حل تمرینات ریاضیات مهندسی

مبحث سری فوریه

تهیه و تدوین:

محسن محمدرضاپورطبری

کاری از واحد آموزشی انجمن تخصصی مهندسی علوم آب

www.waterse.ir

با سلام خدمت همه دانشجویان عزیز

این مجموعه که در پیش رو دارید حاصل جمع آوری تمرینات مهم و مسائلی که در آزمون های پایان ترم و کنکور کارشناسی ارشد مکرر تکرار شده است. هدف بنده از تهیه این مجموعه سوال و جواب، صرفه‌جویی در وقت دانشجویان و تمرکز دانشجویان بر روی یک مجموعه به منظور کسب موفقیت بیشتر بوده است.

به نظر بنده با خواندن این سوالات، دانشجویان می‌توانند در امتحانات پایان ترم و در آزمون های کنکور کارشناسی ارشد نمره و درصد خوبی کسب کنند.

این مجموعه از کتب مرجع ریاضیات مهندسی و معادلات دیفرانسیل، همچون بویس، سیمونز، شومز، نیکوکار، معتقدی، شیدفر و ... گرداوری شده و سعی شده با زبانی ساده و به دور از تکلف مسائل سری فوریه را بازگو کند.

هر مجموعه در ابتدای راه دارای نواقصی است که می‌طلبد خوانندگان عزیز بنده را در این امر همراهی کنند و با نظرات خودشان چراغی روشن در این مسیر باشند.

ابتدا سری فوریه تابع $f(x) = x\sin x$ در فاصله‌ی $(0,\pi)$ را نوشته و با استفاده از مشتق سری فوریه، $g(x) = x\cos x$ را بدست آورید.

$$f(x) = f(x+2\pi) \qquad , \qquad -\pi < x < \pi$$

جواب قسمت اول:

1. $f(x) = x\sin x$

$f(-x) = f(x) \quad \rightarrow$ تابع زوج

$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = 2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\sin(n+1)x - \sin(n-1)\,x)\,dx$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}$$

چون $(a_1) = -\frac{1}{2}$ می‌شود پس در سری فوریه n از ۲ شروع می‌شود:

$$x\sin x = 1 - \frac{\cos x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos \mathrm{nx}\right)$$

جواب قسمت دوم:

2. $g(x) = x\cos x$

$\xrightarrow{\text{چون}} \; f(-\pi) = f(\pi) \quad \rightarrow$

پس می‌توان جمله به جمله مشتق گرفت:

$$x\cos x=-\frac{3\sin x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2n\overbrace{(-1)^n}^{\boxed{\cos n\pi}}}{n^2-1}\sin nx\right)$$

ابتدا سری فوریه تابع $f(x)=t^3$ در فاصله‌ی $(0,\pi)$ را نوشته و ثابت کنید:

$$f(x)=f(x+2\pi)\qquad,\qquad -\pi<x<\pi$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}\pm\cdots=\frac{\pi^3}{32}$$

جواب قسمت اول:

3. $f(x)=x\sin x$

$-f(-x)=f(x)\quad\rightarrow$ تابع فرد

$a_n=a_0=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3\sin nx\,dx=2\left[-\frac{\pi^2}{n}(-1)^n+\frac{6}{n^3}(-1)^n\right]$$

$$x^3=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(-\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1}+\frac{6}{n^3}(-1)^n\right)\sin nx$$

جواب قسمت دوم:

4. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1^k}{(2k+1)^3}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}\pm\cdots=\frac{\pi^3}{32}$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}}\quad\frac{\pi^3}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(-\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1}+\frac{6}{n^3}(-1)^n\right)\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$\to \frac{\pi^3}{16} = \sum_{2k+1=1}^{\infty} \left(-\frac{\pi^2}{2k+1}(-1)^{2k+2} + \frac{6}{(2k+1)^3}(-1)^{2k+1} \right) \sin(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\to \frac{\pi^3}{16} = \pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{2k+1} \right) - 6\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

$$\to \frac{\pi^3}{16} = \pi^2 \times \frac{\pi}{4} - 6\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \quad \to \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

ابتدا سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ در فاصله‌ی $(0, \pi)$ را نوشته، سپس با انتگرال گیری در فاصله فوق، نشان دهید :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin x}{n^3} = \frac{1}{12} x(\pi^2 - x^2)$$

و با استفاده از جواب قسمت دوم، نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

سپس با استفاده از پارسوال و قسمت اول، نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

سپس با استفاده از پارسوال و قسمت دوم، نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\boldsymbol{f(x) = f(x+2\pi) \quad , \quad -\pi < x < \pi}$$

جواب قسمت اول:

5. $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

$f(-x) = f(x) \quad \rightarrow$ تابع زوج

$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

جواب قسمت دوم:

6. $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin x}{n^3} = \frac{1}{12}x(\pi^2 - x^2)}$

از دو طرف سری فوریه انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^{x} x^2\,dx = \int_0^{x}\frac{1}{3}\pi^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\int_0^{x}\cos nx dx$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\pi^2 x + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

جواب انتگرال بدست آمده را تقسیم بر ۴ می‌کنیم که قضیه اثبات می‌شود.

جواب قسمت سوم:

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$

با استفاده از آزمون و خطا $x=\frac{\pi}{2}$ را در جواب قسمت دوم قرار می‌هیم:

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin x}{n^3}=\frac{1}{12}x(\pi^2-x^2)$$

$$\left\{\begin{matrix}\frac{1}{12}\times\frac{\pi}{2}\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\pi^3}{32}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\sin n\frac{\pi}{2}\xrightarrow{n=2k+1}\sum_{2k+1=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}}{(2k+1)^3}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\xrightarrow{k=n-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}\end{matrix}\right\}$$

جواب قسمت چهارم:

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

$$b_n=0\ \ ,a_0=\frac{2}{3}\pi^2\ \ ,a_n=4\frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\xRightarrow{\text{معادله پارسوال}}\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{{a_0}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2+{b_n}^2\rightarrow$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2)^2dx=\frac{\left(\frac{2}{3}\pi^2\right)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(4\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^2\rightarrow$$ که اثبات می‌شود

جواب قسمت پنجم:

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$

$$a_0=a_n=0 \quad , \quad b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{144}\int_0^{\pi}[x^6+\pi^4x^2-2\pi^2x^4]dx=\frac{\pi^6}{945}$$

ابتدا سری فوریه تابع $f(x)=e^{ax}$ در فاصله‌ی $(0,\pi)$ را نوشته، سپس a_n و b_n را محاسبه کنید.

$$f(x)=f(x+2\pi) \qquad , \qquad -\pi<x<\pi$$

10. $f(x)=e^{ax}$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}e^{-inx}\,dx=\frac{\sin h(a\pi)}{\pi}\times\frac{a+i\pi}{a+n^2}(-1)^n$$

$$e^x=\frac{\sin h(a\pi)}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{a+i\pi}{a+n^2}(-1)^n e^{inx}$$

$$a_n=c_n+c_{-n}=\frac{\sin h(a\pi)}{\pi}(-1)^n\left[\frac{a+i\pi}{a+n^2}+\frac{a-i\pi}{a+n^2}\right]=\frac{2\sin h(a\pi)}{\pi}\frac{(-1)^n}{a+n^2}$$

$$b_n=i(c_n-c_{-n})=(-2n)\frac{2\sin h(a\pi)}{\pi}\frac{(-1)^n}{a+n^2}$$

سری فوریه توابع زیر را بدست آورید.

$11. f(x) = \sin hx \qquad f(x) = f(x+2\pi) \quad , \quad -\pi < x < \pi$

$-f(-x) = f(x) \quad \rightarrow$ تابع فرد

$a_n = a_0 = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin hx \sin nx\, dx = \frac{-2n(-1)^n \sin h\pi}{\pi(n^2+1)}$$

$$f(x) = \frac{2\sin h\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n(-1)^{n+1}}{n^2+1}\right)\sin nx$$

$12. f(x) = x^2$

$f(-x) = f(x) \quad \rightarrow$ تابع زوج

$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} n \text{ زوج} & \rightarrow & 0 \\ n \text{ فرد} & \rightarrow & -2 \end{Bmatrix}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=2k+1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

$13. f(x) = \begin{Bmatrix} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{Bmatrix}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin nx\, dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{-2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{-[(-1)^n + 1]}{\pi(1-n^2)} \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} n \text{ زوج} & \rightarrow & 2 \\ n \text{ فرد} & \rightarrow & 0 \end{Bmatrix}$$

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{2k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k)x}{1-4k^2}$$

14. $\boldsymbol{f(x) = x + |x| \qquad f(x) = f(x+2\pi) \quad , \quad -\pi < x < \pi}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (2x)\, dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (2x) \cos nx \, dx = \frac{4}{n^2\pi} \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (2x) \sin nx \, dx = \frac{2}{n}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \rightarrow$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi}\cos \text{nx} + \frac{2}{n}\sin \text{nx}\right)$$

15. $\boldsymbol{f(x) = \begin{Bmatrix} x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ x - x & \frac{\pi}{2} < x < 3\frac{\pi}{2} \end{Bmatrix} \qquad f(x) = f(x+2\pi)}$

$-f(-x) = f(x) \quad \rightarrow \quad$ تابع فرد

$$a_n = a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx = \frac{4}{n^2\pi}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi}\sin \text{nx}\right)$$

16. $\boldsymbol{f(x) = x|x| \qquad f(x) = f(x+2\pi) \quad , \quad -1 < x < 1}$

$-f(-x) = f(x) \quad \rightarrow$ تابع فرد

$$a_n = a_0 = 0$$

$$b_n = 2\int_0^1 x^2 \sin n\pi x \, dx = 2\left[\frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3}\right]$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\left[\frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3}\right]\sin \mathrm{n\pi x}\right)$$

17. $\boldsymbol{f(x) = |\sin x| \qquad f(x) = f(x+2\pi) \quad , \quad -\pi < x < \pi}$

$f(-x) = f(x) \quad \rightarrow$ تابع زوج

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{1+n} + \frac{(-1)^n}{1-n}\right]$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{1+n} + \frac{(-1)^n}{1-n}\right]\cos 2nx$$

18. $\boldsymbol{f(x) = \cos hx \qquad f(x) = f(x+2\pi) \quad , \quad 0 < x < \pi}$

$f(-x) = f(x) \quad \rightarrow$ تابع زوج

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos hx \, dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos hx \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (e^x + e^{-x}) \cos nx \, dx$$

$$\mathbf{19.}\boldsymbol{f(x)} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1 \le x < 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0 < x \le 1} \end{matrix}\right\} \quad \boldsymbol{f(x) = f(x+2)}$$

$$a_n = \int_{-1}^{0} \cos n\pi x \, dx = 0$$

$$a_1 = \int_{-1}^{0} dx = 1$$

$$b_n = \int_{-1}^{0} \sin n\pi x \, dx = -\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi) \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} n \text{ زوج} & \rightarrow & 0 \\ n \text{ فرد} & \rightarrow & 2 \end{matrix}\right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\,\pi x$$

$$\mathbf{20.}\boldsymbol{f(x)} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{1+\frac{2}{x}x} & \mathbf{-\pi \le x < 0} \\ \mathbf{1-\frac{2}{x}x} & \mathbf{0 \le x < \pi} \end{matrix}\right\}$$

$$f(-x) = f(x) \quad \rightarrow \quad \text{تابع زوج}$$

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left(1 - \frac{2}{x}x\right) dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left(1 - \frac{2}{x}x\right) \cos nx \, dx = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^{n+1}+1\right]$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{[(-1)^{n+1}+1]}{n^2} \cos nx$$

$$\mathbf{21.}\boldsymbol{f(x)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\pi} \le \boldsymbol{x} < \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \le \boldsymbol{x} < \boldsymbol{\pi} \end{Bmatrix}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{1}{n\pi}[(-1)^{n+1} + 1]$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{[(-1)^{n+1} + 1]}{n} \sin nx$$

$$\mathbf{22.}\boldsymbol{f(x)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} & \mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \mathbf{1} \\ \mathbf{1} - \boldsymbol{x} & \mathbf{1} < \boldsymbol{x} < \mathbf{2} \end{Bmatrix}$$

$$b_n = \int_0^1 x \sin n\pi x\, dx + \int_1^2 (1 - x) \sin n\pi x = \frac{1}{n}[(-1)^n + 1]$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \int_0^1 x \cos n\pi x\, dx + \int_1^2 (1 - x) \cos n\pi x = \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] \cos n\pi x + \frac{1}{n}[(-1)^n + 1] \sin n\pi x\right)$$

سری فوریه سینوسی-کسینوسی توابع زیر را بدست آورید.

23. $f(x) = e^x \qquad 0 < x < \pi$

$a_n = a_0 = 0 \quad \rightarrow$ سینوسی

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \sin nx\, dx = \frac{2e^{\pi}n}{\pi(1+n^2)}[1-(-1)^n] \Rightarrow \begin{Bmatrix} n \text{ زوج} & \rightarrow & 0 \\ n \text{ فرد} & \rightarrow & 2 \end{Bmatrix}$$

$$f(x) = \frac{4e^{\pi}}{\pi}\sum_{n=2k+1}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{(2k+1)^2+1}\right)\sin(2k+1)x$$

$b_n = 0 \quad \rightarrow$ کسینوسی

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x\, dx = \frac{2}{\pi}(e^{\pi}-1)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi(1+n^2)}[e^{\pi}(-1)^n - 1]$$

$$f(x) = \frac{(e^{\pi}-1)}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{[e^{\pi}(-1)^n-1]}{(n)^2+1}\right)\cos nx$$

24. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad 0 < x < \pi$

$a_n = a_0 = 0 \quad \rightarrow$ سینوسی

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin nx\, dx = \frac{8n\cos n\pi}{\pi(1-4n^2)} = \frac{8n(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}$$

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=2k+1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{(1-4n^2)}\sin(n)x$$

25. $\boldsymbol{f(x) = (x-1)^2} \qquad \boldsymbol{0 < x < 1}$

$b_n = 0 \quad \rightarrow$ کسینوسی

$$a_0 = 2\int_0^1 (x-1)^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$a_n = 2\int_0^1 (x-1)^2 \cos n\pi x\,dx \xrightarrow{\text{از روش جز به جز انتگرال میگیریم}} \frac{4}{\pi^2 n^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^2}$$

تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید.

$$26.\boldsymbol{f(x)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{e^{-x}} & \boldsymbol{x > 0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x < 0} \end{Bmatrix}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x} e^{i\omega t}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{1 + i\omega}$$

تبدیل فوریه کسینوسی تابع زیر را بدست آورده و نشان دهید:

$$\int_0^\infty \frac{(x\cos x - \sin x)^2}{x^6} dx = \frac{\pi}{15}$$

$$27.\boldsymbol{f(x)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{|x| > 1} \\ \boldsymbol{1 - x^2} & \boldsymbol{|x| < 1} \end{Bmatrix}$$

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 (1 - x^2)\cos \omega x\, dx = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^3}$$

با استفاده از اتحاد پارسوال:

$$\int_0^\infty f^2\, dt = \int_0^\infty F_c(\omega)^2\, dt$$

$$\int_0^1 (1 - x^2)^2\, dx = \frac{8}{15} = \frac{8}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\omega\cos\omega - \sin\omega^2)}{\omega^6} \xrightarrow{\omega\to x}$$

$$\int_0^\infty \frac{(x\cos x - \sin x)^2}{x^6} dx = \frac{\pi}{15}$$

تبدیل معکوس فوریه تابع زیر را بدست آورید.

$$28.\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{e^{-\omega}}$$

$$F^{-1}\big(F(\omega)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\omega} e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{1 + ix}$$

تبدیل فوریه سینوسی تابع زیر بدست آورده و به کمک آن انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x} dx$$

29. $f(x) = e^{-|x|}$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$F^{-1}{}_s\big(F(\omega)\big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1+\omega^2} \sin \omega x \, d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x} \xrightarrow{x=1} \frac{\pi}{2} e$$

مقدار A را طوری بیابید که تساوی زیر برقرار باشد:

30. $\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{1+\omega^2} d\omega = Ae^{-\omega}$

در صورت سوال سینوس وجود دارد پس:

$$A(\omega) = 0$$

$$B(\omega) = 2A \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \omega x \, dx = 2A \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$f(x) = \frac{2A}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{1+\omega^2} \sin \omega x \, d\omega \;\rightarrow\; \frac{2A}{\pi} = 1 \;\rightarrow A = \frac{\pi}{2}$$

انتگرال فوریه تابع زیر را بیابید:

31. $f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ \sin hx & |x| < 1 \end{cases}$

تابع فرد است پس:

$$A(\omega) = 0$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin hx \sin \omega x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^x \sin \omega x \, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{-x} \sin \omega x \, dx$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}[e^1(\sin\omega+\omega\cos\omega)-e^{-1}(-\sin\omega+\omega\cos\omega)]$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi^2(1+\omega^2)}\int_0^\infty[e^1(\sin\omega+\omega\cos\omega)-e^{-1}(-\sin\omega+\omega\cos\omega)]\sin\omega x\,dx$$

انتگرال فوریه تابع زیر را بیابید:

$$\mathbf{32.}\,f(x)=\begin{cases}0 & |x|>\pi\\ x & |x|<\pi\end{cases}$$

تابع فرد است پس:

$$A(\omega)=0$$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin\omega x\,dx=\frac{2}{\omega\pi}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega\pi-\pi\cos\omega\pi\right]$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega\pi-\pi\cos\omega\pi\right)\sin\omega x\,dx$$

تبدیل فوریه تابع زیر بدست آورده و به کمک آن انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$$

$$\mathbf{33.}\,f(x)=\begin{cases}0 & |x|>1\\ 1 & |x|<1\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^1 e^{-\omega}e^{-i\omega x}\,dx=2\frac{\sin\omega}{\sqrt{2\pi}\,\omega}\xRightarrow{\omega=0}F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

با استفاده از فرمول تبدیل معکوس اثبات می‌کنیم:

$$F^{-1}(F(\omega))=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{-i\omega x}\,d\omega\xRightarrow{x=0}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$