچکتر از  $q_1$  است.  
 (۲)  $Q_0$  بزرگتر از  $q_1$  است.  
 (۳)  $Q_0$  نمی‌تواند برابر  $q_1$  باشد.  
 (۴) برای تعیین  $Q_0$  باید هزینه سیستم در نقطه  $q_1$  محاسبه شود.

**حل:** گزینه ۳ درست است.

همان‌طور که ذکر شد نقطه بهینه تخفیف نموی ( $Q_0$ ) نمی‌تواند برابر نقاط تخفیف (مانند  $q_1$ ) گردد.

**مثال:** در صورتی که فروشنده حاضر باشد با زیاد شدن مقدار هر بار سفارش، تخفیفی در قیمت واحد کالا قائل شود، آنگاه منحنی جمع هزینه موجودی‌ها در سال (شامل هزینه سفارشات + هزینه نگهداری + هزینه خرید) مطابق نمودار خواهد بود. نقطه  $W$  را نقطه ویلسون می‌نامیم. برای یافتن مقدار اقتصادی هر بار سفارش (EOQ) باید مقدار جمع هزینه موجودی‌ها را در نقاط زیر حساب نموده و با یکدیگر مقایسه نمود:



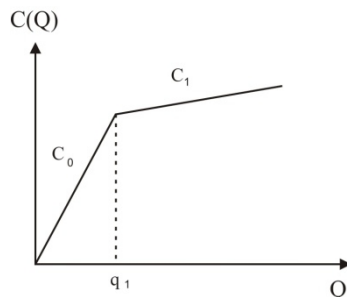
**مثال:**

- (۱) فقط نقطه ویلسون
- (۲) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت چپ نقطه ویلسون
- (۳) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون
- (۴) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست و چپ نقطه ویلسون

**حل:** گزینه ۳ درست است.

از نمودار مشخص است که تخفیف به‌صورت کلی می‌باشد. بنابراین همان‌طور که ذکر شد نقطه بهینه یکی از نقاط ویلسون و یا نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون است.

**مثال:** در یک مسأله تخفیف اگر مقدار هر بار خرید برابر  $Q$  باشد، آنگاه مقدار هزینه مواد در هر بار  $C(Q)$  در شکل رسم شده است. اگر قیمت هر واحد مواد را با  $C$  نمایش دهیم، و مقدار EOQ را به ازای  $C = C_0$  با  $Q_{\omega}(0)$  و به ازای  $C = C_1$  با  $Q_{\omega}(1)$  نشان دهیم. فرض کنید  $q_1 < Q_{\omega}(0)$  و نیز  $q_1 < Q_{\omega}(1)$  است. با توجه به این اطلاعات کدام عبارت صحیح است؟



**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

- (۱) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه به هیچ‌گونه محاسبه هزینه سالیانه نیاز نیست.  
 (۲) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه  $q_1$  محاسبه شود.  
 (۳) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه  $Q_{\omega}(1)$  محاسبه شود.  
 (۴) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه  $Q_{\omega}(0)$  محاسبه شود.

حل : گزینه ۱ درست است.

شکل نمودار هزینه خرید بیان‌گر این مطلب است که تخفیف از نوع نمودی است. بنابراین نقاط بهینه، نقاط ویلسونی هستند که در محدوده تخفیف خود قرار گیرند.  $q_1 < Q_{\omega}(0)$  است بنابراین در محدوده تخفیف خود  $(Q < q_1)$  قرار ندارد.  $q_1 < Q_{\omega}(1)$  است یعنی در محدوده تخفیف خود  $(Q > q_1)$  قرار دارد و از آنجا که تنها  $Q_{\omega}(1)$  در محدوده تخفیف خود قرار دارد نیازی به محاسبه هزینه سالیانه‌ای نیست و  $Q_{\omega}(1)$  نقطه بهینه مدل است.

**مثال:** شرط لازم برای این که مقدار اقتصادی سفارش در روش تخفیف افزایشی و تخفیف کلی با نقاط تخفیف و قیمت‌های مشابه و هزینه‌های سفارش دهی و نگهداری یکسان، برابر باشد با ؟ (با فرض این که هزینه نگهداری مستقل از قیمت است). (کنکور ۸۷)

$$\sqrt{\frac{2D(A+R(q_n)-c_n q_n)}{h}} > q_n \quad (۲) \qquad \sqrt{\frac{2DA}{h}} > q_n \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{2DA}{h}} > \sqrt{\frac{2D(A+R(q_n)-c_n q_n)}{h}} \quad (۴) \qquad \sqrt{\frac{2DA}{h}} < q_1 \quad (۳)$$

حل : گزینه ۳ درست است

**نکته:** نقطه بهینه مدل تخفیف نمودی نمی‌تواند برابر نقاط تخفیف باشد بنابراین در صورتی که بخواهیم در شرایط یکسان نقطه بهینه تخفیف نمودی و کلی برابر باشند باید نقاط ویلسون دو تخفیف باهم برابر باشند.

با توجه به نکته

$$\sqrt{\frac{2D(A+R(q_j)-C_j q_j)}{h}} = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$$

$$R(q_j) = C_j q_j$$

این حالت در صورتی امکان پذیر است که :

این تساوی فقط در محدوده‌ی اول برقرار است.  $R(q_0) = C_0 q_0 = 0$  بنابراین نقطه‌ی ویلسون باید دل محدوده‌ی اول قرار گیرد.

$$\sqrt{\frac{2AD}{h}} < q_1$$

یادداشت:

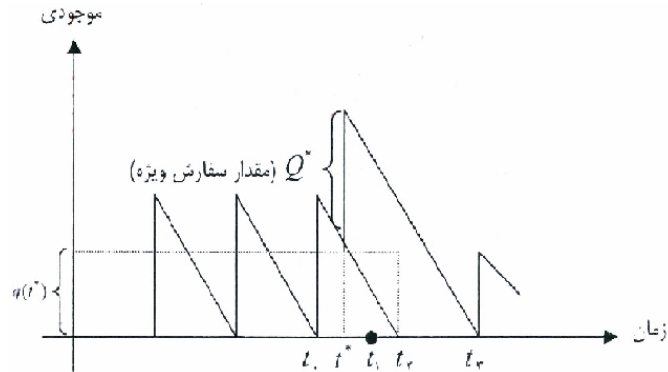
.....

.....

.....

.....

## ۶-۳- مدل افزایش یا کاهش قیمت:



در این مدل به بررسی صرفه‌ی اقتصادی در شرایطی که افزایش یا کاهش قیمت ناگهانی داریم می‌پردازیم: اگر در زمان  $t_1$  کاهش قیمت داشتیم:

۱- اگر قبل از  $t_0$  متوجه این کاهش شویم به اندازه‌ای سفارش می‌دهیم تا در  $t_1$  موجودی برابر صفر گردد.

۲- اگر بعد از  $t_0$  می‌فهمیدیم هیچ کار خاصی انجام نمی‌گیرد.

**نکته:** اگر هزینه نگهداری وابسته به قیمت باشد مقادیر سفارشات بعدی طبق رابطه‌ی  $Q = \sqrt{\frac{2AD}{ic}}$  افزایش می‌یابد ولی اگر

هزینه‌ی نگهداری وابسته به قیمت نباشد مقدار سفارشات بعدی تغییری نمی‌کند.

اگر در زمان  $t_1$  افزایش قیمت داشتیم:

اگر قبل از  $t_0$  متوجه افزایش قیمت شویم با توجه به هزینه‌ی نگهداری و سفارشی‌دهی تصمیم می‌گیریم.

اگر بعد از  $t_0$  متوجه افزایش شویم بعد از  $t_0$  لحظه‌ای قبل از  $t_1$  سفارش می‌دهیم که همان سفارش ویژه نامیده می‌شود (البته اگر صرفه اقتصادی دارد یعنی اگر اختلاف هزینه در اثر خرید بیشتر از هزینه سفارشی‌دهی باشد)

**مثال:** در یک مدل سفارش اقتصادی (EOQ) بلافاصله پس از آن که آخرین سفارش را داده‌ایم مطلع می‌شویم که قیمت کالا قرار است تا قبل از سفارش بعدی افزایش یابد در این صورت: (کنکور ۸۷)

۱) مقدار سفارش اقتصادی لزوماً تغییر خواهد کرد اما در مورد سفارش ویژه باید تصمیم‌گیری نمود.

۲) مقدار سفارش اقتصادی لزوماً تغییر خواهد کرد و حتماً قبل از صدور سفارش بعدی در مورد انجام سفارش ویژه اقدام شود.

۳) اگر هزینه‌های نگهداری مستقل از قیمت کالا باشد، مقدار سفارش اقتصادی تغییر نمی‌کند ولی در مورد صدور سفارش ویژه باید تصمیم‌گیری شود.

۴) اگر هزینه‌های نگهداری وابسته به قسمت کالا باشد مقدار سفارش اقتصادی تغییر خواهد کرد و حتماً قبل از سفارش بعدی باید در مورد سفارش ویژه اقدام نمود.

**حل:** گزینه ۳ درست است.  
**یادداشت:**

**نکته:** در مدل افزایش قیمت، در صورتی که هزینه‌های نگهداری مستقل از قیمت باشد، یا تغییر قیمت، هزینه نگهداری تغییر نخواهد کرد... و مقدار سفارش بهینه پس از افزایش قیمت، با این مقدار قبل از آن، تفاوتی نخواهد داشت. ولی در مورد سفارش ویژه پس از... محاسبه‌ی رابطه هزینه‌ای باید تصمیم‌گیری شود...



**مثال:** در مؤسسه‌ای هزینه‌های نگهداری کالا مستقل از قیمت خرید واحد محصول است. لحظه‌ای قبل از انجام سفارش متوجه می‌شویم که قیمت کالا به میزان ده درصد تا 2 ساعت دیگر افزایش می‌یابد، به نظر شما برای اطلاع از افزایش قیمت برای این سفارش تصمیم خاصی (سفارش خاصی داده شود) باید گرفته شود؟ (کنکور ۸۸)

۱) با تجزیه و تحلیل هزینه‌های سیستم موجودی در خصوص دادن سفارش خاص یا عدم انجام سفارش خاص تصمیم گرفته می‌شود.

۲) با توجه به ناچیز بودن افزایش نسبت و عدم وابستگی هزینه نگهداری به قیمت تصمیم خاص نباید گرفته شود.

۳) حتماً قبل از افزایش قیمت‌ها سفارش خاصی در حجم بالا داده می‌شود.

۴) سفارش خاص انجام می‌گیرد و مقدار سفارش ده درصد بیش‌تر از مقدار فعلی است.

**حل :** گزینه ۱ درست است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

## ۷- مدل احتمالی یک دوره‌ای

این مدل تنها برای یک دوره بوده و به مدل درخت کریسمس یا پسرک روزنامه فروش نیز معروف است. فرضیات مدل:

- ۱- تقاضا احتمالی و ساکن است.
- ۲- سفارش صرفاً یکبار در ابتدای دوره به موجودی اضافه می‌گردد.
- ۳- برنامه‌ریزی صرفاً برای یک دوره انجام می‌پذیرد و موجودی باقیمانده در انتهای دوره حراج شده یا از بین می‌رود.
- ۴- کمبود جایز است.
- ۵- هزینه نگهداری صرفاً برای واحدهای باقی‌مانده در انتهای دوره (که حراج می‌شوند یا از بین می‌روند) محاسبه می‌گردد.
- ۶- در ابتدای دوره موجودی برابر با  $I$  به عنوان موجودی ابتدای دوره وجود دارد.

پارامترهای مدل:

$D$ : متغیر تصادفی تقاضا در یک دوره

$f_D(x)$ : تابع چگالی تقاضا در مدت زمان یک دوره

$F_D(x)$ : تابع توزیع تجمعی تقاضا در مدت زمان یک دوره

$C$ : قیمت خرید هر واحد

$V$ : قیمت فروش هر واحد

$\pi$ : هزینه کمبود هر واحد

$L$ : قیمت حراج هر واحد

$A$ : هزینه هر بار سفارش

$h$ : هزینه نگهداری هر واحد در مدت زمان یک دوره

$H$ : مجموع هزینه‌های هر واحد باقیمانده در انتهای دوره

$L - H$ : هزینه انتقال جهت حراج یا فروش برحسب هر واحد  $H = h +$

$I$ : موجودی ابتدای دوره (یک لحظه قبل از سفارش)

متغیرهای مدل:

$R^*$ : موجودی بهینه ابتدای دوره (یک لحظه بعد از سفارش)

$Q^*$ : مقدار سفارش بهینه

$$Q^* = R^* - I$$

همان‌طور که در فرضیات مدل ذکر شد موجودی به دوره‌ی بعد منتقل نمی‌گردد و در آخر دوره باید تصمیم بگیریم که آن را از بین ببریم یا با قیمتی کمتر از  $C$  آن را حراج کنیم.

مدل‌های احتمالی تک دوره‌ای می‌توانند با تقاضای پیوسته و یا گسسته باشند و همین‌طور هزینه هر بار سفارش دهی ( $A$ ) ممکن است صفر باشد بنابراین مدل‌های احتمالی تک دوره‌ای به 4 نوع تقسیم می‌گردند:

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

- تقاضا پیوسته و  $A = 0$

- تقاضا پیوسته و  $A \neq 0$

- تقاضا گسسته و  $A = 0$

- تقاضا گسسته و  $A \neq 0$

در اینجا مدل‌هایی که در آن  $A = 0$  را بررسی خواهیم کرد، روش حل مدل‌هایی که در آن  $A \neq 0$  است به صورت سعی و خطاست الگوریتم حل مدل در حالتی که تقاضا پیوسته و  $A = 0$  باشد به صورت زیر است:  
مقدار  $R$  را از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$F_D(R^*) = \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

بدین معنی که به دنبال نقطه‌ای می‌گردیم که تابع توزیع تجمعی در آن نقطه برابر  $\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$  شود، آن نقطه برابر  $R^*$  می‌باشد.

- اگر  $R^* \leq I$  باشد نیازی به سفارش نمی‌باشد.

- اگر  $R^* > I$  باشد باید به میزان  $Q^* = R^* - I$  سفارش دهیم.

در حالت گسسته ممکن است تابع توزیع تجمعی در هیچ نقطه‌ای دقیقاً برابر  $\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$  نشود بنابراین برای حالتی که تقاضا گسسته و  $A = 0$  است به صورت زیر عمل می‌کنیم.

در حالت گسسته، کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان یک دوره که تابع توزیع تجمعی تقاضا را مساوی و یا بزرگتر می‌کند را به عنوان  $R^*$  انتخاب می‌کنیم، یعنی کوچک‌ترین مقداری که به ازای آن

$$F_D(R^*) \geq \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

- اگر  $R^* \leq I$  باشد نیازی به سفارش نمی‌باشد.

- اگر  $R^* > I$  باشد به میزان  $Q^* = R^* - I$  سفارش می‌دهیم.

**تذکر:** متوسط هزینه نگهداری در دوره، متوسط هزینه کمبود در دوره، متوسط موجودی باقیمانده و متوسط مقدار کمبود از روابط زیر به دست می‌آید:

تقاضا پیوسته:  $\text{متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره} = \int_0^R (R - x) f_D(x) dx$

تقاضا گسسته:  $\text{متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره} = \sum_{x=0}^R (R - x) p\{D = x\}$

(متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره)  $= h$  متوسط هزینه نگهداری برای واحدهای باقیمانده در انتهای دوره

تقاضا پیوسته:  $\text{متوسط تعداد کمبود در یک دوره} = \int_R^\infty (x - R) f_D(x) dx$

تقاضا گسسته:  $\text{متوسط تعداد کمبود در یک دوره} = \sum_{x=R}^\infty (x - R) p\{D = x\}$

(متوسط تعداد کمبود در یک دوره)  $= \pi$  متوسط هزینه کمبود در یک دوره

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

**نکته:** میانگین کمبود در طی دوره به صورت  $\int_R^\infty (X-R)f_D(X)dX$  خواهد بود، در صورتی که تقاضا دارای توزیع نرمال

باشد، میانگین کمبود را می‌توان از رابطه‌ی  $\sigma \cdot G_U(K)$  محاسبه کرد.  $G_U(K) = \int \frac{(u-K)}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{u^2}{2}} du$  انتگرال ضرر

$$U = \frac{M-\mu}{\sigma}, \quad K = \frac{R-\mu}{\sigma}$$

نرمال می‌گویند و از جداول استخراج می‌شود

**مثال:** در مدل یک دوره‌ای احتمالی. (کنکور ۸۷)

- ۱) اگر قیمت فروش کالا کاهش پیدا کند مقدار اقتصادی تهیه‌ی کالا در ابتدای دوره کاهش پیدا می‌کند.
- ۲) اگر قیمت خرید کالا افزایش پیدا کند مقدار اقتصادی تهیه‌ی کالا در ابتدای دوره افزایش پیدا می‌کند.
- ۳) اگر هزینه مواجهه با کسری افزایش پیدا کند مقدار اقتصادی تهیه‌ی کالا در ابتدای دوره کاهش پیدا می‌کند.
- ۴) اگر هزینه کالای باقیمانده در انتهای دوره کاهش پیدا کند مقدار اقتصادی تهیه کالا در ابتدای دوره کاهش پیدا می‌کند.

**حل:** گزینه ۱ درست است.

**نکته:** در مدل تک دوره‌ای احتمالی نقطه بهینه  $R$  نقطه‌ای است که در رابطه  $F_D(R^*) = \frac{V+\pi-C}{V+\pi+H}$  روبرو صدق کند.

**مثال:** در مدل یک دوره‌ای تصادفی که هزینه سفارش دهی قابل ملاحظه است اگر  $R_0$  مقدار بهینه کالا پس از سفارش بدون در نظر گرفتن هزینه سفارش دهی حالت مرسوم باشد. مقدار بهینه سفارش با در نظر گرفته هزینه سفارش دهی؛ .....

(کنکور ۸۶)

- ۱) اگر  $R_0$  بیشتر از موجود در دست باشد نسبت به حالت مرسوم تغییر نخواهد کرد.
- ۲) اگر  $R_0$  کمتر از موجودی در دست باشد بیشتر از حالت مرسوم نخواهد بود.
- ۳) در هر صورت احتمال مواجه شدن با کسری وقتی هزینه سفارش دهی قابل ملاحظه است بزرگتر یا مساوی حالتی است که این هزینه لحاظ نمی‌شود.
- ۴) موارد ۲ و ۳ صحیح است.

**حل:** گزینه ۴ درست است.

**نکته:** در صورتی که  $R_0$  کمتر از موجودی در دست باشد، در هر دو صورت سفارشی صورت نمی‌گیرد. ولی اگر  $R_0$  از موجودی در دست بیشتر باشد، مقدار بهینه سفارش با در نظر گرفتن هزینه سفارش دهی و بدون در نظر گرفتن آن ممکن است متفاوت باشد، از طرفی با توجه به هزینه سفارشی ممکن است مقداری کمتر از حالت موسوم سفارش دهیم و در نتیجه احتمال مواجه شدن با کسری بیشتر از حالت موسوم خواهد بود.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

**مثال:** در یک مدل کنترل موجودی یک دوره‌ای احتمالی، پارامترهای زیر برآورد شده‌اند. مقدار بهینه تهیه کالا در اول دوره و کسری مورد انتظار در یک دوره چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۵)

قیمت خرید: ده واحد پول برای هر واحد کالا

قیمت فروش: پانزده واحد پول برای هر واحد کالا

هزینه مواجهه با کسری: ۵ واحد پول برای هر واحد کسری

هزینه هر واحد کالایی که فروش نرود: ۵ واحد پول

تقاضا دارای توزیع یکنواخت در بازه صفر تا ۱۰۰ واحد کالا

(۱) مقدار تهیه کالا ۲۰ کسری مورد انتظار ۹۰ واحد کالا

(۳) مقدار تهیه کالا ۲۰ و کسری مورد انتظار ۱۸ واحد کالا

(۲) مقدار تیه کالا ۷۰ و کسری مورد انتظار ۳۰ واحد کالا

(۴) مقدار تهیه کالا ۳۵ و کسری مورد انتظار ۵۰ واحد کالا

حل: گزینه ۳ درست است.

$$D \sim V(0, 100)$$

$$F_D(R) = \frac{V + \pi - V}{V + \pi + H} = \frac{15 + 5 - 10}{15 + 5 + 5} = \frac{10}{25} = 0.4 \Rightarrow R = 40$$

$$\bar{b}(r) = \int_R^{100} (X - R) f_P(X) dX = \int_{40}^{100} (X - 40) \times \frac{1}{100} dX = \left( \frac{X^2}{200} - \frac{40X}{100} \right) \Big|_{40}^{100}$$

$$= 18$$

**مثال:** مصرف محصولی در یک مدل یک دوره‌ای متغیر تصادفی با تابع چگالی  $f_D(x)$  است. اگر سطح موجودی بلافاصله پس از انجام سفارش برابر  $R$  تعیین شده باشد و چنانچه در طی دوره کمبود رخ دهد مجبور به تأمین هزینه بیشتری نسبت به اول دوره باشیم آنگاه میانگین تعداد واحدهایی که برای هر دوره مصرف می‌شود چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

$$E(D) = \int_R^{\infty} (R - x) f_D(x) dx \quad (۱)$$

$$E(D) = \int_R^{\infty} (x - R) f_D(x) dx \quad (۴)$$

حل: گزینه ۱ درست است.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

**مثال:** در مدل یک دوره‌ای وقتی که تقاضا در طی دوره دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و انحراف معیار  $\sigma$  است، اگر سطح

موجودی یک لحظه پس از انجام سفارش (R) را برابر میانگین ( $\mu$ ) انتخاب کنیم آنگاه (کنکور ۸۶)

(۱) میانگین کمبود در طی دوره برابر است با  $\mu$

(۲) میانگین کمبود در طی دوره به انحراف معیار و انتگرال ضرر نرمال دارد.

(۳) میانگین کمبود در طی دوره برابر است با صفر

(۴) در مورد میانگین کمبود هیچ اظهار نظر مشخصی نمی‌توان ارائه کرد.

**حل:** گزینه ۲ درست است.

**مثال:** در یک مدل یک دوره‌ای تقاضا متغیری تصادفی با توزیع احتمال طبق جدول زیر است مدیریت سطح موجودی پس از انجام

سفارش را برابر 30 واحد در نظر گرفته است. اگر هزینه نگهداری هر واحد باقیمانده در انتهای دوره به شرح زیر باشد.

$$\text{هزینه نگهداری} = \begin{cases} \text{مقدار باقیمانده بیشتر یا مساوی 10 واحد باشد} & \text{تومان 50} \\ \text{مقدار باقیمانده کمتر یا مساوی 10 واحد باشد} & \text{تومان 100} \end{cases}$$

مقدار باقیمانده کمتر یا مساوی 10 واحد باشد.

میانگین هزینه نگهداری در یک دوره چقدر است؟ (کنکور ۸۶)

X تقاضا	10	20	30	40	50
P(x) احتمال تقاضا	0.05	0.3	0.3	0.3	0.05

(۴) 400 تومان

(۳) 350 تومان

(۲) 300 تومان

(۱) 200 تومان

**حل:** گزینه ۳ درست است.

$$\text{میانگین هزینه نگهداری در یک دوره} = 0.05 \times 50 \times (30 - 10) + 0.3 \times 100 \times (30 - 20) = 350$$

**مثال:** تقاضا باری محصولی در فصل پاییز (یک دوره سه ماهه) متغیری تصادفی است که توزیع آن یکنواخت در فاصله (0,100)

است یعنی،  $f(x) = \frac{1}{100}$  و  $0 \leq x \leq 100$ . این محصول قرار است فقط برای یک دوره (فصل پاییز) و در ابتدای همان دوره

تولید شود. قیمت فروش هر واحد این محصول 100 تومان است و واحدهای باقیمانده در انتهای دوره با قیمت هر واحد 13

تومان حراج می‌شوند، مقدار تولیدی در ابتدای دوره 80 واحد انتخاب شده است در این صورت میانگین درآمد حاصل از حراج

واحدهای باقیمانده در انتهای دوره برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟ (کنکور ۸۷)

(۴) 526 تومان

(۳) 446 تومان

(۲) 416 تومان

(۱) 286 تومان

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

حل : گزینه ۲ درست است.

$$D \sim U(0,100)$$

$$V = 100, L = 13, Q = 80, I = 0$$

$$R = 80$$

$$\text{میانگین درآمد حاصل از حراج واحدهای باقیمانده} = L \times \int_0^R (R - X) f(x) dx$$

$$= 13 \int_0^{80} (80 - X) \frac{1}{100} dx = 13 \times 32 = 416$$

**مثال:** در مدل یک دوره‌ی تقاضا برای محصول از یک تابع توزیع در محدوده‌ی (1000, 8000) با میانگین 2000 واحد و انحراف معیار 100 واحد می‌باشد. قیمت خرید هر واحد محصول در ابتدای دوره 200 تومان و هزینه نگهداری هر واحد موجودی (سرمایه و شرایط خاص و ...) در طی دوره 250 تومان است. هزینه کمبود هر واحد موجودی 3 تومان و قیمت حراج هر واحد محصول 500 تومان و قیمت فروش هر واحد محصول در طی دوره 900 تومان است. به نظر شما سطح بهینه موجودی

یک لحظه پس از انجام سفارش،  $R^*$ ، چقدر است؟ (کنکور ۸۸)

$$R^* = 2000 \quad (۲)$$

$$R^* = 1000 \quad (۱)$$

$$R^* = 8000 \quad (۴)$$

$$R^* = 2000 + 4(100) = 2400 \quad (۳)$$

حل : گزینه ۴ درست است.

$$C = 200$$

$$h = 250$$

$$\pi = 3$$

$$L = 500$$

$$V = 900$$

$$H = h - L = 250 - 500 = -250$$

$$F_D(R^*) = \frac{V + \pi + C}{V + \pi + H} = \frac{900 + 3 - 200}{900 + 3 - 250} > 1$$

$$R^* = 8000$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

**مثال:** فروشنده‌ای کالایی را با قیمت 5 واحد پول می‌خرد و چنانچه با کمبود مواجه می‌شود، هزینه‌ای معادل 8 واحد برای خودش منظور می‌دارد. و چنانچه جنس اضافه آید، هزینه نگهداری 1 واحد برای هر واحد کالا منظور می‌دارد. تقاضا برای کالا به صورت یکنواخت بین صفر و سی توزیع شده است، اگر در ابتدای دوره 3 واحد کالا موجود باشد، چند واحد کالا باید خریداری شود؟ (کنکور ۸۹)

13 (۴)

7 (۳)

10 (۲)

3 (۱)

**حل :** گزینه ۳ درست است.

$$C=5$$

$$\pi=8$$

$$h=1$$

$$I_0=3$$

$$D \sim U(0,30)$$

$$F_D(R^*) \geq \frac{V+\pi-C}{V+\pi+H}$$

$$\frac{R-0}{30} = \frac{1}{3}$$

$$F_D(R^*) \geq \frac{8-5}{8+1} = \frac{1}{3}$$

$$R=10$$

$$Q^* = R^* - I_0 = 10 - 3 = 7$$

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....



## ۸- خط‌مشی‌های مرور سیستم موجودی / خط‌مشی‌های سفارش دهی

در خط‌مشی‌های سیستم موجودی چگونگی کسب اطلاع در موجودی و هم‌چنین نوع و نحوه سفارش‌دهی مشخص می‌گردد. دو نوع خط‌مشی اصلی وجود دارد:

- خط‌مشی مرور دائم

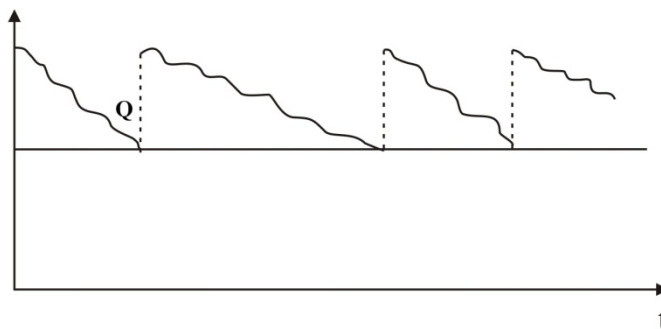
- خط‌مشی مرور دوره‌ای

### ۸-۱ - خط‌مشی مرور دائم

در این خط‌مشی وضعیت موجودی در هر لحظه از زمان بررسی می‌گردد. به محض آنکه مقدار موجودی برابر یا کمتر از نقطه سفارش ( $r$ ) شود، به اندازه ثابت  $Q$  سفارش می‌دهیم.

حالت معروف این خط‌مشی FOS،  $(r, Q)$ ، نقطه سفارش، کنترل موجودی مقداری و مقدار سفارش ثابت نامیده می‌شود. در این حالت وضعیت موقعیت موجودی در هر لحظه مرور می‌شود، به محض اینکه به مقدار نقطه سفارش ( $r$ ) رسید به اندازه ثابت  $Q$  سفارش می‌دهیم و این کار به طور مرتب تکرار می‌شود، در این خط‌مشی فاصله بین دو سفارش متوالی لزوماً یکسان نیست. نمودار موقعیت موجودی این خط‌مشی می‌تواند به صورت زیر باشد:

موقعیت موجودی



### ۸-۲ - خط‌مشی مرور دوره‌ای

در این خط‌مشی در فواصل زمانی مشخص و یکسان موقعیت موجودی مرور می‌گردد. حالت معروف این خط‌مشی FOI،  $(R, T)$ ، سقف موجودی و فاصله سفارش ثابت نامیده می‌شود. در این حالت در زمان‌های  $t_1$  و  $t_2$  و  $t_3$  ... که فاصله‌ای برابر  $T$  دارند، موقعیت موجودی مرور می‌گردد و تا سقف موجودی ( $R$ ) سفارش داده می‌شود. در این خط‌مشی مقدار سفارش لزوماً یکسان نیست.

یادداشت:

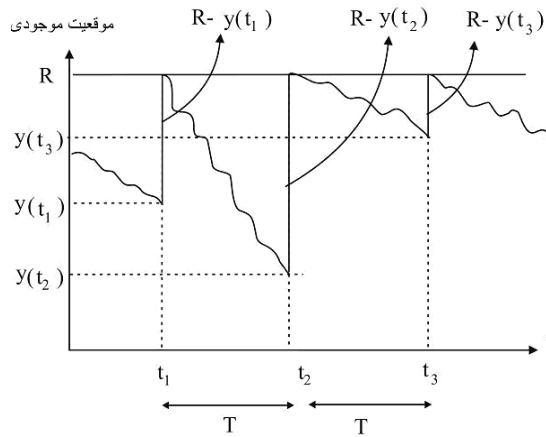
.....

.....

.....

.....

نمودار موقعیت موجودی این خط مشی می تواند به صورت زیر باشد:

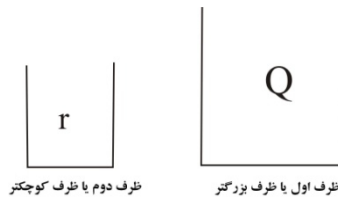


### ۳-۸- مقایسه بین FOS و FOI

- ۱- احتمال مواجهه با کمبود به علت مرور دائم از FOS از FOI کمتر است بنابراین ذخیره اطمینان (SS) کمتری دارد.
- ۲- هم گروه کردن اقلام سفارش (سفارش هم زمان) در FOI امکان پذیر است اما در FOS امکان پذیر نیست.
- ۳- هزینه های حمل و نقل سفارش در FOI به علت هم گروه کردن سفارش کمتر از FOS است. لذا فروشنده بیشتر تمایل به خط مشی FOI برای خریدار دارد.
- ۴- هزینه های مرور سیستم موجودی که جزو هزینه های سفارش دهی است در FOI نسبت به FOS کمتر است.

### ۸-۴ - خط مشی سفارش دهی دو ظرفی، دو قفسه ای، مینیمم ماکزیمم، Two - Bin

این خط مشی که حالت کاربردی از خط مشی FOS است (مرور دائم) انبار را به دو قسمت ظرف بزرگتر یا ظرف اول (Q) و ظرف کوچکتر یا ظرف دوم (r) تقسیم می کند. ابتدا از ظرف بزرگتر مصرف می کنیم و به محض اینکه بخواهیم از ظرف کوچکتر (r) مصرف کنیم سفارش می دهیم و تا زمان رسیدن سفارش از ظرف کوچکتر مصرف می کنیم. بعد از رسیدن سفارش ابتدا ظرف کوچکتر را تکمیل کرده و هر چه باقی بماند در ظرف بزرگتر خواهیم ریخت و دوباره مصرف را شروع می کنیم.



یادداشت:

.....

.....

.....

.....

**مثال:** سیستم معروف موجودی دو قفسه‌ای Two Bin System

- (۱) حالت خاصی از سیستم موجودی مقدار سفارش ثابت محسوب می‌شود.
- (۲) جزو سیستم دوره ثابت محسوب می‌شود.
- (۳) ترکیبی از دو سیستم فوق است.
- (۴) جزء هیچ‌کدام از دو سیستم فوق نیست.

**حل:** گزینه ۱ درست است.

همان‌طور که ذکر گردیده سیستم Two Bin حالت خاصی از خط مشی FOS یا همان مقدار سفارش ثابت است.

**مثال:** در مورد سیستم در ظرفی (Two bin system) کدام عبارت درست است؟ (کنکور ۸۸)

- (۱) در این سیستم مقدار سفارش کمتر از نقطه سفارش است.
- (۲) این سیستم حالت خاصی از سیستم‌های مرور دائم است.
- (۳) این سیستم جزء یکی از سیستم‌های مرور دوره‌ای است.
- (۴) در این سیستم مقدار موجودی در دست همیشه برابر صفر است.

**حل:** گزینه ۲ درست است.

**نکته:** سیستم دو ظرفی حالت خاصی از سیستم‌های موجود دائم موجودی است

## ۸-۵ - سیستم پارامتریک $(T, r, R)$

در هر زمان مرور  $(T)$  اگر موجودی در دست و در راه بنام  $(I)$  در فاصله مابین  $r < I \leq R$  باشد اقدام به سفارش نمی‌کنیم و اگر  $I \leq r$  باشد به اندازه  $(S-I)$  سفارش می‌دهیم تا مقدار موجودی به سطح  $S$  برسد.

- ✓ در این سیستم ممکن است چند پرورد بگذرد و سفارش ندهیم.
- ✓ این سیستم برای کالاهای نوع  $B, C$  مناسب است.
- ✓ در این سیستم مقدار هر بار سفارش ممکن است تغییر کند و تقریباً برابر  $Q = S - r$  یا  $Q = S - I$  می‌باشد.
- ✓ این سیستم از نوع مرور موقت یا دوره‌ای است.
- ✓ اگر تقاضا تکی‌تکی باشد این سیستم به  $(S, Q)$  تبدیل می‌شود، زیرا می‌توان  $S = r + Q$  قرار داد. ( در حالت  $Q = I$  می‌باشد.)
- ✓ معمولاً اگر هزینه‌های ثبت و سفارش ناچیز باشد سیستم  $(r, Q)$  در غیر اینصورت  $(T, r, R)$  مناسب است.
- ✓ اگر  $T = 0$  باشد سیستم  $(Q, S)$  حاصل می‌شود.
- ✓ مشکل این سیستم محاسبه سه پارامتر فوق می‌باشد.

**مثال:** در یک سیستم انبار محض روش کنترل  $(Periodic Review (r, R, T))$  اعمال می‌گردد. اگر  $y_k$  سطح خالص انبار در **یادداشت:**

بازنگری  $k$ ام باشد، آنگاه مقدار سفارش در این بازنگری چقدر است؟ (کنکور ۸۹)

$$Q_k = \begin{cases} 0 & y_k \geq r \\ R - r & y_k < r \end{cases} \quad (۲) \qquad Q_k = \begin{cases} 0 & y_k \geq r \\ R - y_k & y_k < r \end{cases} \quad (۱)$$

$$Q_k = \begin{cases} 0 & y_k \geq 0 \\ R - y_k & y_k < 0 \end{cases} \quad (۴)$$

$$Q_k = \begin{cases} 0 & y_k > 0 \\ R & y_k \leq 0 \end{cases} \quad (۳)$$

حل : گزینه ۱ درست است.

اگر سطح خالص انبار از مقدار  $r$  کمتر باشد به اندازه‌ای سفارش می‌دهیم که به سقف موجودی یعنی  $R$  برسیم.

یعنی به اندازه‌ی  $R - y_k$  سفارش می‌دهیم پس :

$$Q_k = \begin{cases} 0 & y_k \geq r \\ R - y_k & y_k < r \end{cases}$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

## ۹- مدل های احتمالی

### ۹-۱- مدل احتمالی ساده با خط مشی سفارش دهی FOS و $(r, Q)$

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با تفاوت های زیر:

۱- تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲- کمبود جایز است.

۳- خط مشی سفارش دهی FOS است.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه  $(Q)$  و نقطه سفارش  $(r)$  با کمینه کردن هزینه هاست.

پارامترهای مدل:

$D$ : متغیر تصادفی تقاضا در سال

$\mu_D$ : میانگین تقاضا در سال

$\sigma_D$ : انحراف معیار تقاضا در سال

$D_L$ : متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل

$\sigma_{D_L}$ : انحراف معیار تقاضا در مدت زمان تحویل

$p$ : سطح خدمت، سطح اطمینان

متغیرهای مدل:

$Q$ : مقدار سفارش

$r$ : نقطه سفارش، حداقل موقعیت موجودی

$SS$ : موجودی اطمینان (ذخیره ایمنی): موجودی اطمینان در مدل های احتمالی جهت جواب گویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان

تحویل تعریف می گردد و مقدار آن در تعاملی بین کل هزینه های کمبود و نگهداری سالیانه تعیین می شود.

**نکته:** در صورتی که  $SS$  افزایش یابد، کل هزینه های نگهداری سالیانه افزایش و کل هزینه های کمبود سالیانه کاهش می یابد.

بدین اساس نقطه سفارش مجدد از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$r = \mu_{D_L} + SS$$

### تعریف سطح خدمت

سطح خدمت برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه نشویم یعنی احتمال اینکه تقاضا در مدت زمان تحویل کوچک تر

یا مساوی موجودی در زمان سفارش  $(r)$  باشد.

$$p\{D_L \leq r\} = \text{سطح خدمت} \Rightarrow F_{D_L}(r) = p$$

سطح ریسک یا سطح خطر برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه شویم:  $(1 - p)$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

## نحوه محاسبه سطح خدمت (p)

الف) توسط مدیر سیستم موجودی مشخص گردد.

ب) از روی مقادیر  $N_b$ ,  $T_b$  توسط رابطه زیر مشخص گردد.

$N_b$ : متوسط تعداد دوره‌های دارای کمبود در سال

$T_b$ : متوسط فاصله زمانی بین دو دوره کمبود متوالی یا فاصله انتظاری مواجه شدن با یک دوره دارای کمبود

$$1 - p = \frac{\text{متوسط تعداد دوره‌های دارای کمبود در سال}}{\text{متوسط تعداد دوره‌ها در سال}} = \frac{N_b}{\frac{\mu_D}{Q}} = N_b \times \frac{Q}{D}$$

در مدل‌های احتمالی گاه‌به‌گاه  $\mu_D$  از  $D$  استفاده می‌کنند.

$$T_b = \frac{1}{N_b}$$

## الگوریتم حل مدل احتمالی ساده FOS

برای حل مدل احتمالی ساده FOS دو روش وجود دارد:

(۱) با استفاده از مقادیر  $\pi$  و  $\hat{\pi}$ : در این روش تابع هزینه‌ها را نوشته و نسبت به  $Q$  و  $r$  مشتق می‌گیریم و روابط محاسبه  $Q$  و  $r$  به دست می‌آید.

(۲) با استفاده از مفهوم سطح خدمت که جایگزین پارامترهای  $\pi$  و  $\hat{\pi}$  می‌گردد. الگوریتم این روش به شرح ذیل است.

الف)  $Q^*$  از رابطه روبرو محاسبه می‌گردد. در این رابطه منظور از  $D$ ، میانگین توزیع تقاضا در سال یعنی  $\mu_D$  است.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}}$$

ب) مقدار سطح خدمت (p) از روش‌های عنوان شده به دست می‌آید.

$$1 - p = N_b \times \frac{Q}{D}$$

ج) مقدار نقطه سفارش ( $r$ ) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

اگر تقاضا پیوسته باشد مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل برابر با  $r$  می‌باشد که به ازای آن تابع توزیع تجمعی برابر با سطح خدمت (p) شود.

$$F_{D_L}(r) = p$$

اگر تقاضا گسسته باشد کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل که رابطه زیر را برقرار می‌کند برابر  $r$  می‌باشد.

$$F_{D_L}(r) \geq p$$

د) مقدار ذخیره اطمینان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$r = \mu_{D_L} + SS \Rightarrow SS = r - \mu_{D_L}$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

هـ) متوسط مقدار کمبود در دوره  $(\bar{b}(r))$ ، متوسط مقدار کمبود در سال  $(B(r))$  و درصد تقاضاهایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه می‌شوند (در دوره یا سال) از روابط زیر محاسبه می‌گردد.

$$\bar{b}(r) = \int_r^{\infty} (x - r) f_{D_L}(x) dx \quad \text{تقاضا پیوسته}$$

$$\bar{b}(r) = \sum_{x=r}^{\infty} (x - r) p\{D_L = x\} \quad \text{تقاضا گسسته}$$

$$B(r) = \frac{D}{Q} \bar{b}(r)$$

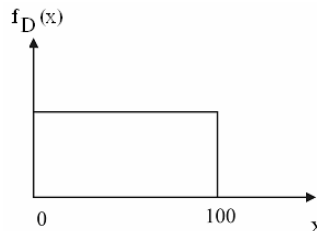
$$\text{درصد تقاضاهایی که با کمبود مواجه می‌شود} = \frac{B(r)}{D} = \frac{\bar{b}(r)}{Q}$$

(و) متوسط موجودی در دست از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{I} = \frac{Q}{2} + SS$$

$$1 - P = \frac{hQ}{\pi D} = \frac{h}{\pi} \times T \Rightarrow \quad \text{نکته: سطح خدمت بدین صورت نیز محاسبه می‌شود}$$

**مثال:** توزیع احتمالی تقاضای محصولی در طی مدت زمان تحویل یکنواخت بوده و چگالی آن به شکل زیر است



**مثال:** روش سفارش‌دهی این محصول روش مقدار سفارش ثابت بوده، مقدار سفارش در هر بار 40 واحد و متوسط مصرف سالیانه این محصول 400 واحد است. اگر قرار باشد در هر دور سفارش احتمال کمبود (کسری) محصول برابر 10 درصد باشد به سوال‌های زیر پاسخ دهید.

- مقدار موجودی اطمینان برابر است با:

- (۱) 90 واحد      (۲) 50 واحد      (۳) 40 واحد      (۴) 30 واحد

حل: گزینه ۳ درست است.

$$f(x) = \frac{1}{100}$$

$$Q = 40, D = 400, 1 - p = 0.1 \Rightarrow p = 0.9$$

$$F_{D_L}(r) = p \Rightarrow \int_0^r f(x) dx = 0.9 \Rightarrow \frac{r - 0}{100 - 0} = 0.9 \Rightarrow r = 90$$

$$\mu_{D_L} = \frac{100 + 0}{2} = 50 \Rightarrow SS = r - \mu_{D_L} = 90 - 50 = 40$$

**یادداشت:**

.....  
 .....  
 .....  
 .....

**مثال:** حداقل موقعیت موجودی (Inventory Position) این محصول برابر است با:

- (۱) 40 واحد  
 (۲) 50 واحد  
 (۳) 90 واحد  
 (۴) مقداری بین 50 تا 90 واحد

**حل:** گزینه ۳ درست است.

$$r=90 = \text{حداقل موقعیت موجودی}$$

**مثال:** درصد مشتریانی که با کمبود روبرو می‌شوند برابر است با:

- (۱) 10 درصد  
 (۲) 5 درصد  
 (۳) 2.5 درصد  
 (۴) 1.25 درصد

**حل:** گزینه ۴ درست است.

$$\bar{b}(r) = \int_r^{100} (x - 90) \frac{1}{100} dx = \left[ \frac{x^2}{200} - \frac{90x}{100} \right]_{90}^{100} = 0.5$$

$$\text{درصد مشتریانی که با کمبود روبرو می‌شوند} = \frac{\bar{b}(r)}{Q} = \frac{0.5}{40} = 0.0125 \Rightarrow 1.25\%$$

- میانگین تعداد دوره‌های سفارش در یک سال که در آنها کمبود رخ می‌دهد برابر است با:

- (۱) عددی بین 0 تا 0.5  
 (۲) عددی بین 0.5 تا 1.5  
 (۳) عددی بین 1.5 تا 2.5  
 (۴) عددی بین 2.5 تا 10

**حل:** گزینه ۲ درست است.

$$1 - p = \frac{N_b}{D} \Rightarrow N_b = \frac{D}{Q}(1 - p) = \frac{400}{40} \times 0.1 = 1$$

که عددی است بین 0.5 تا 1.5

**مثال:** در خط مشی  $(r, Q)$  یا FOS اگر مدت تحویل برای محصول طولانی‌تر شود آنگاه: (کنکور ۸۶)

- (۱) میانگین موجودی در دست برای محصول کمتر می‌شود.  
 (۲) میانگین موجودی در دست برای محصول فرقی نمی‌کند.  
 (۳) میانگین موجودی در دست برای محصول بستگی به مقدار سفارش دارد.  
 (۴) میانگین موجودی در دست برای محصول بیشتر می‌شود.

**حل:** گزینه ۴ درست است.

اگر L افزایش یابد  $SS = K_p \delta_{D_L}$  افزایش خواهد داشت  $\bar{I} = \frac{Q}{2} + SS$  افزایش خواهد یافت.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....



**مثال:** تقاضا برای محصولی در طی مدت تحویل دارای توزیع یکنواخت در فاصله (100, 200) است. برای این محصول از خط مشی مقدار سفارش ثابت (F.O.S) استفاده می‌شود. اگر سطح خدمت را برای محصول برابر 85% در نظر گرفته باشند. آن گاه حداقل موقعیت موجودی (مجموع موجودی در دست و در راه) چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

- (۱) 100 واحد      (۲) منفی است      (۳) صفر واحد      (۴) 185 واحد

**حل:** گزینه ۴ درست است.

حداقل موقعیت موجودی در FOS برابر با  $r$  است.

$$D_L \sim U(100, 200)$$

$$P = \int_{100}^r f_D(X) dX = \int_{100}^r \frac{1}{100} dX = \frac{r-100}{200-100} = 0.85 \Rightarrow r = 185$$

**مثال:** در یک موسسه تقاضا برای محصول ثابت و برابر 100 کیلو در روز می‌باشد. اگر مدت زمان تحویل برای هر سفارش متغیری تصادفی از توزیع نرمال با میانگین 10 و انحراف معیار 4 روز باشد، به نظر شما با سطح خدمت 90 درصد مقدار نقطه سفارش و موجودی اطمینان چقدر است؟  $P\{u \leq 1/28\} = 0.9$  (کنکور ۸۸)

- (۱) 90 , 1090      (۲) 128 , 1128      (۳) 400 , 1400      (۴) 512 , 1512

**حل:** گزینه ۴ درست است.

$$D=100 \quad \mu_L = 10 \quad \sigma_L = 4 \quad P = 0.9 \quad K_p = 1.28$$

$$SS = K_p \delta_{D_L} = K_p D \sigma_L = 1.28 \times 100 \times 4 = 512$$

$$r = \mu_{D_L} + SS = D \cdot \mu_L + SS = 100 \times 10 + 512 = 1512$$

**مثال:** در یک مؤسسه مقدار سفارش محصول در هر بار ثابت برابر 800 کیلو می‌باشد متوسط تقاضا در طی مدت تحویل برابر 200 کیلو است. اگر نقطه سفارش مجدد این محصول 350 کیلو باشد و هزینه نگهداری هر کیلوی محصول در سال 10 تومان باشد، آن گاه هزینه سالیانه نگهداری موجودی این محصول بر حسب تومان چقدر است؟ (کنکور ۸۸)

- (۱) 2000      (۲) 3500      (۳) 5500      (۴) 7500

**حل:** گزینه ۳ درست است.

$$Q=800 \quad \mu_{D_L} = 200 \quad r = 350 \quad h = 10$$

چون نقطه سفارش مجدد داریم پس خط مشی FOS داریم:

$$SS = r - \mu_{D_L} = 350 - 200 = 150$$

$$\text{هزینه نگهداری سالیانه} = h \left( \frac{Q}{2} + SS \right) = 10 \left( \frac{800}{2} + 150 \right) = 5500$$

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

**مثال:** تقاضا در فاصله زمانی تحویل (Lead time) برای کالایی دارای توزیع یکنواخت در فاصله (10,30) است اگر سطح خدمت

0.95 مورد نظر باشد در سیستم مقدار ثابت سفارش، نقطه سفارش موجودی اطمینان چقدر باید باشد؟ (کنکور ۸۶)

(۱) نقطه سفارش 22 و موجودی اطمینان 7 واحد کالا

(۲) نقطه سفارش 25 و موجودی اطمینان 10 واحد کالا

(۳) نقطه سفارش 28.5 و موجودی اطمینان 8.5 واحد کالا

(۴) نقطه سفارش 29 و موجودی اطمینان 9 واحد کالا

**حل:** گزینه ۴ درست است.

$$F_{D_L}(r) = P \Rightarrow \frac{r-10}{30-10} = 0.95 \Rightarrow r = 29$$

$$\mu_{D_L} = \frac{10+30}{2} = 20$$

$$SS = r - \mu_{D_L} = 29 - 20 = 9$$

**مثال:** در یک سیستم نقطه سفارش اطلاعات زیر برای 5 دوره سفارش جمع آوری شده است:

دوره سفارش	1	2	3	4	5
متوسط مصرف روزانه	12	20	18	15	25
فاصله زمانی تحویل (روز)	5	6	9	3	7

موجودی اطمینان بر حسب حداکثر مصرف قابل پیش بینی برابر چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

(۴) 113 واحد

(۳) 67 واحد

(۲) 54 واحد

(۱) 42 واحد

**حل:** گزینه ۴ درست است.

دوره سفارش	1	2	3	4	5	Max	متوسط
D	12	20	18	15	25	25	18
L	5	6	9	3	7	9	6
DL	60	120	162	45	175		

$$r = \text{Max}\{D\} \times \text{Max}\{L\} = 225$$

$$\mu_{D_L} = \frac{60+120+162+45+175}{5} = 112.4$$

$$SS = r - \mu_{D_L} = 225 - 112.4 \approx 113$$

**مثال:** مصرف یک کالا در هر روز از پیش زمان (LT) دارای توزیع پواسن با متوسط 5 واحد و طول پیش زمان برابر 3 روز می باشد.

برای سفارش دهی این کالا از سیستم دو طرفی استفاده می شود. حداقل ظرفیت ظرف کوچکتر برابر است با: (کنکور ۸۷)

(۴) 22 واحد

(۳) 15 واحد

(۲) 9 واحد

(۱) 5 واحد

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

حل : گزینه ۳ درست است.

$D_t \sim P(5)$  به روز

$L=3$  روز

حداقل ظرفیت ظرف کوچکتر در سیستم دو ظرفی زمانی است که  $SS=0$  باشد و در این صورت این حداقل ظرفیت برابر  $\mu_{D_L}$  خواهد شد.

$\mu_{D_L} = \mu_D \times L = 5 \times 3 = 15$

**مثال:** تقاضای سالیانه برای محصولی 1000 واحد و مقدار سفارش این محصول ثابت و برابر 100 واحد است. اگر مدیریت، متوسط تعداد دفعات کمبود در سال را برابر 2 انتخاب کرده باشد و تقاضا در طی مدت تحویل متغیری تصادفی با توزیع احتمال به شرح زیر باشد، آنگاه میانگین کمبود سالیانه محصول چقدر است؟ (کنکور ۸۹)

تقاضا	70	80	100	130
احتمال تقاضا	0.3	0.3	0.2	0.2

4(۱)

40 (۲)

6 (۳)

60 (۴)

حل : گزینه ۴ درست است.

$D=1000$

FOS  $Q=100$

متوسط دفعات کمبود  $= 2 = N_b = \frac{1}{T_b} = 2$

$T_b=0.5$

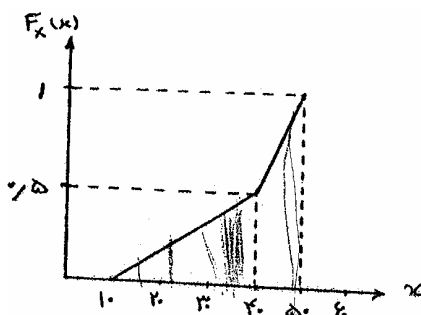
$1-P = N_b T = 2 \times \frac{100}{1000} = 0.2 \Rightarrow r = 100$

$B(r) = \frac{D}{Q} \bar{b}(r) = 10 \times (30 \times 0.2) = 10 \times 6 = 60$

X	70	80	100	130
F(x)	0.3	0.6	0.8	1

**مثال:** تابع توزیع تجمعی احتمال تقاضا در مدت زمان تحویل در شکل زیر داده شده است. اگر احتمال کمبود برابر 0.1 باشد مقدار

ذخیره ایمنی چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۹)



13(۱)

35 (۲)

21 (۳)

48 (۴)

یادداشت:

.....

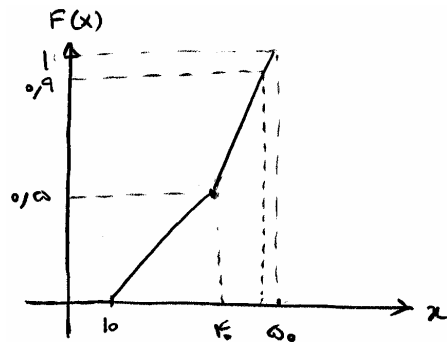
.....

.....

.....

حل : گزینه ۱ درست است.

تابع مربوط به  $D_L$  می باشد.  
دو نقطه از خط هستند



$$(40, 0.5)(50, 1)$$

$$y - 1 = \frac{1 - 0.5}{50 - 40}(X - 50)$$

$$y = \frac{1}{20}(X - 50) + 1$$

$$(a, 0.9) \Rightarrow 0.9 = \frac{1}{20}(X - 50) + 1$$

$$-0.1 = 0.05(X - 50)$$

$$-2 = X - 50 \quad X = 48$$

$$r = \mu_{D_L} + SS \Rightarrow 48 = 35 + SS$$

$$\Rightarrow SS = 13$$

۹-۲- مدل احتمالی ساده با خط مشی FOS در حالتی که تقاضا در مدت تحویل دارای توزیع نرمال باشد.

در این مدل تقاضا در مدت زمان تحویل دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu_{D_L}$  و واریانس  $\sigma_{D_L}^2$  است. توزیع نرمال از این جهت با دیگر توزیع‌ها متمایز است که می‌توان به راحتی با استانداردسازی احتمال‌های مورد نظر را محاسبه و رابطه سریعی برای  $r$  پیدا نمود.  
 $k_p$ : ضریب اطمینان

$$D_L \sim N(\mu_{D_L}, \sigma_{D_L}^2)$$

$$p = P\{D_L \leq r\} = P\left\{\frac{Z \sim N(0,1)}{\frac{D_L - \mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}} \leq \frac{K_p}{\frac{r - \mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}}\right\}$$

$$\frac{r - \mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}} = K_p \Rightarrow r = \mu_{D_L} + k_p \sigma_{D_L}$$

$$SS = k_p \sigma_{D_L}$$

در صورتی که مدت زمان تحویل نیز احتمالی باشد روابط زیر برای تبدیل میانگین و واریانس به کار می‌رود.

$$D: \text{متغیر تصادفی تقاضا در سال با میانگین } \mu_D \text{ و واریانس } \sigma_D^2$$

$$L: \text{متغیر تصادفی مدت زمان تحویل با میانگین } \mu_L \text{ و واریانس } \sigma_L^2$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

$D_L$ : متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل با میانگین  $\mu_{D_L}$  و واریانس  $\sigma_{D_L}^2$

$$\mu_{D_L} = \mu_D \times \mu_L$$

$$\sigma_{D_L} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2}$$

بدین اساس حالت‌های زیر برای مدل قابل تصور است:

حالت ۱:  $D$  متغیر تصادفی با توزیع نرمال با میانگین  $\mu_D$  و واریانس  $\sigma_D^2$  و  $L$  ثابت و قطعی باشد.

$$\mu_{D_L} = L\mu_D$$

$$\sigma_{D_L} = \sqrt{L} \sigma_D \Rightarrow r = L\mu_D + k_p \sqrt{L} \sigma_D$$

$$SS = k_p \sqrt{L} \sigma_D$$

حالت ۲:  $D$  ثابت و قطعی و  $L$  متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین  $\mu_L$  و واریانس  $\sigma_L^2$  باشد.

$$\mu_{D_L} = D\mu_L$$

$$\sigma_{D_L} = D\sigma_L \Rightarrow r = D\mu_L + k_p D\sigma_L$$

$$SS = k_p D\sigma_L$$

حالت ۳:  $D$  متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین  $\mu_D$  و واریانس  $\sigma_D^2$  و  $L$  متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین  $\mu_L$  و واریانس  $\sigma_L^2$  باشد.

$$\mu_{D_L} = \mu_D \times \mu_L$$

$$\sigma_{D_L} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2} \Rightarrow r = \mu_D \times \mu_L + k_p \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2}$$

$$SS = k_p \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2}$$

**مثال:** مصرف کالایی در یک سیستم نگهداری موجود که به صورت FOS اجرا می‌شود نرمال یا میانگین 100 و انحراف معیار 5 واحد در روز است اگر مدت زمان تحویل 16 روز و سطح خدمت 90% مورد نظر باشد موجودی اطمینان حدود چند واحد خواهد بود.  $k_{0.9} = 1.28$  (کنکور ۸۶)

130 (۴)

100 (۳)

80 (۲)

25 (۱)

حل: گزینه ۱ درست است.

$$M_D = 100 \quad L = 16 \quad K_p = 1.28$$

$$\sigma_D = 5 \quad P = 0.9$$

$$SS = 1.28 \times 5 \times \sqrt{16} = 25.6$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

**مثال:** برای محصولی از سیستم سفارش مقدار سفارش ثابت استفاده می‌شود. اگر مقدار سفارش برابر 100 واحد باشد و مدت تحویل محصول برابر 6 روز و تقاضا نرمال با میانگین  $5t$  و انحراف معیار  $3\sqrt{t}$  باشد ( $t$  به روز) و مدیریت، موجودی اطمینان را برابر 30 انتخاب کرده باشد آنگاه حداکثر موجودی در دست این قلم با توجه به تغییرات تصادفی تقاضا چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

(۱) کوچکتر یا مساوی 160 واحد است. (۲) برابر 80 واحد است.  
 (۳) کوچکتر یا مساوی 60 واحد است. (۴) برابر 30 واحد است.

**حل:** گزینه ۱ درست است.

$$FOS \leq r + Q$$

$$= r + Q \text{ در صورتی حداکثر موقعیت موجودی که } LT = 0 \text{ باشد.}$$

$$I_{\max} \leq Q + r$$

$$I_{\max} \leq Q + \mu_{D_L} + SS = 100 + 5 \times 6 + 30$$

**مثال:** تقاضای کالایی در فاصله زمانی تحویل دارای توزیع یکنواخت در بازه (10, 30) است. اگر هزینه نگهداری هر واحد کالا در سال 2 واحد پول، هزینه هر واحد کسری 4 واحد پول و سیستم موجودی به صورت مقداری ثابت سفارش اجرا شود و به طور متوسط 10 سفارش در سال صادر شود مقدار بهینه موجودی اطمینان چقدر خواهد بود؟ (کنکور ۸۵)

(۱) 6.6 واحد کالا

(۲) 9 واحد کالا

(۳) 10 واحد کالا

(۴) بدون مشخص بودن سطح خدمت نمی‌توان موجودی اطمینان را تعیین کرد.

**حل:** گزینه ۲ درست است.

$$D_L \sim U(10, 30)$$

$$1 - P = \frac{hQ}{\pi D} = \frac{h}{\pi} \times T \Rightarrow 1 - F_D(r) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{10} = 0.05$$

$$\frac{r - 10}{30 - 10} = 0.95 \Rightarrow r = 29$$

$$SS = r - \mu_{D_L} = 29 - 20 = 9$$

**مثال:** برای محصولی از خط مشی مقدار سفارش ثابت (F.O.S) استفاده می‌شود. تقاضا برای محصول دارای توزیع نرمال با میانگین  $1000t$  و انحراف معیار  $120\sqrt{t}$  ( $t$  به ماه) می‌باشد. اگر برای این محصول موجودی اطمینان در نظر نگرفته باشیم و مقدار سفارش در هر بار برابر 1000 واحد باشد. به نظر شما متوسط تعداد دفعات کمبود در سال چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

(۴) 12 بار

(۳) 9 بار

(۲) 6 بار

(۱) 4 بار

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

حل : گزینه ۲ درست است.

$$D_t \sim N\left(1000t, (120\sqrt{t})^2\right)$$

$$\mu_D = D = 1000 \times 12 = 12000$$

$$SS = 0 \Rightarrow P = 0.5$$

$$N_b = (1-P) \times \frac{D}{Q} = (1-0.5) \times \frac{12000}{1000} = 6$$

**مثال:** تقاضا برای محصولی در طی مدت تحویل متغیری تصادفی با توزیع احتمالی به شرح جدول زیر است. مقدار سفارش در هر بار ثابت و برابر  $Q$  است. اگر مدیریت موجودی اطمینان را برابر 10 واحد در نظر گرفته باشد میانگین کمبود در یک دور چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

X تقاضا	100	110	120	130	140	150	160
P(x) احتمال تقاضا	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1

$$E(X) = E(D) = 130$$

(۴) 31 واحد

(۳) 20 واحد

(۲) 7 واحد

(۱) 3 واحد

حل : گزینه ۱ درست است.

$$\mu_{D_L} = E(D) = 130 \rightarrow r = 130 + 10 = 140$$

$$SS = 10$$

$$\bar{b}(r) = \sum_{X>140}^{160} (X-r)P(X=x) = (160-140) \times 0.1 + (150-140) \times 0.1 = 3$$

**مثال:** تقاضا برای محصولی در طی مدت تحویل دارای توزیع یکنواخت در فاصله (100, 200) است. برای این محصول از خط مشی مقدار سفارش ثابت F.O.S استفاده می‌شود. اگر تعداد دفعات سفارش در سال برابر 10 بار باشد و متوسط تعداد دفعات کمبود در سال برابر 2 بار باشد آنگاه موجودی اطمینان این محصول چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

(۴) 50 واحد

(۳) 30 واحد

(۲) 20 واحد

(۱) صفر است

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

حل : گزینه ۳ درست است.

$$D_L \sim U(100, 200)$$

$$1 - P = N_b \cdot T = \frac{N_b}{n} = \frac{2}{10} \Rightarrow P = 0.8$$

$$0.8 = \frac{r - 100}{200 - 100}$$

$$r = 180$$

$$SS = r - \mu_{D_L} = 180 - 150 = 30$$

**مثال:** توزیع تقاضای محصول در طی مدت تحویل آن یکنواخت بین 100 و 300 واحد است. متوسط تقاضای سالیانه این محصول 1200 واحد، مقدار هر بار سفارش آن برابر 60 واحد و موجودی اطمینان این محصول برابر 80 واحد می‌باشد، سطح خدمت

این محصول برابر است با: (کنکور ۸۷)

- (۱) 80 درصد                      (۲) 95 درصد                      (۳) 85 درصد                      (۴) 90 درصد

حل : گزینه ۴ درست است.

$$D_L \sim U(100, 300) \rightarrow \mu_{D_L} = 200$$

$$D = 1200, \quad Q = 60, \quad SS = 80$$

$$r = \mu_{D_L} + SS = 200 + 80 = 280$$

$$P = P(D_L \leq r) = F_{D_L}(r) = \frac{r - 100}{300 - 100} = \frac{280 - 100}{200} = 0.9 \rightarrow 90\%$$

**مثال:** موجودی اطمینان محصولی 128 واحد و سطح خدمت این محصول 90% است. مدیریت مایل است سطح خدمت را به 95% افزایش دهد. تقاضا برای محصول در طی مدت تحویل نرمال با میانگین  $\mu_L$  و انحراف معیار  $\sigma_L$  است. در این صورت

مقدار تغییر در موجودی اطمینان چقدر خواهد بود؟  $u \sim N(0, 1)$  (کنکور ۸۸)

(۱) 37 واحد افزایش می‌یابد.

(۲) 27 واحد افزایش می‌یابد.

(۳) 20 واحد کاهش می‌یابد.

(۴) تغییری پیدا نمی‌کند.

k	1.04	1.28	1.65
$P\{u \leq k\}$	0.85	0.90	0.95

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....



حل : گزینه ۱ درست است.

$$SS=128$$

$$P_1 = 0.9$$

$$K_{P_1} = 1.28$$

$$P_2 = 0.95$$

$$K_{P_2} = 1.65$$

$$SS_1 = K_{P_1} \sigma_{D_L} \rightarrow 128 = 1.28 \times \sigma_{D_L} \rightarrow \sigma_{D_L} = 100$$

$$SS_2 = K_{P_2} \sigma_{D_L} \rightarrow 1.65 \times 100 = 165$$

$$SS_2 - SS_1 = 37$$

37 واحد افزایش می‌یابد.

**مثال:** تقاضای روزانه کالایی ثابت و برابر 50 کیلوگرم است. مدت تحویل متغیری تصادفی با توزیع نرمال با میانگین شش روز و انحراف معیار دو روز است. اگر سطح خدمت (میزان اطمینان از موجودی) برابر 90 درصد باشد، نقطه سفارش مجدد این کالا چند کیلوگرم خواهد بود؟ ( $Z_{0.9} = 1.28$ ) (کنکور ۸۹)

$$428\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$328\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$328 \quad (۲)$$

$$428 \quad (۱)$$

حل : گزینه ۱ درست است.

$$D=50 \text{ kg}$$

$$L \sim N(6, 2^2)$$

$$r = \mu_{D_L} + K_P \sigma_{D_L}$$

$$\sigma_{D_L} = D \sigma_L = 50 \times 2 = 100$$

$$\mu_{D_L} = D \times \mu_L = 50 \times 6 = 300$$

$$K_P = 1.28$$

$$r = 300 + 1.28 \times 100 = 428$$

### ۹-۳- مدل احتمالی ساده با خط مشی سفارش دهی (R, T) FOI

فرضیات مدل مانند EOQ است با تفاوت‌های زیر :

۱- تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲- کمبود جایز است.

۳- خط مشی سفارش دهی FOI می‌باشد.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

هدف مدل تعیین مقدار سقف موجودی بهینه  $(R^*)$  و فاصله زمانی بهینه بین دو سفارش متوالی  $(T^*)$  با کمینه کردن هزینه‌هاست.

پارامترهای مدل:

$D$ : متغیر تصادفی تقاضا در سال

$\mu_D$ : میانگین تقاضا در سال

$\sigma_D$ : انحراف معیار تقاضا در سال

$D_{L+T}$ : متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره

$\mu_{D_{L+T}}$ : میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره

$\sigma_{D_{L+T}}$ : انحراف معیار تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره

$p$ : سطح خدمت، سطح اطمینان

متغیرهای مدل:

$R$ : سقف موجودی، حداکثر موقعیت موجودی

$T$ : فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی

$SS$ : موجودی اطمینان (ذخیره ایمنی):

موجودی اطمینان در مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOI برابر است با مقداری از موجودی که جهت جواب‌گویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره سفارش تعریف می‌شود و مقدار آن در تعاملی بین هزینه‌های کمبود و هزینه نگهداری به دست می‌آید.

## تعریف سطح خدمت

سطح خدمت برابر است با احتمال اینکه در یک دوره سفارش، با کمبود مواجه نشویم و برابر است با احتمال اینکه تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره سفارش از حداکثر موقعیت موجودی  $(R^*)$  کوچک‌تر یا مساوی باشد.

$$p = p\{D_{L+T} \leq R\} = F_{D_{L+T}}(R)$$

$1 - p$ : سطح ریسک یا سطح خطر برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه شویم.

$$1 - p = p\{D_{L+T} > R\} = 1 - F_{D_{L+T}}(R)$$

## نحوه محاسبه سطح خدمت (p)

الف) توسط مدیر سیستم موجودی مشخص گردد.

ب) از روی مقادیر  $N_b$  و  $T_b$  توسط روابط زیر مشخص گردد.

$$1 - p = \frac{N_b}{1} = N_b \cdot T$$

$$T_b = \frac{1}{N_b}$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

## الگوریتم حل مدل احتمال ساده FOI

مدل احتمالی FOI از دو روش زیر قابل حل است.

(۱) با استفاده از پارامترهای  $\pi$  و  $\hat{\pi}$ : در این روش تابع هزینه‌ها را بر اساس متغیرها و پارامترها نوشته و نسبت به دو متغیر  $T$  و  $R$  مشتق می‌گیریم و روابط محاسبه  $T$  و  $R$  به دست می‌آید.

(۲) با استفاده از مفهوم جایگزین سطح خدمت، الگوریتم این روش به شرح ذیل است.

الف) مقدار  $T^*$  از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$T^* = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}$$

ب) مقدار سطح خدمت از روش‌های عنوان شده محاسبه می‌گردد.

$$1 - p = TN_b$$

ج) مقدار سقف موجودی ( $R$ ) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

اگر تقاضا پیوسته باشد، مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه یک دوره سفارش برابر با  $R$  می‌باشد که به ازای آن تابع توزیع تجمعی برابر با سطح خدمت ( $p$ ) گردد.

$$F_{D_{L+T}}(R) = p$$

اگر تقاضا گسسته باشد کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش که رابطه زیر را برقرار کند برابر  $R$  می‌گردد.

$$F_{D_{L+T}}(R) \geq p$$

د) مقدار ذخیره اطمینان از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$R = \mu_{D_{L+T}} + SS \Rightarrow SS = R - \mu_{D_{L+T}}$$

هـ) متوسط مقدار کمبود در یک دوره ( $\bar{b}(R)$ )، متوسط مقدار کمبود در یک سال ( $B(R)$ ) و درصد نقاضاهایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه می‌شوند (در دوره یا سال) از فرمول‌های زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{b}(R) = \int_R^{\infty} (x - R) f_{D_{L+T}}(x) dx \quad \text{تقاضا پیوسته:} \quad \bar{b}(R) = \sum_{x=R}^{\infty} (x - R) p\{D_{L+T} = x\} \quad \text{تقاضا گسسته:}$$

$$B(R) = \frac{\bar{b}(R)}{T}$$

$$\text{درصد تقاضاهایی که با کمبود مواجه می‌شود} = \frac{B(R)}{D} = \frac{\bar{b}(R)}{D \cdot T}$$

و) متوسط موجودی در دست از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{I} = \frac{D \cdot T}{2} + SS$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

**مثال:** در سیستم مرور دوره‌ای (دوره ثابت سفارش) میزان حداکثر موجودی در شرایطی که ذخیره صفر باشد برابر است با:

(۱) میزان تقاضا در زمان دوره سفارش منهای تقاضا در طی زمان تحویل

(۲) میزان تقاضا در طول زمان تحویل

(۳) میزان تقاضا در طول زمان تحویل + تقاضا در طول دوره سفارش

(۴) میزان تقاضا در طول دوره سفارش

**حل:** گزینه ۳ درست است.

همان‌طور که ذکر گردید در سیستم FOI، میزان حداکثر موجودی (R) برابر است با میزان تقاضا در طول زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش + ذخیره اطمینان. از آن‌جا که ذخیره اطمینان برابر صفر فرض گردیده است بنابراین گزینه ۳ درست است.

**مثال:** از کالایی هر T ماه به اندازه‌ای سفارش می‌دهیم که به حداکثر سطح موجودی خود (E) برسد، اگر نرخ تقاضای ماهیانه این

کالا (D) به صورت یک متغیر تصادفی و زمان انتظار تحویل آن L به صورت ثابت باشد در این صورت میانگین موجودی در طول

دوره برابر است با:

$$E - \frac{D \cdot L}{2} + D \cdot L \quad (۴) \quad \frac{D \cdot T + D \cdot L}{2} \quad (۳) \quad E - \frac{D \cdot T + D \cdot L}{2} \quad (۲) \quad E - \frac{D \cdot T}{2} - D \cdot L \quad (۱)$$

**حل:** گزینه ۱ درست است.

$$SS = E - \mu_{D_{L+T}} = E - D \cdot (L + T)$$

$$\bar{I} = \frac{D \cdot T}{2} + SS = \frac{D \cdot T}{2} + E - D \cdot L - D \cdot T = E - D \cdot L - \frac{D \cdot T}{2}$$

**مثال:** در سیستم دوره سفارش اقتصادی اگر R تقاضای سالیانه کالا، L مدت زمان تحویل و T دوره سفارش اقتصادی باشد در صورتی

که مدت زمان تحویل محصول افزایش یابد به شرط آن که سایر عوامل ثابت بمانند کدام گزینه صحیح است؟ (کنکور ۸۷)

(۱) حداکثر موجودی تغییری نمی‌کند.

(۲) حداکثر موجودی افزایش می‌یابد.

(۳) هزینه خرید سالیانه کالا کاهش می‌یابد.

(۴) حداکثر موجودی کاهش می‌یابد.

**حل:** گزینه ۲ درست است.

**مثال:** دوره ثابت بازنگری موجودی سه کالا در انبار برابر 3 ماه تعیین شده است. مدت تحویل یکی از این کالاها ثابت و برابر یک ماه

است. اگر تقاضای سالیانه این کالا ثابت و برابر 12000 واحد باشد، حداکثر موجودی این کالا در انبار چند واحد خواهد بود؟

(کنکور ۸۹)

36000 (۴)

12000 (۳)

4000 (۲)

8000 (۱)

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

حل : گزینه ۲ درست است.

حداکثر موجودی این کالا در انبار برابر است با تقاضا در دوره‌ی تحویل + تقاضا در طول دوره سفارش.

$$Q+r=D.L+D.T=D.(L+T)$$

ماه 3 کلا  $T = 3$  →

ماه 1 کلا  $L = 1$  →

$$D=12000$$

$$12000 \left( \frac{4}{12} \right) = 4000$$

**مثال:** در مدل‌های احتمالی با سیاست‌های FOS یا FOI اگر سطح خدمت را برابر 0.9 در نظر گرفته باشیم، با فرض این که میانگین تقاضای سالانه برابر 1500 واحد و 200 دوره در سال داشته باشیم، کدام گزینه صحیح است؟ (کنکور ۸۹)

۱) به طور متوسط 150 واحد کمبود در سال خواهیم داشت.

۲) به طور متوسط در 3 دوره با کمبود مواجه می‌شویم.

۳) نمی‌توان در مورد کل تقاضای برآورده نشده اظهار نظر کرد.

۴) نمی‌توان در مورد متوسط تعداد دوره‌های کمبود اظهار نظر کرد.

حل : گزینه ۳ درست است.

در 20 دوره با کمبود مواجه می‌شویم  $N_b = (1 - P) \times (\text{تعداد کل دوره}) = 200 \times 0.1 = 20$

$$T = \frac{Q}{D} = \frac{1}{200} = \frac{Q}{1500}$$

$$Q=7.5$$

می‌توان متوسط دوره‌های کمبود را به دست آورد ولی برای کل تقاضای برآورده نشده باید  $\bar{b}(r)$  محاسبه گردد که احتیاج به تابع آن داریم.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

## ۹-۴. مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOI در حالی که تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش دارای توزیع نرمال باشد.

در این مدل تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu_{D_{L+T}}$  و واریانس  $\sigma_{D_{L+T}}^2$  است.

$$D_{L+T} \sim N\left(\mu_{D_{L+T}}, \sigma_{D_{L+T}}^2\right)$$

رابطه سقف موجودی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$p = p\{D_{L+T} \leq R\} = p\left\{\frac{D_{L+T} - \mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}} \leq \frac{R - \mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}}\right\} \Rightarrow R = \mu_{D_{L+T}} + k_p \sigma_{D_{L+T}}$$

$$SS = k_p \sigma_{L+T}$$

در صورتی که مدت زمان تحویل نیز احتمالی باشد، روابط زیر برای تبدیل میانگین و واریانس به کار می‌رود:

$$D: \text{متغیر تصادفی تقاضا در سال با میانگین } \mu_D \text{ و واریانس } \sigma_D^2$$

$$L: \text{متغیر تصادفی مدت زمان تحویل با میانگین } \mu_L \text{ و واریانس } \sigma_L^2$$

$$D_{L+T}: \text{متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره سفارش با میانگین } \mu_{D_{L+T}} \text{ و واریانس } \sigma_{D_{L+T}}^2$$

$$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T}$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu_D^2 \sigma_{L+T}^2 + \mu_{L+T} \sigma_D^2}$$

قابل ذکر است که از آنجایی که  $T$  ثابت است، داریم:

$$\mu_{L+T} = \mu_L + T$$

$$\sigma_{L+T} = \sigma_L$$

بنابراین حالت‌های زیر برای مدل قابل ذکر است.

حالت ۱:  $D$  متغیر تصادفی با توزیع نرمال  $(\mu_D, \sigma_D^2)$  و  $L$  ثابت و قطعی است.

$$\mu_{D_{L+T}} = (L + T)\mu_D$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{L + T} \sigma_D \Rightarrow R = (L + T)\mu_D + k_p \sqrt{L + T} \sigma_D$$

$$SS = k_p \sqrt{L + T} \sigma_D$$

حالت ۲:  $D$  ثابت و قطعی و  $L$  متغیر تصادفی با توزیع نرمال  $(\mu_L, \sigma_L^2)$  باشد.

$$\mu_{D_{L+T}} = D\mu_{L+T} = D(\mu_L + T)$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = D\sigma_{L+T} = D\sigma_L \Rightarrow R = D(\mu_L + T) + k_p D\sigma_L$$

$$SS = k_p D\sigma_L$$

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

حالت ۳: D و L هر دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال باشند.

$$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T} = \mu_D (\mu_L + T)$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu_D^2 \sigma_{L+T}^2 + \mu_{L+T} \sigma_D^2} = \sqrt{\mu_D^2 \sigma_L^2 + (\mu_L + T) \sigma_D^2}$$

**مثال:** در خط مشی (R, T) و یا FOI وقتی که تقاضا دارای توزیع نرمال است، فرض کنید که انحراف معیار برابر 3 واحد و مقدار R برابر 100 و مقدار  $T_b$  (میانگین فاصله زمانی بین دو بار کمبود متوالی) برابر 5 سال تخمین زده شده است. حال اگر مقدار واقعی انحراف معیار برابر 3.5 باشد آنگاه: (کنکور ۸۶)

(۱) مقدار واقعی  $T_b$  افزایش می‌یابد.

(۲) مقدار واقعی  $T_b$  بستگی به  $T+L$  دارد و در آن تغییری ایجاد نمی‌شود.

(۳) مقدار واقعی  $T_b$  کاهش می‌یابد.

(۴) مقدار واقعی  $T_b$  بستگی به سطح خطر دارد و در آن تغییری ایجاد نمی‌شود.

**حل:** گزینه ۳ درست است.

طبق نکات قبلی اگر انحراف زیاد شود باید برای آن که R ثابت بماند در  $K_p \sigma_{D_{L+T}}$  ،  $K_p$  کاهش پیدا کند. پس  $1-P$  افزایش می‌یابد و  $T_b = \frac{T}{1-P}$  کاهش خواهد یافت.

**مثال:** برای محصولی از خط مشی دور ثابت (F.O.I) در سفارش دهی استفاده می‌شود. مدت تحویل این محصول 8 ماه و فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی برابر 8 ماه است. تقاضا در طی مدت t نرمال با میانگین  $1000t$  و انحراف معیار  $100\sqrt{t}$  است (t به ماه). اگر حداکثر موقعیت موجودی (مجموع موجودی در دست و در راه) این محصول برابر 16800 واحد باشد به نظر شما متوسط موجودی محصول چقدر است؟ (کنکور ۸۵)

- (۱) 4800 واحد      (۲) 6000 واحد      (۳) 8400 واحد      (۴) 8800 واحد

**حل:** گزینه ۱ درست است.

$$D_t \sim N\left(1000t, (100\sqrt{t})^2\right)$$

$$\bar{I} = \frac{DT}{2} + SS$$

$$SS = R - \mu_{D_{L+T}} = 16800 - 1000(8+8) = 800$$

$$\bar{I} = \frac{1000 \times 8}{2} + 800 = 4800$$

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

**مثال:** خط مشی سفارش دهی برای محصولی بدین طریق است که در هر دوره ثابت  $T$  ( $T=3$  ماه) آن قدر سفارش داده می‌شود تا سطح موقعیت موجودی این محمول برابر 600 واحد شود. متوسط و انحراف معیار تقاضای این محصول در مدت  $t$  (به ماه) به ترتیب  $\mu_t = 100t$  و  $\sigma_t = 10\sqrt{t}$  می‌باشد. با توجه به اطلاعات فوق، متوسط موجودی این محصول برابر است با: (کنکور ۸۷)

- (۱) 250 واحد      (۲) 300 واحد      (۳) 350 واحد      (۴) 500 واحد

**حل:** هیچ کدام.

$$T=3 \quad \mu_t=100t \quad \sigma_t=10\sqrt{t} \quad R=600$$

$$R = \mu_{D_{L+T}} + SS \Rightarrow SS = 600 - \mu_{D_{L+T}} = 600 - 100(3+L) = 300 - 100L$$

$$\bar{I} = \frac{D \cdot T}{2} + SS = \frac{100 \times 3}{2} + 300 - 100L = 450 - 100L$$

از آن جا که مدت تحویل ( $L$ ) مشخص نمی‌باشد نمی‌توان سنوال را پاسخ داد.

**مثال:** در خط مشی  $(R, T)$  (خط مشی F.O.I) مقدار  $R=600$  و  $T=3$  ماه است. تقاضا برای این محصول متغیری تصادفی با میانگین  $\mu_t = 100t$  و انحراف معیار  $\sigma_t = 10\sqrt{t}$  است ( $t$  به ماه). کدام یک از گزاره‌های زیر اگر مدت تحویل برابر یک ماه باشد در مورد موجودی اطمینان این محصول صحیح است؟ (کنکور ۸۸)

- (۱) 500 واحد      (۲) 200 واحد      (۳) 300 واحد      (۴) 400 واحد

**حل:** گزینه ۲ درست است.

$$R=600$$

$$T=3$$

$$L=1$$

$$\mu_t = 100t$$

$$\sigma_t = 10\sqrt{t}$$

$$SS = R - \mu_{D_{L+T}} = R - \mu_{D_{3+1}} = 600 - 100 \times 4 = 200$$

**مثال:** طول دوره سفارش  $T$  (فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی) برای محصولی ثابت و برابر 2 ماه انتخاب شده است و مدت تحویل این محصول نیز 2 ماه است. توزیع تقاضای این محصول در طی هر ماه متغیر تصادفی نرمال با میانگین 100 واحد و انحراف معیار 20 واحد است. سطح خدمت این محصول 0.95 است، متوسط موجودی محصول چقدر است؟ (کنکور ۸۹)

$$www.ieun.ir \quad (p(z < 1.65) = 0.95)$$

- 200(۱)      433 (۲)      266 (۳)      466 (۴)

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....



حل : هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$FOI \quad T = 2 \quad D \sim N(100, 20^2)$$

$$L = 2 \quad P = 0.95 \quad K_p = 1.65$$

$$\bar{I} = ? \quad SS = K_p \sigma_{D_{L+T}} = K_p \sqrt{(L+T)} \sigma_D = 1.65 \times \sqrt{4} \times 20 = 66$$

$$\bar{I} = \frac{DT}{2} + SS = \frac{100 \times 2}{2} + 66 = 166$$

## ۹-۵- مقایسه بین مدل احتمالی FOS و مدل احتمالی FOI

	FOS		FOI
حداکثر موقعیت موجودی	$r + Q$		$R$
حداقل موقعیت موجودی	$r$		معلوم نمی‌باشد
متوسط موجودی در دست	$\frac{Q}{2} + SS_{FOS}$	<	$\frac{D \cdot T}{2} + SS_{FOI}$
موجودی اطمینان	$SS_{FOS}$	<	$SS_{FOI}$
موجودی اطمینان در حالت نرمال	$k_p \sigma_{D_L}$	<	$k_p \sigma_{D_{L+T}}$
کل هزینه نگهداری سالیانه	$h \left( \frac{Q}{2} + SS_{FOS} \right)$	<	$h \left( \frac{DT}{2} + SS_{FOI} \right)$
کل هزینه کمبود سالیانه	$\pi B(r)$	<	$\pi B(R)$

شرط مقایسه موارد فوق برابر بودن تمامی پارامترها من جمله سطح خدمت (p) است (شرایط یکسان است).

**مثال:** دو سیستم سفارش دهی (r, Q) یا FOS و (R, T) یا FOI را در نظر بگیرید.

(۱) برای یک سطح خدمت مشخص در دو سیستم موجودی اطمینان یکسان است.

(۲) برای یک سطح خدمت مشخص، متوسط مقدار کسری سالیانه دو سیستم برابر است.

(۳) برای یک سطح خدمت مشخص، کل هزینه نگهداری سیستم (r, Q) بیشتر از سیستم (R, T) است.

(۴) برای یک سطح خدمت مشخص، متوسط کسری در یک دوره سفارش برای سیستم (r, Q) کمتر از سیستم (R, T) است.

حل : گزینه ۴ درست است.

همان‌طور که در مقایسه دو سیستم ذکر گردید، برای یک سطح خدمت مشخص موجودی اطمینان سیستم FOI بیشتر از FOS است

$(SS_{FOS} < SS_{FOI})$ ، متوسط کمبود سالیانه سیستم FOI نیز از سیستم FOS بیشتر است  $(B(r) < B(R))$ ، کل هزینه نگهداری

سیستم FOS کمتر از سیستم FOI است و نیز متوسط کمبود در یک دور سفارش سیستم FOS کمتر از سیستم FOI است

$(\bar{b}(r) < \bar{b}(R))$  بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

نکته :

$$FOS \rightarrow \text{هزینه نگهداری} = h\bar{I} = h\left(\frac{Q}{2} + SS_{FOS}\right)$$

$$FOI \rightarrow \text{هزینه نگهداری} = h\bar{I} = h\left(\frac{DT}{2} + SS_{FOI}\right)$$

$$SS_{FOS} = K_P \sigma_{D_L} = K_P \sqrt{D^2 \sigma_L^2 + L \sigma_D^2}$$

$$SS_{FOI} = K_P \sigma_{D_{L+T}} = K_P \sqrt{D^2 \sigma_L^2 + (L+T) \sigma_D^2}$$

نکته: در حالت احتمالی اگر L کاهش یابد SS کاهش می‌یابد. بنابراین هزینه‌ی نگهداری نیز کاهش خواهد یافت و بنابراین هزینه‌های سیستم موجودی کاهش می‌یابد ولی مقدار آن بستگی به سایر پارامترها خواهد داشت.

نکته : اگر  $\sigma = 0$  باشد (حالت قطعی) با کاهش L هزینه‌ها یکسان باقی می‌ماند.

نکته : موجودی اطمینان در FOS به دلیل مرور دائمی که روی سطح موجودی وجود دارد از سیستم FOI کمتر است.

مثال: به طور کلی در صورت کاهش زمان تدارک (lead time) به میزان 40 درصد کدام یک از جملات زیر صحیح است؟

(کنکور ۸۵)

(۱) هزینه سیستم موجودی تغییری نمی‌کند.

(۲) هزینه سیستم موجودی افزایش خواهد یافت.

(۳) هزینه سیستم موجودی دقیقاً 40 درصد کاهش می‌یابد.

(۴) در مجموع هزینه سیستم موجودی کاهش خواهد یافت ولی مقدار آن بستگی به سایر پارامترها دارد.

حل : با توجه به نکته گزینه ۴ درست است.

مثال: کدام یک از عبارتهای زیر صحیح است؟ (کنکور ۸۶)

(۱) در یک سیستم FOS همیشه متوسط موجودی بیشتر از سیستم FOI است.

(۲) در یک سیستم FOS با دریافت تدریجی، موجودی اطمینان بیشتری برای یک سطح خدمت مشخص لازم خواهد بود.

(۳) در سیستم FOI همیشه حداکثر موقعیت موجودی کمتر از سیستم FOS با شرایط مشابه است.

(۴) برای سطح خدمت مشخص در سیستم FOS با دریافت تدریجی، موجودی اطمینان کمتری نسبت به سیستم FOI با شرایط مشابه لازم خواهد بود.

حل : گزینه ۴ درست است.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

**مثال:** کدام یک از گزاره‌های زیر برای  $N_b$  میانگین تعداد دفعات کمبود در سال صحیح است؟ (کنکور ۸۶)

(۱)  $N_b$  تنها بستگی به توزیع تقاضا در سال دارد.

(۲)  $N_b$  برای محصولات مختلف تنها بستگی به سطح خطر دارد.

(۳)  $N_b$  برای محصولات علاوه بر سطح خدمت بستگی به سایر پارامترها دارد.

(۴)  $N_b$  برای محصولات مختلف تنها بستگی به تعداد دفعات سفارش در سال دارد.

**حل:** گزینه ۳ درست است.

$$N_b = (1-P) \times \frac{D}{Q}$$

$$N_b = \frac{1-P}{T}$$

بنابراین علاوه بر سطح خدمت به تعداد دفعات سفارش ( $\frac{D}{Q}$  یا  $\frac{1}{T}$ ) در سال نیز بستگی دارد.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

## ۱۰- آنالیز ABC

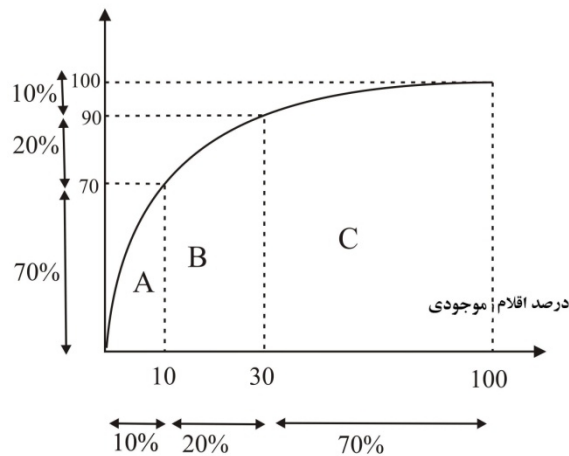
آنالیز ABC که حالتی از نمودارهای پارتو است، اقلام موجودی را به سه طبقه A و B و C به شرح ذیل تقسیم می‌کند:

طبقه	درصد اقلام موجودی	درصد سرمایه درگیر موجودی
A	کمترین (حدود 10%)	بیشترین (حدود 70%)
B	متوسط (حدود 20%)	متوسط (حدود 20%)
C	بیشترین (حدود 70%)	کمترین (حدود 10%)

www.ieun.ir

نمودار درصد سرمایه دیگر موجودی به صورت زیر است.

درصد سرمایه درگیر موجودی



در این روش حجم سرمایه درگیر موجودی هر کالا به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\text{حجم سرمایه درگیر موجودی محصول } i = C_i \times D_i$$

سپس اقلام را بر اساس حجم سرمایه درگیر موجودی به صورت نزولی مرتب می‌کنیم و سپس درصد حجم سرمایه درگیر موجودی برای هر محصول را محاسبه می‌کنیم که برابر است با حجم سرمایه درگیر موجودی محصول  $i$  ام تقسیم بر مجموع حجم سرمایه درگیر موجودی کلیه محصولات. حدود 10% کالاهای اول که 70% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه A، 20% دوم که حدود 20% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه B و 70% باقی مانده که 10% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه C را در برخواهند داشت.

**نکته:** یکی از اهداف آنالیز ABC تعیین خط مشی موجودی مناسب برای کالاهاست.

**نکته:** در آنالیز ABC سرمایه‌ی درگیر موجودی مطرح است نه ارزش (قیمت) آن.

**مثال:** کدامیک از اقلام زیر جزو گروه A در آنالیز ABC قرار می‌گیرد.

(۱) قلم کالایی که بیشترین تقاضای سالیانه را دارد. (۲) قلم کالایی که کمترین سرمایه درگیر موجودی را دارد.

(۳) قلم کالایی که بیشترین تقاضا برحسب ریال را دارد. (۴) قلم کالایی که بیشترین قیمت واحد را دارد.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

حل : گزینه ۳ درست است.

همان‌طور که ذکر گردید. آنالیز ABC براساس حجم سرمایه درگیر موجودی، کالاها را گروه‌بندی می‌نماید و تنها قیمت ملاک طبقه‌بندی نسبت بلکه قیمت در تقاضا یا همان تقاضا برحسب ریال ملاک طبقه‌بندی است بنابراین گروه A بیشترین حجم سرمایه درگیر موجودی یا تقاضا برحسب ریال را دارد.

**مثال:** در آنالیز ABC اقلام موجودی، گروه اقلامی که شامل بیشترین درصد اقلام بوده ولی کمترین درصد حجم پولی را دارا هستند عبارت است از:

(۱) گروه Z (۲) گروه A (۳) گروه C (۴) گروه B

حل : گزینه ۳ درست است.

**مثال:** هدف از روش تحلیل و طبقه بندی ABC اقلام چیست؟ (کنکور ۸۵)

(۱) اقلام موجودی که می‌بایست کنترل شوند.  
(۲) تفکیک اقلام با ارزش بالا از اقلام با ارزش پایین  
(۳) تعیین سیاست و سیستم مناسب برای کنترل موجودی اقلام (۴) تمامی موارد صحیح است.

حل : گزینه ۳ درست است.

**مثال:** در مورد تجزیه و تحلیل ABC کدام عبارت زیر غلط است؟ (کنکور ۸۷)

(۱) آنالیز ABC را می‌توان بدون توجه به ارزش مصرف سالیانه نیز انجام داد.  
(۲) در تحلیل ABC تحت هر شرایطی تعداد اقلام دسته B کمتر از تعداد اقلام دسته C به دست می‌آید.  
(۳) آنالیز ABC به منظور سیاستگذاری مناسب برای کنترل موجودی اقلام در یک مؤسسه استفاده می‌شود.  
(۴) در تحلیل ABC چنانچه تعداد اقلام دسته A زیاد باشد باید تحلیل را با درصد کمتر A مجدداً انجام داد.

حل : گزینه ۲ درست است.

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

## ۱۱- پیش‌بینی

یکی از قدم‌های ابتدایی در کنترل موجودی، پیش‌بینی تقاضا در آینده است. پیش‌بینی یک تخمین از میزان تقاضا برای یک یا چند محصول در یک پریود زمانی در آینده است.

روش‌های متنوعی برای پیش‌بینی موجود است که با توجه به حساسیت و دقت مورد نیاز جهت کالای مصرفی باید تکنیک مورد نظر را انتخاب نمود. برخی از این روش‌ها به‌صورت زیر است.

در این روش‌ها  $X_i$  معرف تقاضای واقعی سال  $i$  ام و  $\hat{X}_i$  معرف پیش‌بینی سال  $i$  ام می‌باشد.

### ۱- روش معدل (میانگین) ساده

در این روش کلیه داده‌های سال‌های گذشته با هم جمع شده و بر تعداد آن‌ها تقسیم می‌گردد. مقدار به دست آمده برای پیش‌بینی سال آینده و سال‌های آینده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\hat{X}_{t+\ell} = \hat{X}_{t+1} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_t}{t}$$

$$\ell = 1, 2, 3$$

این روش صرفاً برای داده‌هایی مناسب است که دارای میانگین ثابتی بوده و پیرامون آن میانگین نوسان دارند.

**مثال:** تقاضا محصولی در ۴ ماه اخیر به‌صورت زیر بوده است. با استفاده از روش میانگین ساده مقدار پیش‌بینی تقاضا برای ماه ۹ ام برابر است با:

ماه	1	2	3	4
تقاضا	10	30	20	50

$$\hat{X}_9 = \hat{X}_5 = \frac{10 + 30 + 20 + 50}{4} = \frac{110}{4} = 27.5$$

www.ieun.ir

### ۲- روش معدل متحرک ساده

در این روش  $N$  داده آخر با هم جمع شده و بر تعداد آن تقسیم می‌گردد. این روش برای پیش‌بینی سال بعد و سال‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر در سال جدید داده‌ای اضافه گردد، قدیمی‌ترین داده مورد استفاده حذف می‌گردد. این روش تمام خصوصیات روش قبلی را داراست، یعنی برای داده‌هایی که نوسانات زیاد دارند مناسب نمی‌باشد.

**مثال:** در مثال فوق در صورتی که  $N = 3$  باشد، پیش‌بینی تقاضای ماه ۹ ام برابر است با:

$$\hat{X}_9 = \hat{X}_5 = \frac{50 + 20 + 30}{3} = \frac{100}{3} = 33.3$$

یادداشت:

.....

.....

.....

.....

### ۳- روش معدل متحرک تصحیح شده

این روش مانند روش قبل است تنها با برخی اصلاحات در آن روند صعودی و نزولی بودن تقاضا را در نظر می‌گیرد و مقدار عقب افتادگی از روند را به پیش‌بینی اضافه می‌کند.

**نکته :** در روش میانگین متحرک دوپل، از میانگین‌های متحرک ساده به دست آمده نیز میانگین گرفته و پیش‌بینی دوره بعدی را محاسبه می‌کند (در صورتی که بخواهیم روش را به طور کامل بکار ببریم باید حداقل  $2N-1$  داده داشته باشیم)

**نکته :** در روش میانگین متحرک اگر شدت تغییرات مصرف زیاد باشد،  $N$  باید کوچکتر انتخاب شود.

**نکته :** در روش میانگین متحرک اثر شوک به مصرف بعد از  $N$  دوره به طور کامل از بین می‌رود ولی در روش هموار سازی نمایی این اثر تا انتهای ماند و فقط ضریب آن کاسته می‌شود.

**نکته:** جواب میانگین متحرک دوپل با معدل متحرک تصحیح شده یکی است و اساس آنها چندان تفاوتی ندارند.

**مثال:** کدام یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟ (کنکور ۸۵)

- ۱) در روش میانگین متحرک تصحیح شده اگر روند مصرف مثبت باشد همیشه میانگین متحرک از تقاضا (مصرف) کمتر است.
- ۲) در روش میانگین متحرک دوپل (دوگانه) با پارامتر  $N$  حداقل  $2N$  داده برای انجام پیش‌بینی لازم است.
- ۳) در روش میانگین متحرک اگر شدت تغییرات مصرف زیاد باشد  $N$  (پارامتر روش) باید بزرگتر انتخاب شود.
- ۴) اگر یک شوک به مصرف (تقاضا) وارد شود اثر آن در روش هموار سازی نمایی نسبت به روش میانگین متحرک در تعداد دوره کمتری باقی می‌ماند.

**حل :** گزینه ۱ درست است.

**مثال:** در روش میانگین متحرک دوپل کدام گزینه نادرست است؟ (کنکور ۸۹)

- ۱) رویکرد این روش با میانگین متحرک تصحیح شده یکسان است.
- ۲) میانگین متحرک دوپل برای حالت‌هایی که داده‌ها دارای روند باشد کارایی کمی دارند.
- ۳) تنها تفاوت این روش میانگین متحرک تصحیح شده روش تخمین روند است.
- ۴) تخمین روند در این روش از طریق میانگین متحرک میانگین‌های متحرک دوره‌های گذشته قابل محاسبه است.

**حل :** گزینه ۳ درست است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

## ۴- روش هموار سازی نمایی

در این روش تخمین جدید برابر است با تخمین قدیم به علاوه درصدی از اختلاف بین تخمین قدیم و مقدار واقعی همان سال

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha(X_t - \hat{X}_t) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

رابطه فوق را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha)\hat{X}_t$$

به ضریب  $\alpha$  در این روابط ضریب هموارسازی یا ضریب در نظر گرفتن خطا می گویند.

ممکن است که پیش بینی سال های گذشته نیز بر اساس هموارسازی نمایی باشد یعنی:

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha)\hat{X}_t$$

$$\hat{X}_t = \alpha X_{t-1} + (1 - \alpha)\hat{X}_{t-1}$$

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_{t-2} + (1 - \alpha)\hat{X}_{t-2}$$

در این صورت رابطه پیش بینی تقاضای سال آینده بر اساس تقاضای سال های گذشته به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 X_{t-2} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{t-1} X_1 + (1 - \alpha)^t \hat{X}_1$$

مجموع ضریب های رابطه فوق برابر 1 می باشد یعنی:

$$\alpha + \alpha(1 - \alpha) + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{t-1} + (1 - \alpha)^t = 1$$

همان طور که مشاهده می شود در این روش هر پیش بینی بر اساس پیش بینی دوره قبل آن انجام می گردد. ممکن است پیش بینی دوره

قبل نیز بر اساس پیش بینی دوره های قبل انجام شده باشد. اگر بخواهیم از روش هموار سازی نمایی ساده استفاده کنیم باید یک

پیش بینی اولیه داشته باشیم که بر اساس روشی غیر از روش هموارسازی نمایی محاسبه شده باشد ( $\hat{X}_1$ ) این پیش بینی ممکن است

بر اساس N داده قبلی محاسبه شده باشد. هر چه N بیشتر باشد، ضریب هموارسازی ( $\alpha$ ) کمتر است. برای محاسبه  $\alpha$  می توان از

رابطه زیر استفاده کرد:

$$\alpha = \frac{2}{N + 1}$$

در نظر گرفتن خطا یا هموارسازی از پیش بینی پایه شروع شده و تا پیش بینی سال  $t + 1$  ( $\hat{X}_{t+1}$ ) ادامه می یابد.

لازم به ذکر است که این روش روند صعودی یا نزولی تقاضا را به خوبی در نظر نمی گیرد یعنی در صورتی که تقاضا روند صعودی داشته

باشد پیش بینی انجام شده از این روش همیشه از مقدار واقعی کمتر است و در صورتی که تقاضا روند نزولی داشته باشد این پیش بینی

بزرگتر از مقدار واقعی خواهد بود.

**نکته:** هر چه  $\alpha$  بیشتر باشد به داده های نزدیک (سال های اخیر) اهمیت بیشتری داده می شود و بالعکس، به عنوان مثال اگر

$\alpha = 0.9$  باشد جمع ضریب سه سال اخیر  $\alpha + \alpha(1 - \alpha) + \alpha(1 - \alpha)^2 = 0.999$  خواهد بود و بنابراین به تمام داده های

قبل از آن تنها به میزان 0.001 اهمیت داده خواهد شد.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....



**نکته:** برای پیش‌بینی دوره  $t$ ام،  $(A_t)$  به پیش‌بینی دوره  $t-1$   $(A_{t-1})$  و تقاضای واقعی دوره  $t-1$   $(X_{t-1})$  نیاز است.

**مثال:** با افزایش مقدار ضریب هوار سازی نمای اهمیت دوره‌های نزدیک‌تر بیشتر و ضریب دوره‌های دورتر کمتر خواهد شد بنابراین اثر شوک تقاضا سریع‌تر از بین خواهد رفت. در روش هموار سازی نمایی بدون روند با  $\alpha=0.1$  مقدار  $A_{t-1}=100$  و مقدار  $x_t=150$  به دست آمده است اگر  $\alpha$  به  $0.2$  تغییر پیدا کند  $A_t$  چقدر خواهد بود؟ (ظ  $A_t =$  پیش‌بینی دوره  $t$ ام ،  $x_t =$  تقاضای واقعی دوره  $t$ ام). (کنکور ۸۷)

- (۱)  $A_t=105$       (۲)  $A_t=110$       (۳)  $110 \geq A_t > 105$       (۴) هیچ کدام

**حل:** گزینه ۴ درست است.

با توجه به نکته بالا امکان پیش‌بینی وجود ندارد.

**مثال:** کدام عبارت در مورد روش پیش‌بینی هموار سازی نمایی صحیح نیست؟ (کنکور ۸۸)

- (۱) یک روش مدل وزنی برای پیش‌بینی تقاضا است.  
 (۲) تغییرات تصادفی داده‌ها را هموار (smooth) می‌کند.  
 (۳) یک روش مدل وزنی است که به داده‌های گذشته وزن یکسان می‌دهد.  
 (۴) نسبت به روش مدل متحرک ساده به داده‌های کمتری برای پیش‌بینی نیاز دارد.

**حل:** گزینه ۳ درست است.

**نکته:** وزن‌های تخصیص یافته به داده‌های گذشته در روش هموار سازی نمایی از تصاعد هندسی با فاکتور  $1-\alpha$  پیروی می‌کنند و بنابراین با هم برابر نیستند.

**مثال:** ضریب هموار سازی نمایی برای پیش‌بینی کالایی  $0.5$  است. وزنی که به داده‌های سه دوره قبل داده می‌شود، چقدر است؟ (کنکور ۸۹)

- (۱)  $\frac{1}{16}$       (۲)  $\frac{1}{32}$       (۳)  $\frac{1}{8}$       (۴)  $\frac{1}{4}$

**حل:** گزینه ۳ درست است.

$$\alpha=0.5$$

$$\alpha(1-\alpha)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

## ۵- روش هموارسازی نمایی تصحیح شده

این روش مانند روش قبلی است که با تصحیح آن روند صعودی و نزولی تقاضا در نظر گرفته می‌شود.

**مثال:** در کدام یک از حالات زیر روش نمو هموار (هموارسازی نمایی) با تصحیح روند استفاده می‌شود؟

- (۱) مصرف کالا دارای روند افزایش باشد.  
 (۲) مصرف کالا دارای روند کاهش باشد.  
 (۳) مصرف کالا دارای نوسانات زیاد باشد.  
 (۴) هر سه مورد فوق

**حل:** گزینه ۴ درست است.

همان‌طور که ذکر گردید، روش همواره سازی نمایی با تصحیح روند برای حالاتی استفاده می‌شود که تقاضا دارای روند افزایشی یا کاهشی یا دارای نوسانات زیاد باشد.

**مثال:** پیش‌بینی تقاضای کالایی در دوره  $t$  با استفاده از روش نمو هموار (هموارسازی نمایی) با ضریب ثابت  $\alpha = 0.2$  و  $\alpha = 0.3$  برابر است با:

www.ieun.ir

$\alpha = 0.2$		$\alpha = 0.3$	
پیش‌بینی	خطا	پیش‌بینی	خطا
80	5	91	6

پیش‌بینی مصرف دوره  $t + 1$  عبارتست از:

- (۱) 81 واحد      (۲) 93 واحد      (۳) 96 واحد      (۴) 87 واحد

**حل:** گزینه ۱ درست است.

ابتدا باید مقدار واقعی تقاضای دوره  $t$  را محاسبه کنیم. با توجه به پیش‌بینی و مقدار خطاهای داده شده می‌توان مقدار تقاضای واقعی دوره  $t$  را محاسبه کرد.

$$\alpha = 0.2 \rightarrow \text{مقدار واقعی} \begin{cases} 80 - 5 = 75 \\ 80 + 5 = 85 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.3 \rightarrow \text{مقدار واقعی} = \begin{cases} 91 - 6 = 85 \\ 91 + 6 = 97 \end{cases}$$

از اعداد فوق برمی‌آید که  $X_t = 85$  است. حال باید  $\hat{X}_{t+1}$  را با  $\alpha = 0.2$  و  $\alpha = 0.3$  محاسبه کنیم.

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha(X_t - \hat{X}_t)$$

$$\alpha = 0.2 \Rightarrow \hat{X}_{t+1} = 80 + 0.2(85 - 80) = 81$$

$$\alpha = 0.3 \Rightarrow \hat{x}_{t+1} = 91 + 0.3(85 - 91) = 89.2$$

که تنها 81 در گزینه‌ها موجود است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....

**مثال:** مقدار مصرفی واقعی و پیش‌بینی مصرف بر اساس دو روش معدل متحرک و نمو همواره (هموارسازی نمایی) برای دو دوره گذشته طبق جدول می‌باشد. پیش‌بینی مصرف دوره بعد (دوره سوم) چقدر است؟

مقدار پیش‌بینی		مصرف واقعی	دوره
معدل متحرک	نمو همواره		
29	28	30	1
26	28.4	28	2

27.5 (۴)

28.3 (۳)

29 (۲)

29.5 (۱)

حل : گزینه ۳ درست است.

از آنجا که  $N$  مشخص نمی‌باشد نمی‌توان از روش معدل متحرک برای پیش‌بینی استفاده کرد. برای پیش‌بینی از روش نمو همواره نیز باید  $\alpha$  را از روش زیر به دست آوریم:

$$\hat{X}_{t+1} = X_t + \alpha(X_t - \hat{X}_t)$$

$$\hat{X}_2 = \hat{X}_1 + \alpha(X_1 - \hat{X}_1) \Rightarrow 28.4 = 28 + \alpha(30 - 28) \Rightarrow \alpha = 0.2$$

$$\hat{X}_3 = \hat{X}_2 + \alpha(X_2 - \hat{X}_2) = 28.4 + 0.2(28 - 28.4) = 28.32$$

**مثال:** در پیش‌بینی مصرف قطعات یدکی در یک انبار از روش هموارسازی نمایی (Exponential Smoothing) استفاده شده است. برای کالای  $B, A$  مقدار ضریب ثابت هموارسازی نمایی ( $\alpha$ ) به ترتیب 0.2 و 0.3 منظور شده است. در پیش‌بینی مصرف کدام یک از دو کالا به مصارف دوره‌های قبل اهمیت بیشتری داده شده است؟

(۲) کالای B

(۱) کالای A

(۴) اطلاعات کافی نیست.

(۳) جواب بستگی به تغییرات  $\alpha$  ندارد.

حل : گزینه ۱ درست است.

هر چه  $\alpha$  کمتر باشد به مصارف دوره‌های قبل اهمیت بیشتری داده می‌شود.

**مثال:** در روش پیش‌بینی هموار سازی نمایی اگر  $\alpha=0.2$  باشد. (کنکور ۸۶)

(۱) با افزایش  $\alpha$  به 0.3 اثر شوک تقاضا سریع‌تر از بین خواهد رفت.

(۲) با انتخاب  $A_0$  بزرگتر می‌توان اثر کوچک بودن  $\alpha$  را کم کرد.

(۳) اثر یک شوک وارد شده به تقاضا پس از چهار دوره برابر 0.065 خواهد بود.

(۴) اهمیت تقاضای دوره‌های با فاصله زیادتر افزایش خواهد بود.

حل : گزینه ۱ درست است.

**یادداشت:**

.....

.....

.....

.....



# جزوه باما

دانلود جزوات، نمونه سوالات  
و پروپونته‌های دانشگاهی

**Jozvebama.ir**

