Subject:
Year. Month. Date. ( ) ۱۴۰۱/۱۱/۲۴ جلسه اول

«جبر خطی»

فصل اول: سیستم معادلات خطی

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ -x + y - z = -3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

سه عملگر که پاسخ دستگاه را تغییر نمی‌دهند:

سه عملگر مقدماتی

۱ـ ضرب یک معادله در یک عدد غیرصفر

۲ـ جابجایی دو معادله

۳ـ ضرب معادله i ام در α ، جمع آن با معادله j ام و جایگذاری به جای معادله j ام

در مثال بالا $\rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}R_1 + R_2 \longrightarrow R_2 \Rightarrow \frac{3}{2}y - \frac{3}{4}z = -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}R_1 + R_3 \longrightarrow R_3 \Rightarrow y + \frac{3}{2}z = 3 \end{cases} \longrightarrow R_3 - \frac{3}{2}R_2 \longrightarrow R_3$$

اگر داخل دایره صفر شود، سطر فعلی را با یکی از سطرهای پایینی تعویض می‌کنیم. اگر ضریب متغیر مربوطه در تمامی سطرهای پایینی نیز صفر باشد، یک واحد به سمت راست حرکت می‌کنیم.

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ \quad \frac{3}{2}y - \frac{3}{4}z = -\frac{3}{2} \\ \quad y + \frac{3}{2}z = 3 \end{cases}$$

مرحله اول

* Pivotal position

Pivotal value (عدد داخل دایره)

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \longrightarrow 4x + 2(0) - (2) = 6 \rightarrow x = 1 \\ \quad \frac{3}{2}y - \frac{3}{4}z = -\frac{3}{2} \longrightarrow \frac{3}{2}y - \frac{3}{4}(2) = -\frac{3}{2} \rightarrow y = 0 \\ \quad 2z = 4 \longrightarrow z = 2 \end{cases}$$

اتمام روش حذف گاوس

پس از اتمام روش حذف گاوس می‌توان با استفاده از base substitution پاسخ دستگاه را بدست آورد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

به فرم ماتریسی:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}}_{A = \text{ماتریس ضرایب}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{x}\ \text{بردار مجهولات}} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۶ \\ -۳ \\ ۶ \end{bmatrix}}_{\vec{b}\ \text{بردار سمت راست}}$$

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} ۴ & ۲ & ۱ & ۶ \\ -۱ & ۱ & -۱ & -۳ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۶ \end{array}\right]$$

, ماتریس افزوده ← Agumented Matrix

$$M = [A \mid b]$$

می توان سه عملگر مقدماتی را بر روی سطرهای ماتریس پیاده سازی کرد. در این حالت ماتریس نهایی مثال قبل برابر خواهد شد با:

$$\begin{bmatrix} ٤ & ۲ & ۱ & ۶ \\ ۰ & \frac{۳}{۲} & -\frac{۳}{۴} & -\frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۲ & ٤ \end{bmatrix}$$

به تعداد pivot های یک ماتریس، مرتبه آن ماتریس گفته می شود. (Rank)

حالتهای ممکن برای یک دستگاه خطی:

۱- یک پاسخ یکتا دارد.

۲- پاسخ ندارد.

۳- بی نهایت پاسخ دارد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

if $A \in R^{n \times m} \rightarrow Rank(A) \leqslant \min(n, m)$

روش حذف گاوس جردن

در این روش علاوه بر قوانین روش گاوس، عدد هر مکان Pivot را به یک تبدیل کرده و ضمنا اعداد بالای هر Pivot را مشابه اعداد پایین آن صفر می‌کنیم

$$\begin{cases} x + y + z = ۳ \\ ۲x + y - z = ۰ \\ x - y - z = -۱ \end{cases} \quad \begin{array}{l} -۲R_۱ + R_۲ \rightarrow R_۲ \\ -R_۱ + R_۳ \rightarrow R_۳ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۱ & -۳ & -۶ \\ ۰ & -۲ & -۲ & -۴ \end{bmatrix} \; -R_۲ \rightarrow R_۲ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۶ \\ ۰ & -۲ & -۲ & -۴ \end{bmatrix} \; \begin{array}{l} -R_۲ + R_۱ \rightarrow R_۱ \\ ۲R_۲ + R_۳ \rightarrow R_۳ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۸ \end{bmatrix} \; \tfrac{۱}{۴}R_۳ \rightarrow R_۳ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \; \begin{array}{l} ۲R_۳ + R_۱ \rightarrow R_۱ \\ -۳R_۳ + R_۲ \rightarrow R_۲ \end{array}$$

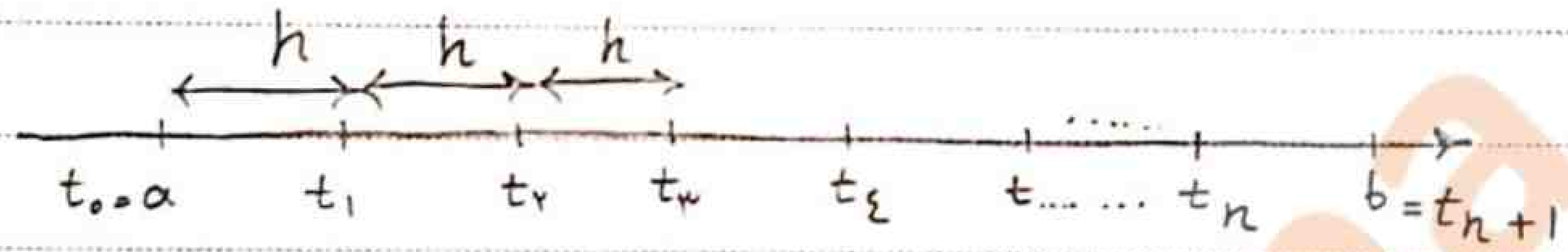
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} x = ۱ \\ y = ۰ \\ z = ۲ \end{array}$$

Two-point Boundary Value Problems

مسائل با شرایط مرزی دوگانه (کاربرد از دستگاه معادلات خطی)

$$u(t)\, y''(t) + v(t)\, y'(t) + w(t)\, y(t) = f(t)$$

$$\begin{cases} y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$



$$h = \frac{b-a}{n+1}$$

$t_0 = a$, $t_1 = a + h$, $t_2 = a + 2h$, $t_3 = a + 3h$, ... , $t_n = a + nh$, $t_{n+1} = a + (n+1)h = b$

بسط تیلور y حول نقطه t_i

$$y(t_i + h) = y(t_i) + y'(t_i)h + \frac{1}{2!} y''(t_i) h^2 + \frac{1}{3!} y'''(t_i) h^3 + \ldots$$

$$y(t_i - h) = y(t_i) - y'(t_i)h + \frac{1}{2!} y''(t_i) h^2 - \frac{1}{3!} y'''(t_i) h^3 + \ldots$$

تفریق $= \quad y'(t_i) = \dfrac{y(t_i+h) - y(t_i-h)}{2h} + O(h^3)$

جمع $= \quad y''(t_i) = \dfrac{y(t_i-h) - 2y(t_i) + y(t_i+h)}{h^2} + O(h^4)$

با جالذاری تخمین $y'(t_i)$ بصورت $y'_i \cong \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ و تخمین $y''(t_i)$ بصورت $y''_i \cong \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$ برای

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$ یک دستگاه معادله خطی با n رابطه و n مجهول بدست می آید. با حل دستگاه می توان y_i ها را استخراج کرد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y(t_i) = y_i \quad , \quad y(t_i + h) = y_{i+1} \quad , \quad y(t_i - h) = y_{i-1}$

مثال ۱

$y''(t) = f(t) \qquad y(0) = 0 \quad y(1) = 0$

$$y''_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f(t_i) = f_i$$

$$-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = -h^2 f_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$i=1 \qquad -y_0 + 2y_1 - y_2 = -h^2 f_1$

$i=2 \qquad -y_1 + 2y_2 - y_3 = -h^2 f_2$

$i=3 \qquad -y_2 + 2y_3 - y_4 = -h^2 f_3$

$\vdots$

$i=n-1 \qquad -y_{n-2} + 2y_{n-1} - y_n = -h^2 f_{n-1}$

$i=n \qquad -y_{n-1} + 2y_n - y_{n+1} = -h^2 f_n$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h^2 f_1 + y_0 \\ -h^2 f_2 \\ -h^2 f_3 \\ \vdots \\ -h^2 f_{n-1} \\ -h^2 f_n + y_{n+1} \end{bmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Ill _ Conditioned Systems   سیستم های بدتعریف

$$\begin{cases} 0.835x - 0.667y = 0.168 \\ 0.333x + 0.266y = 0.067 \end{cases} \qquad \text{Solution} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 0.835x - 0.667y = 0.168 \\ 0.333x + 0.266y = 0.066 \end{cases} \qquad \text{Solution} \Rightarrow \begin{matrix} x = -666 \\ y = 834 \end{matrix}$$

سیستمی بدتعریف است که اگر یکی از درایه های ماتریس A و یا بردار b اگر کمی تغییر کند، پاسخ دستگاه تغییر چشمگیری داشته باشد.

فصل دوم: سیستم های مثلثی و فرم پلکانی

مثال) حذف گاوسی را بر روی دستگاه زیر پیاده سازی کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + \quad + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + \quad + 4x_4 = 7 \end{cases} \Rightarrow [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\rightarrow\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3$$
$$-2x_3 - 2x_4 = -2$$
$$0 = 0$$
$$\underline{0 = 3}\ ???$$ دستگاه پاسخ ندارد.

در هر مرحله از روش حذف گاوس (یا گاوس جردن) اگر به سطری رسیدیم که به حالت زیر باشد، در این صورت دستگاه

پاسخ ندارد. به دستگاهی که پاسخ ندارد، دستگاه ناسازگار گویند. (inconsisted) $(0\ 0\ 0\ \dots\ 0 \mid \alpha),\ \alpha \neq 0$

نتیجه نهایی کاهش گاوس (حتی اگر طول پله های ایجاد شده یکسان نباشد) به نام فرم reduced echelan

شناخته می شود. $[A \mid b] \xrightarrow{\text{Gauss}} [E \mid c]$

پس از اتمام اعمال حذف گاوس ماتریس ضرایب جدید با نام E (حرف اول Echelan) شناخته می شود.

آیا ماتریس E یکتا است؟ خیر ، آیا شکل (فرم) ماتریس E یکتا است؟ بلی

تعریف رتبه ماتریس: (Rank)

تعداد Pivot ها در ماتریس A

تعداد سطرهای غیرصفر در ماتریس E

تعداد ستون های اصلی در ماتریس A

تعریف ستون های اصلی ماتریس (basic columns): به ستون هایی که دارای Pivot هستند، ستون های اصلی گفته می شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فرض کنید، روش حذف گاوس جردن را به ماتریس $[A|b]$ اعمال کرده‌ایم.

$$[A|b] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordon}} [E_A|d]$$

آیا ماتریس E_A یکتا است؟ بلی ، آیا فرم ماتریس E_A یکتا است؟ بلی

مثال) با یافتن E_A، مرتبه A را استخراج کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1-2R_2 \rightarrow R_1$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_A$$

ستون های اصلی A $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Syntax

A_{*1} = ستون 1

A_{3*} = سطر 3

جلسه سوم - ۱۴۰۱/۱۲/۶

با استخراج E_A می‌توان به سادگی رابطه حاکم مابین ستون های اصلی و غیراصلی را استخراج کرد.

(هر ستون غیراصلی در E_A یک ترکیب خطی از ستون های اصلی سمت چپ آن است)

همان رابطه مابین ستون های ماتریس A نیز برقرار است.

$[E_A]_{*2} = 2[E_A]_{*1}$ $\qquad$ $A_{*4} = A_{*1} + A_{*3}$

$[E_A]_{*4} = 1[E_A]_{*1} + 1[E_A]_{*3}$ $\qquad$ $A_{*2} = 2A_{*1}$

مثال) ستون های غیراصلی A را براساس ستون های اصلی آن بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 12 & -9 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 + 2R_2 \to R_1 \\ \\ -4R_2 + R_3 \to R_3 \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{2} & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-17) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} -7R_3 + R_1 \to R_1 \\ -2R_3 + R_2 \to R_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$[E_A]_{*3} = 2[E_A]_{*1} + 3[E_A]_{*2}$

$\to A_{*3} = 2A_{*1} + 3A_{*2}$

$[E_A]_{*5} = 4[E_A]_{*1} + 2[E_A]_{*2} + \frac{1}{2}[E_A]_{*4}$

$A_{*5} = 4A_{*1} + 2A_{*2} + \frac{1}{2}A_{*4}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سازگار بودن در دستگاه معادلات خطی
consistency

$A\vec{X}=\vec{b}$

$[A|b] \xrightarrow{\text{Gauss}} [E|C]$

$$[E|C]=\left[\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \square$$

برای حل $AX=b$، ماتریس $[A|b]$ را با روش گاوس (یا گاوس جردن) بصورت ماتریس $\underset{\text{Echelon}}{[E|C]}$ می‌نویسیم

اگر در پروسه کاهش $[A|b]$ به $[E|C]$ به سطری مشابه $\square$ رسیدیم، اگر $\alpha\neq 0$ باشد، دستگاه پاسخ ندارد. گوییم

دستگاه ناسازگار است.
inconsistence

$\text{rank}([A|b])=\text{rank}(A)$

هر کدام از عبارات زیر به معنی سازگار بودن دستگاه $A\vec{X}=\vec{b}$ است

- در کاهش $[A|b]$، سطری مانند سطر زیر ایجاد نمی‌شود. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right]$ $\alpha\neq 0$
- $\vec{b}$ یک ستون غیر اصلی در ماتریس $[A|b]$ است.
- $\text{rank}[A|b]=\text{rank}(A)$
- $\vec{b}$ را می‌توان بصورت ترکیب خطی از ستون‌های اصلی ماتریس A نوشت.

دستگاه های همگن (Homogeneous)

اگر بردار $\vec{b}$ برابر با $\vec{O}$ باشد، گوییم دستگاه همگن است. $A\vec{X}=\vec{O}$ (صفر برداری)

دستگاه همگن همواره سازگار است چون $\vec{X}=\vec{O}$ همواره یک پاسخ برای این دستگاه است. پاسخ $\vec{X}=\vec{O}$ برای دستگاه همگن، پاسخ بدیهی (trivial solution) گفته می شود. $[A|\vec{O}] \xrightarrow{Gauss} [E|\vec{O}]$

سوال این است که دستگاه همگن چه زمانی پاسخ های به غیر از پاسخ بدیهی دارد؟

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

متغیرهای متناظر با ستون های اصلی (یعنی ۱ و ۳) را به عنوان متغیر اصلی (basic variable) و سایر متغیرها را به عنوان متغیر آزاد (free variable) انتخاب می کنیم. سپس متغیرهای اصلی را براساس متغیرهای آزاد با روش back substitution می نویسیم.

متغیرهای اصلی $= x_1 , x_3$ ، $x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4$

متغیرهای آزاد $= x_2 , x_4$ ، $= -2x_2 - 2(-x_4) - 3x_4$

$x_3 = -x_4$ ، $= -2x_2 - x_4$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_1$$

به پاسخ بصورت فوق پاسخ کلی دستگاه گفته می‌شود. با انتخاب دلخواه هر عدد برای x_2 و x_1 یک پاسخ برای این سیستم بدست می‌آید.

فرض کنید مرتبه ماتریس $A \in R^{m\times n}$ برابر r است. در این صورت $n-r$ متغیر آزاد داریم. یعنی پاسخ کلی دستگاه به فرم زیر است:

$$\vec{X} = \vec{h}_1 x_{f_1} + \vec{h}_2 x_{f_2} + \dots + \vec{h}_{n-r} x_{f_{(n-r)}}$$

با انتخاب هر عدد دلخواهی برای متغیرهای آزاد، یک پاسخ بدست می‌آید. دستگاه زمانی صرفا یک پاسخ دارد که تعداد متغیرهای آزاد برابر صفر باشد. یعنی $n-r=0 \longrightarrow rank(A)=n$.

نکته: اگر تعداد معادلات یک دستگاه همگن کمتر از تعداد مجهولات باشد، این دستگاه حتما بی‌نهایت پاسخ دارد. $n>m$

نکته: در پاسخ کلی دستگاه همگن، بردارهای $\vec{h}_i$ یکتا هستند.

مثال)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

متغیرهای اصلی $= x_1$ و x_2

متغیر آزاد $= x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -3x_3 \\ x_1 = -2x_2 - 2x_3 = -2(-3x_3) - 2x_3 = 4x_3 \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

دستگاه‌های ناهمگن (non homogenous systems)

اگر $\vec{b} \neq \vec{0}$، دستگاه ناهمگن است. فرض کنید، دستگاه سازگار است. در این صورت پاسخ کلی دستگاه به فرم زیر

$$\vec{x} = \vec{P} + \vec{h}_1 x_{f_1} + \vec{h}_2 x_{f_2} + \dots + \vec{h}_{(n-r)} x_{f_{(n-r)}}$$

است.

پاسخ دارای دو قسمت پاسخ خصوصی ($\vec{P}$) و پاسخ عمومی (پاسخ معادله همگن متناظر) است. ($\vec{P}$ بردار ثابت است)

دستگاه ناهمگن در صورت سازگار بودن، زمانی دارای پاسخ یکتا است که $rank(A) = n$

مثال)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & | & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & | & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & | & 7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & | & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & | & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1, x_3 \leftarrow$ متغیرهای اصلی

$x_2, x_4 \leftarrow$ متغیرهای آزاد

$$x_3 + x_4 = 1 \rightarrow x_3 = -x_4 + 1$$

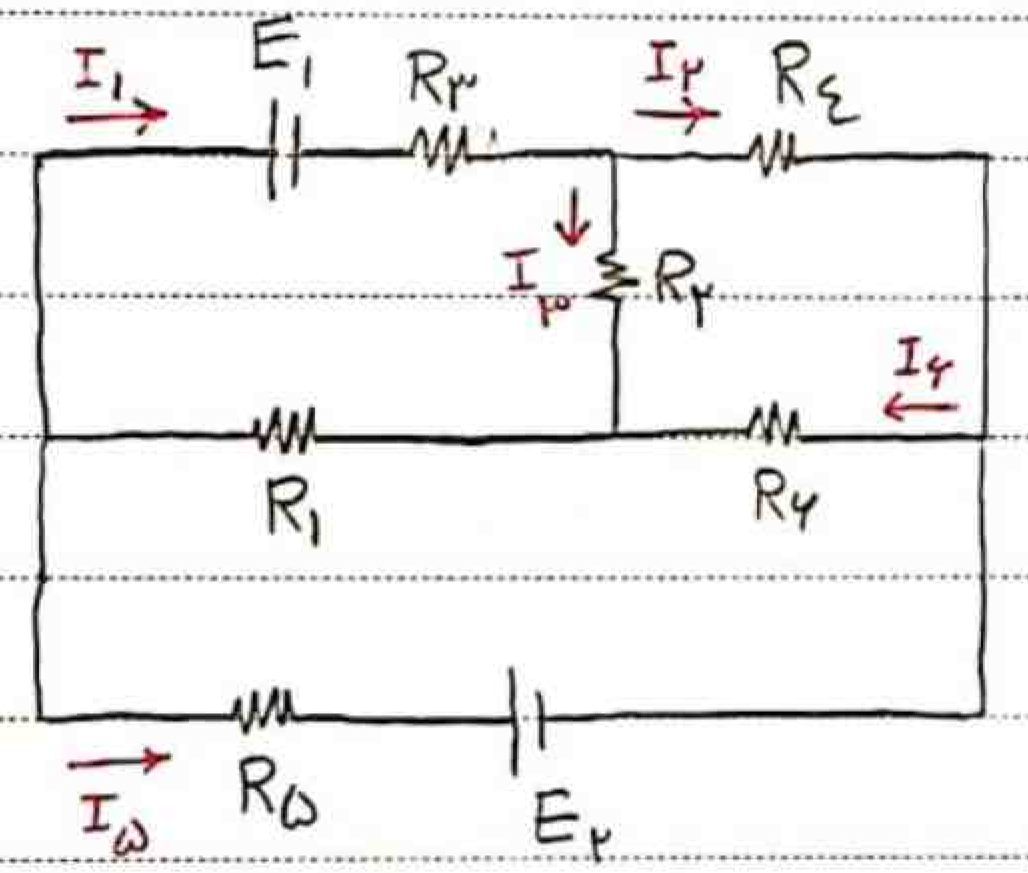
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \rightarrow x_1 = -2x_2 - 2(-x_4 + 1) + 3x_4 + 4 \rightarrow x_1 = -2x_2 - x_4 + 2$$

جلسه چهارم - ۱۴۰۱,۱۲,۸

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_4}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

h_1 h_2 p

کاربرد: حل مدارهای الکتریکی



$$KCL = \begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ +I_2 + I_5 + I_6 = 0 \\ +I_3 + I_4 + I_6 = 0 \\ -I_1 - I_4 - I_5 = 0 \end{cases}$$

$$KVL = \begin{cases} R_3 I_1 + R_2 I_3 - R_1 I_4 = -E_1 \\ R_4 I_2 - R_2 I_3 \quad R_6 I_6 = 0 \\ R_1 I_4 - R_5 I_5 - R_6 I_6 = E_2 \end{cases}$$

می‌توان با حل دستگاه $AX=b$ که در آن $X = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_6 \end{bmatrix}$ جریان تمامی شاخه‌ها را بدست آورد.

فصل سوم: جبر ماتریسی

- وقتی صحبت از یک باهیت n تایی می‌شود منظور یک بردار است که n عدد (مقدار) کنار هم در آن بردار وجود دارد.

- وقتی صحبت از عدد اسکالری شود در حالت کلی منظور اعداد مختلط هستند.

- از نماد R برای اعداد حقیقی و از نماد C برای اعداد مختلط استفاده می‌کنیم.

- منظور از $A \in R^{m\times n}$ و $B = C^{m\times n}$ این است که A یک ماتریس $m\times n$ متشکل از اعداد حقیقی و B

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یک ماتریس $m \times n$ متشکل از اعداد مختلط است.

- برای اشاره به درایه‌های ماتریس A از نماد $[a_{ij}]$ استفاده می‌کنیم.

- دو بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ برابر نیستند. چون بُعد آن‌ها متفاوت است.

جمع ماتریس‌ها: $[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$

برای هر ماتریس مانند A، یک ماتریس مانند $A-$ وجود دارد. به $A-$، additive inverse گفته می‌شود.

خواص جمع ماتریس‌ها:

- خاصیت شرکت‌پذیری (associative property) $(A+B)+C = A+(B+C)$

- خاصیت جابجایی (commutative property) $A+B = B+A$

- ضرب ماتریس در اسکالر. $\alpha \in \mathbb{C}$ $[\alpha A]_{ij} = \alpha [A]_{ij}$

خواص ضرب اسکالر:

اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد αA نیز یک ماتریس $m \times n$ است. (closure property)

$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ (associative property)

(distributive property) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
(توزیع پذیری)

(Identity property) $1.A=A$ ⟵ ضرب اسکالر یک عنصری اثر دارد

ترانهاده (Transpose)

ترانهاده ماتریس A را با نماد A^T نمایش می‌دهیم. $[A^T]_{ij}=[A]_{ji}$

می‌دانیم $(A^T)^T=A$

ترانهاده مزدوج (conjugate Transpose)

مزدوج ماتریس A را با نماد $\bar{A}$ نمایش می‌دهیم $[\bar{A}]_{ij}=[\bar{a}_{ij}]$

منظور از ترانهاده مزدوج، اعمال همزمان ترانهاده و مزدوج است. منظور از A^* اعمال همزمان این دو عملگر است.

$A^*=\bar{A}^T=(\overline{A^T})$, $[A^*]_{ij}=[\bar{a}_{ji}]$

در بعضی مراجع از A^H برای نمایش A^* استفاده می‌شود. منظور H، اپراتور هرمیتی است.

خواص T و *: $(A+B)^T=A^T+B^T$, $(A+B)^*=A^*+B^*$

$(\alpha A)^T=\alpha A^T$, $(\alpha A)^*=\bar{\alpha}A^*$

"به عنوان تمرین اثبات این خواص"

فرض کنید A یک ماتریس مربعی است: اگر $A = A^T$ گوییم A یک ماتریس متقارن (symmetric) است. $a_{ij} = a_{ji}$

اگر A متقارن باشد، این تقارن نسبت به قطر اصلی است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

اگر $A = -A^T$ گوییم، A یک ماتریس شبه‌متقارن (skew-symmetric) است. $a_{ij} = -a_{ij}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$A = -A^T$ برای قطر اصلی $a_{ii} = -a_{ii} \rightarrow a_{ii} = 0$

اگر $A = A^*$ گوییم، A یک ماتریس هرمیتی است (Hermitian)

اگر $A = -A^*$ گوییم A یک ماتریس شبه‌هرمیتی است. (skew Hermitian)

$$A = \begin{bmatrix} 1+j & 1-j & 2e^{-j45} \\ 1+j & 0 & 3+2j \\ 2e^{j45} & 3-2j & 10 \end{bmatrix}$$

$A = A^*$

در ماتریس شبه‌هرمیتی، قطر اصلی الزاماً موهومی است.

$$a_{ii} = \alpha_{ii} + j\beta_{ii} = -(\alpha_{ii} - j\beta_{ii}) \longrightarrow \alpha_{ii} = 0$$

توابع خطی: گوییم تابع F یک تابع خطی است اگر $f(x+y) = f(x) + f(y)$ و $f(\alpha x) = \alpha f(x)$، این دو ویژگی را یکجا می‌توان بصورت زیر بیان کرد.

$$f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$$

مثال) تابع affine

$x \in R \longrightarrow f(x) = ax + b \longrightarrow f(\alpha x) = a\alpha x + b$ ✗
$\alpha f(x) = a\alpha x + \alpha b$

$f(x) = ax$ ✓

$$\vec{x} \in R^2, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(\vec{x}) = f([x_1, x_2]) = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

جلسه پنجم ۱۴۰۱,۱۲,۱۳

$f(\alpha x) = f([\alpha x_1, \alpha x_2]) = a_1 \alpha x_1 + a_2 \alpha x_2 \quad , \quad \alpha f(x) = \alpha (a_1 x_1 + a_2 x_2)$

$f(\vec{x} + \vec{y}) = f([x_1 + y_1 , x_2 + y_2]) = a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2)$

$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_1 y_1 + a_2 y_2$

توابع خطی

$f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$

در صفحه R^n، حالت کلی یک تابع خطی $\leftarrow$ $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots \alpha_n f(x_n)$

مثال: خروجی تابع را مشتق آرگومان ورودی در نظر بگیریم $f(x) = \dfrac{dx}{dt}$

$$f(\alpha x + y) = \frac{d(\alpha x + y)}{dt} = \alpha \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \alpha f(x) + f(y)$$

مثال) $f(X_{m\times n}) = X^T \rightarrow f(\alpha X_{m\times n} + Y_{m\times n}) = (\alpha X + Y)^T$

$= (\alpha X)^T + Y^T = \alpha X^T + Y^T = \alpha f(x) + f(y)$

مثال) $X \in R^{n\times n} \quad , \quad trace(X) = tr(X) \triangleq \sum_i^n x_{ii}$

نشان دهید $trace(X)$ یک تابع خطی است $\quad trace(\alpha X + Y) = \sum_i [\alpha X + Y]_{ii}$

$= \sum_i \alpha x_{ii} + y_{ii} = \sum_i \alpha x_{ii} + \sum_i \alpha y_{ii} = \alpha \sum_i x_{ii} + \sum_i y_{ii} = \alpha f(x) + f(y)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) $f(X_{n\times 1}) = AX$, $f(\alpha X + Y) = A(\alpha X + Y) = \alpha AX + AY$

$= \alpha f(x) + f(y)$

ترکیب خطی

با در نظر گرفتن α_i به عنوان اسکالر و X_i به عنوان ماتریس عبارت زیر یک ترکیب خطی از ماتریس های X_i است

α_i می تواند هر عدد دلخواهی باشد
$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots \alpha_n X_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

ضرب ماتریسی

فرض کنید A یک ماتریس $m\times p$ و B یک ماتریس $p\times n$ است. به این دو ماتریس comformable می گوییم.

$$C = AB \quad , \quad [C]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = \underbrace{A_{i*}}_{\text{بردار سطری } 1\times p} \underbrace{B_{*j}}_{\text{بردار ستونی } p\times 1}$$

① در حالت کلی، ضرب ماتریسی جابجایی پذیر نیست. یعنی الزاماً AB برابر BA نیست.

② if $\alpha\beta = 0 \rightarrow \alpha = 0$ یا $\beta = 0$ یا هر دو صفر هستند

if $\alpha\beta = \alpha\gamma \rightarrow \beta = \gamma$ ، با شرط $\alpha \neq 0$

ولی اگر A و B دو ماتریس باشند if $AB = 0$ ، نمی توان نتیجه گرفت الزاماً A یا B، مساوی صفر است.

if $AB = AC$ ، نمی توان نتیجه گرفت که الزاماً $B = C$ است.

$$[AB]_{i*} = [A_{i*}B_{*1} \quad A_{i*}B_{*2} \quad \dots \quad A_{i*}B_{*n}]$$

$$= A_{i*}[B_{*1} \quad B_{*2} \quad \dots \quad B_{*n}] = A_{i*}B = [a_{i1} \quad a_{i2} \dots a_{ip}] \begin{bmatrix} B_{1*} \\ B_{2*} \\ \vdots \\ B_{p*} \end{bmatrix}$$

$$= a_{i1}B_{1*} + a_{i2}B_{2*} + \dots + a_{ip}B_{p*}$$

نتیجه: $[AB]_{i*} = A_{i*}B = a_{i1}B_{1*} + \dots + a_{ip}B_{p*}$ ①

$[AB]_{*j} = AB_{*j} = A_{*1}b_{1j} + \dots + A_{*p}b_{pj}$ ②

مثال) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to [AB]_{2*} = [10 \quad 2 \quad 1]$

سطر دوم × هر یک از ستون‌ها

$= 0[1 \quad 2 \quad 3] + (-1)[-2 \quad 0 \quad 5] + 2[4 \quad 1 \quad 3] = [10 \quad 2 \quad 1] \to$ ①

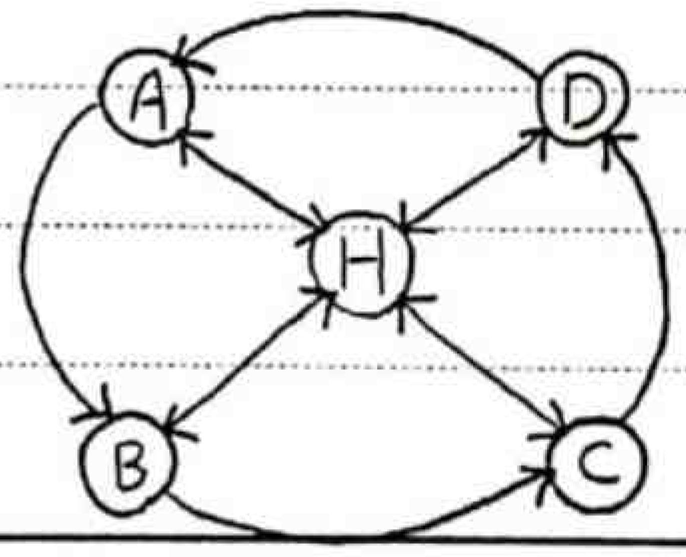
دستگاه $A\vec{X} = \vec{b}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\vec{X} = \vec{S}$ یک پاسخ برای این دستگاه است. $A\vec{S} = \vec{b}$

$[A_{*1} \quad A_{*2} \quad \dots \quad A_{*n}] \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = \vec{b}$, $s_1A_{*1} + s_2A_{*2} + \dots + s_nA_{*n} = \vec{b}$

یعنی دستگاه $A\vec{X} = \vec{b}$ زمانی سازگار است که بتوان بردار $\vec{b}$ را بصورت ترکیب خطی از ستون‌های ماتریس ضرایب A نوشت.

ماتریس همسایگی: «پروازهای بین شهری»

مثال)



$ij = \begin{cases} 1 & \leftarrow \text{اگر از شهر i به شهر j پرواز وجود داشته باشد} \\ 0 & \leftarrow \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

directed - Graph

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه ششم ۱۴۰۱,۱۲,۱۵

$$
= \begin{array}{c|ccccc}
 & A & B & C & D & H \\
\hline
A & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
B & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
C & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
D & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
H & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$[C^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{5} c_{ik}\, c_{kj}$$

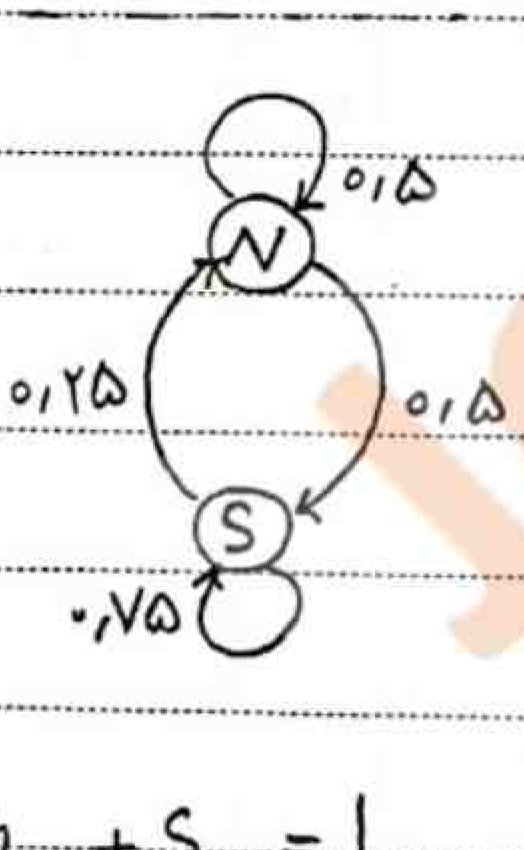
تعداد مسیرهای دو پروازه از شهر i به شهر j = C^2

$$
C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow
C^4 = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 7 & 8 & 7 & 9 \\ 7 & 7 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 20 \end{bmatrix}
$$

$$
[C^3]_{24} = 2 \begin{cases} B \to C \to H \to D \\ B \to H \to C \to D \end{cases}, \quad [C^3]_{53} = 5 \begin{cases} HABC,\ HDHC \\ HAHC, \\ HBHC,\ HCHC \end{cases}
$$

خواص شرکت پذیری و توزیع پذیری در ضرب ماتریس

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AB + Bc, \quad (AB)C = A(BC)$$



کاربرد: فرض کنید کل جمعیت شهرهای N و S را با ۱۰۰٪ نمایش می دهیم

n_k = درصد جمعیت شهر N از کل جمعیت در انتهای سال K

s_k = درصد جمعیت شهر S از کل جمعیت در انتهای سال K

$$n_k + s_k = 1$$

$$n_{k+1} = 0.5\, n_k + 0.25\, s_k$$
$$s_{k+1} = 0.5\, n_k + 0.75\, s_k$$

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} n_{k+1} \\ s_{k+1} \end{pmatrix}}_{P_{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.75 \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} n_k \\ s_k \end{pmatrix}}_{P_k}
$$

$$P_{k+1} = T \cdot P_k$$

$P_1 = TP_0$, $P_2 = TP_1 = TTP_0 = T^2P_0$, $P_3 = TP_2 = TT^2P_0 = T^3P_0$

$\dots\ P_n = T^nP_0$ در نهایت $\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} T^nP_0$

$T^\infty = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\begin{pmatrix} n_k \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_0 \\ s_0 \end{pmatrix}$

$(AB)^T = B^TA^T$, $(AB)^H = B^HA^H$

اثبات $\rightarrow [(AB)]_{ij} = (AB)_{ji} = A_{j*}B_{*i}$ سمت چپ

$[(B^TA^T)]_{ij} = [B^T]_{i*}[A^T]_{*j} = (B_{*i})^T(A_{j*})^T = A_{j*}B_{*i}$ سمت راست

(یک اسکالر است)

- برای هر $A_{m\times n}$ ، A^TA , AA^T ، ماتریس های متقارن هستند. $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$

- اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$ باشد $tr(AB) = tr(BA)$

$\rightarrow tr(AB) = \sum\limits_i [AB]_{ii} = \sum\limits_i\sum\limits_j \underbrace{a_{ik}b_{ki}}_{A_{i*}B_{*i}} = \sum\limits_k\sum\limits_i b_{ki}a_{ik} = \sum\limits_k [BA] = trace(BA)$

$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$

بعضی مواقع ضرب بلوکی ماتریس ها راحت تر است.

$A = \left[\begin{array}{c|c|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{c|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$

این افراز برای قسمت دوم

Date: / / Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri Subject:

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix}C & I\\ I & 0\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}I & 0\\ C & C\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}2C & C\\ I & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1 & 2\\ 6 & 8 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

قسمت دوم:

$$\begin{bmatrix}\underset{1\times1}{A_{11}} & \underset{1\times3}{A_{12}}\\ \underset{3\times1}{A_{21}} & \underset{3\times3}{A_{22}}\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\underset{1\times1}{B_{11}} & \underset{1\times3}{B_{12}}\\ \underset{3\times1}{B_{21}} & \underset{3\times3}{B_{22}}\end{bmatrix}$$

مثال) فرض کنید $A\in R^{n\times n}$ و $X\in R^{n\times n}$ است. چرا نمی‌توان ماتریس X ای پیدا کرد که در تساوی $AX-XA=I$ صدق کند؟

$tr(AX-XA)$

$=tr(AX)-tr(XA)=tr(AX)-tr(AX)=0$

$\neq tr(I)=n$

معکوس ماتریس:

اگر دو ماتریس $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ در شرط $AB=I$ یا $BA=I$ صدق کنند، گوییم A معکوس‌پذیر است و B معکوس آن است. معکوس ماتریس A را با نماد A^{-1} نمایش می‌دهیم. $A^{-1}=B$

تمامی ماتریس‌ها دارای معکوس نیستند، به ماتریسی که معکوس دارد، ماتریس غیرتکین و به ماتریسی که معکوس ندارد، ماتریس تکین می‌گویند.

non singular

singular

Date: / / Sat. Sun. Mon Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

مثال) با شرط $ad-bc \neq 0$

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

فرض کنید X_1 و X_2 معکوس A هستند، در این صورت $X_1=X_2$،

$$X_1=X_1(I)=X_1(AX_2)=(X_1A)X_2=IX_2=X_2$$

در صورت وجود، معکوس ماتریس یکتا است.

- اگر A یک ماتریس غیرتکین باشد، دستگاه $\underset{n\times1}{AX}=\underset{n\times1}{b}$ دارای پاسخ یکتا است. آن پاسخ را می‌توان بصورت $\vec{X}=A^{-1}b$ نیز محاسبه کرد.

اگر A غیرتکین باشد، پاسخ $\underset{n\times n}{AX}=\underset{n\times n}{B}$ را نیز می‌توان با $X=A^{-1}B$ محاسبه کرد.

جملات زیر معادل یکدیگر هستند:

① A^{-1} وجود دارد (A غیرتکین است) ② $rank(A)=n$

③ $A \xrightarrow{Gauss-Jordan} I$ ④ تنها پاسخ دستگاه $A\vec{X}=\vec{0}$ برابر $\vec{X}=\vec{0}$ است.

$$\exists X,\ AX=I \rightarrow A[X_{*1}\ X_{*2} \dots X_{*n}]=[I_{*1}\ I_{*2} \dots I_{*n}]$$

$$AX_{*1}=I_{*1},\quad AX_{*2}=I_{*2},\ \dots$$

یعنی برای $i=1,2,\dots,n$، دستگاه $A\vec{X}=I_{*i}$ پاسخ دارد.

می دانیم $A\vec{X} = I_{*i}$ زمانی پاسخ دارد که A دارای مرتبه n باشد.

اگر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ دارای مرتبه n باشد، گویند A از مرتبه کامل است.
full - rank

مثال)

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&2&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&2&-1&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&1&0&-1&2&-1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{I}\quad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

$A\vec{X}_{*1} = I_{*1}$

$A\vec{X}_{*2} = I_{*2}$

$\vdots$

$A\vec{X}_{*n} = I_{*n}$

$$[A \mid b_1 \mid b_2 \mid \cdots \mid b_n] \xrightarrow{G} [E \mid c_1 \mid c_2 \mid \cdots \mid c_n]$$

$$AX_{n\times n} = I_{n\times n} \qquad [A \mid I] \xrightarrow{GJ} [I \mid X_{*1}\ X_{*2} \cdots X_{*n}] = [I \mid X]$$

$$[A \mid I] \xrightarrow{GJ} [I \mid A^{-1}]$$

خواص معکوس ماتریس

جلسه هفتم ۱۴۰۱/۱۲/۲۰

Date: / / Subject:

اگر A و B دو ماتریس معکوس پذیر باشند، حاصل ضرب آنها نیز معکوس پذیر است.

اگر دو ماتریس مرتبه کامل در یکدیگر ضرب شوند، مرتبه حاصل ضرب نیز مرتبه کامل است.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{مرتبه ۱}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{مرتبه ۱}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{مرتبه صفر}}$$

$* \ (A^{-1})^{-1} = A$

$* \ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $* \ (A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$ $* \ (A^{-1})^{H} = (A^{H})^{-1}$

حاصل ضرب k ماتریس غیرتکین، یک ماتریس غیرتکین است.

مثال) فرض کنید $I - A$ یک ماتریس مرتبه کامل است، نشان دهید. $A(I-A)^{-1} = (I-A)^{-1}A$

$A(I-A) = A - A^2 = (I-A)A \rightarrow A(I-A)(I-A)^{-1} = (I-A)A(I-A)^{-1}$

$\rightarrow A = (I-A)A(I-A)^{-1} \rightarrow (I-A)^{-1}A = (I-A)^{-1}(I-A)A(I-A)^{-1}$

$\rightarrow (I-A)^{-1}A = A(I-A)^{-1}$

مثال) می دانیم A و B و $A+B$ هر سه معکوس پذیر باشند، نشان دهید:

$A(A+B)^{-1}B = (A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A$

$\rightarrow A(A+B)^{-1}B = A\left[B(B^{-1}A+I)\right]^{-1}B = A\left[B(B^{-1}+A^{-1})A\right]^{-1}B = A\left[A^{-1}(B^{-1}+A^{-1})^{-1}B^{-1}\right]B$

$\rightarrow (A^{-1}+B^{-1})^{-1} = (B^{-1}+A^{-1})^{-1} = (A^{-1}(A+B)B^{-1}) = B(A+B)^{-1}A$

Date: / / Subject:

مثال) S یک ماتریس شبه متقارن است. نشان دهید ماتریس $I-S$ غیرتکین است. $(S^T=-S)$

$(I-S)\vec{X}=\vec{0}$, $X^T(I-S)X=0 \rightarrow X^TX-X^TSX=0 \rightarrow X^TX=X^TSX$

ترانهاده طرفین را محاسبه می‌کنیم: $X^TX=X^TS^TX=-X^TSX$

S شبه متقارن است.

$\rightarrow X^TSX=-X^TSX=0 \rightarrow X^TX=0$, $X^TX=x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=0$

$\rightarrow x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0 \rightarrow \vec{x}=\vec{0}$

$\vec{X}=\vec{0}$ یعنی تنها پاسخ دستگاه $(I-S)X=0$، پاسخ بدیهی صفر است، زمانی تنها پاسخ $(I-S)X=0$ پاسخ بدیهی است که $I-S$ غیرتکین باشد.

نکته: اگر A و B معکوس پذیر باشند:

$$\begin{pmatrix} A & | & 0 \\ \hline 0 & | & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & | & 0 \\ \hline 0 & | & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

معکوس جمع و بحث حساسیت

فرض کنید $\vec{c}$ و $\vec{d}$ دو بردار $n\times 1$ هستند. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

با شرط $1+d^Tc\neq 0$ $\quad (I+cd^T)^{-1}=I-\dfrac{cd^T}{1+d^Tc}$

ورژن خیلی ساده:

Date: / / Sat Sun Mon Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

$$(I+cd^T)(I+cd^T)^{-1}=(I+cd^T)\left(I-\frac{cd^T}{1+d^Tc}\right)\overset{?}{=}I$$

$$I+cd^T-\frac{cd^T}{1+d^Tc}-cd^T\frac{cd^T}{1+d^Tc}\rightarrow I+\Big(\underbrace{\frac{1}{1+d^Tc}}_{\text{اسکالر}}\Big)\Big((cd^T)(1+d^Tc)-cd^T-(cd^T)(cd^T)\Big)$$

$(cd^T)\in R^{n\times n}$ ، $(d^Tc)\in R$

$$=I+\left(\frac{1}{1+d^Tc}\right)\Big(\cancel{cd^T}+(cd^T)(d^Tc)-\cancel{cd^T}-(cd^T)(cd^T)\Big)=I$$

$$c(d^Tc)d^T\rightarrow(cd^T)(cd^T)$$

ورژن کلی‌تر:

با شرط غیرتکین بودن A:

$$(A+cd^T)^{-1}$$

$$=\left(A(I+A^{-1}cd^T)\right)^{-1}=(I+\underbrace{A^{-1}c}_{n\times 1}d^T)^{-1}A^{-1}=\left(I-\frac{A^{-1}cd^T}{1+d^TA^{-1}c}\right)A^{-1}$$

$$=A^{-1}-\frac{A^{-1}cd^TA^{-1}}{1+d^TA^{-1}c}$$ رابطه Sherman-Marrison

$(A+CD^T)^{-1}=?$ $(C,D\in R^{n\times n})$ ***

مکمل شور (schur complement)

فرض کنید A یک ماتریس $P\times P$ و D یک ماتریس $q\times q$ است. B و C ماتریس با ابعاد مناسب هستند.

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$$

$\vec{x}$ ، $\vec{y}$ و $\vec{c}$ ، $\vec{d}$ بردار با ابعاد مناسب هستند، به نحوی که:

Date: / / Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{c}\\ \vec{d}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Ax + By = \vec{c} \\ Cx + Dy = \vec{d} \rightarrow \vec{y} = D^{-1}(\vec{d} - Cx) \end{cases} *$$

به شرط معکوس پذیر بودن D

$$Ax + BD^{-1}(\vec{d} - Cx) = \vec{c} \rightarrow (A - BD^{-1}C)x = \vec{c} - BD^{-1}\vec{d}$$

$$x = (A - BD^{-1}C)^{-1}(\vec{c} - BD^{-1}\vec{d})$$ به شرط معکوس پذیر بودن $A - BD^{-1}C$

به $A - BD^{-1}C$، مکمل شور ماتریس D در M گفته می‌شود. برای سادگی این ماتریس را با نماد M/D نمایش می‌دهیم.

$$y = D^{-1}(\vec{d} - C\underbrace{(M/D)^{-1}(\vec{c} - BD^{-1}\vec{d})}_{x})$$

با جایگذاری در *

$$\vec{x} = (M/D)^{-1}\underline{\underline{\vec{c}}} - (M/D)^{-1}BD^{-1}\underline{\underline{\vec{d}}}$$

$$\vec{y} = -D^{-1}C(M/D)^{-1}\underline{\underline{\vec{c}}} + \left[D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1}\right]\underline{\underline{\vec{d}}}$$

$$M\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{c}\\ \vec{d}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}\vec{c}\\ \vec{d}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(M/D)^{-1} & -(M/D)BD^{-1}\\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1}+D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{c}\\ \vec{d}\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}(M/D)^{-1} & -(M/D)BD^{-1}\\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1}+D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1}\end{pmatrix}$$

Date: / / Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

$Ax + By = \vec{c} \rightarrow x = A^{-1}(\vec{c} - B\vec{y})$

$Cx + Dy = \vec{d} \rightarrow CA^{-1}(\vec{c} - B\vec{y}) + Dy = \vec{d} \rightarrow y = (D - CA^{-1}B)^{-1}(\vec{d} - CA^{-1}\vec{c})$

با جایگذاری: $x = (\vec{c} - B(D - CA^{-1}B)^{-1}(\vec{d} - CA^{-1}\vec{c})$

با شرط معکوس پذیری A و $(D - CA^{-1}B)$، به $(D - CA^{-1}B)$ مکمل شور A در M گفته می‌شود و با

نماد M/A نمایش داده می‌شود.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{c} \\ \vec{d} \end{pmatrix}$$

بلوک سطر ۱ ستون ۱:

$(A - BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$

بلوک سطر ۲ ستون ۲:

$(D - CA^{-1}B)^{-1} = D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}$

به روابط فوق، لم معکوس ماتریس گفته می‌شود (Matrix Inverse Lemma)

*** $(A + CD^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(I + D^TA^{-1}C)^{-1}D^TA^{-1}$

(در صفحه 28)

Sherman - Morrison - Woodbury

فرض کنید معکوس ماتریس A را محاسبه کرده‌ایم و A^{-1} را داریم، یکی از درایه‌های A تغییر می‌کند.

می‌توان معکوس ماتریس جدید را با اطلاعات A^{-1} (بدون محاسبه مجدد معکوس) بدست آورد.

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{ام} \qquad B = A + \alpha e_i e_j^T$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶۰ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$e_i e_j^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow j \\ \uparrow i \end{array} \qquad ۵۴ \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$(A + cd^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}cd^TA^{-1}}{1 + d^TA^{-1}c}, \quad B^{-1} = (A + \alpha e_i e_j^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{\alpha A^{-1} e_i e_j^T A^{-1}}{1 + \alpha e_j^T A^{-1} e_i}$$

$$= A^{-1} - \frac{\alpha [A^{-1}]_{*i} [A^{-1}]_{j*}}{1 + \alpha [A^{-1}]_{ji}}$$

مثال)

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} + e_۲ e_۱^T$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}}{1 + (-2)}$$

سری نیومن (Neumann Series)

می دانیم: $(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}) = I - \overset{\text{صفر}}{\cancel{A^n}}$

فرض کنید A به نحوی است که $\lim_{n \to \infty} A^n = 0$ بنابراین $(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots) = \lim_{k \to \infty} A^k$

اگر با دو جمله اول این سری $(I - A)^{-1}$ را تقریب بزنیم:

$$(I - A)^{-1} \simeq I + A$$

برای $(A + B)^{-1}$ داریم: $(A + B)^{-1} = [A(I + A^{-1}B)]^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1} A^{-1}$

$\underset{*}{\simeq} (I - A^{-1}B) A^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B A^{-1}$ ‏ * با فرض $\lim_{k \to \infty} (A^{-1}B)^k = 0$

یک تعریف از نُرم (Norm)

ماکزیمم مجموع قدر مطلق درایه های سطرها: $\|A\| = \max_{i} \sum_{j} |a_{ij}|$

یکی از خواص نرم ماتریسی: $\|XY\| \leqslant \|X\| \, \|Y\|$

$$Ax = b \quad , \quad (A + \overset{\substack{\text{تغییر کوچک} \\ \uparrow}}{B}) \tilde{X} = b$$

$$\xrightarrow[A \,,\, (A+B)]{\text{با فرض غیر تکین بودن}} x - \tilde{X} = A^{-1}b - (A+B)^{-1}b \simeq A^{-1}b - (A^{-1} - A^{-1}BA^{-1})b$$

$$= A^{-1}b - A^{-1}b + A^{-1}BA^{-1}b = A^{-1}BA^{-1}b = A^{-1}BX$$

$$\|X-\tilde{X}\| = \|A^{-1}BX\| \leqslant \|A^{-1}\|\,\|B\|\,\|X\|$$

$$\frac{\|X-\tilde{X}\|}{\|X\|} \leqslant \|A^{-1}\|\,\|B\| = \|A^{-1}\|\,\|B\|\frac{\|A\|}{\|A\|} = \|A^{-1}\|\,\|A\|\frac{\|B\|}{\|A\|}$$

$$\underbrace{\frac{\|X-\tilde{X}\|}{\|X\|}}_{\text{تغییرات نسبی پاسخ (برحسب نرم)}} \leqslant \underbrace{\|A^{-1}\|\,\|A\|\frac{\|B\|}{\|A\|}}_{\text{تغییرات نسبی ماتریس ضرایب (برحسب نرم)}}$$

ماکزیمم تغییرات نسبی پاسخ

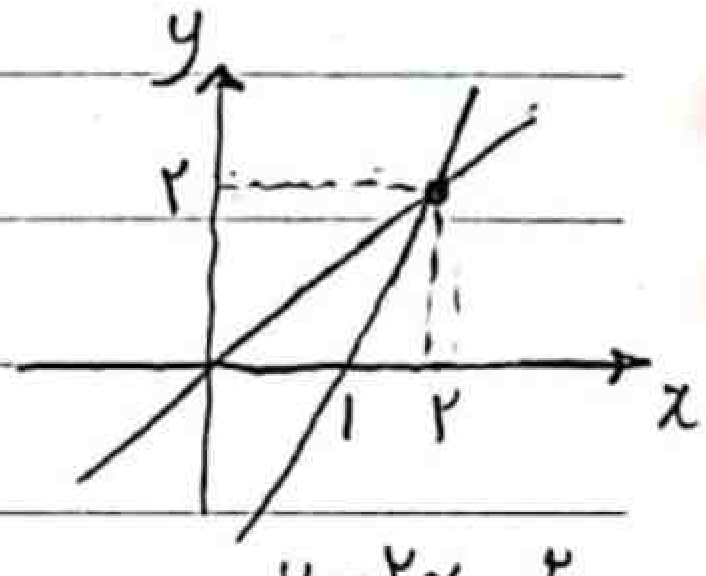
به مقدار $\|A\|\,\|A^{-1}\|$، عدد شرطی گفته می‌شود. و آن را با K نمایش می‌دهیم.
/kapa/ condition number

هر قدر K، بزرگتر باشد، حد بالای تغییرات پاسخ بزرگتر شده و در نتیجه ill_conditioned بودن سیستم بیشتر می‌شود.

مثال)
$$\begin{cases} x+y=۱ \\ ۲x-y=۲ \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \qquad \|A\|=۳$$

$$A^{-1}=\frac{۱}{-۳}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱/۳ & ۱/۳ \\ ۲/۳ & -۱/۳ \end{bmatrix} \qquad \|A^{-1}\|=۱, \quad K=۱\times۳=۳$$



$y=۲x-۲$

مثال)
$$۰٫۸۳۵x+۰٫۶۶۷y=۰٫۱۶۸$$
$$۰٫۳۳۳x+۰٫۲۶۶y=۰٫۰۶۷$$

$$\|A\|=۱٫۵ \;,\; \|A^{-1}\|=۱۱۶۸۰۰۰ \;,\; K\simeq ۱٫۷\times۱۰^{۶}$$

Date: / /　　Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.　　Subject:

ماتریس های مقدماتی و بحث معادل بودن ماتریس ها

Equivalence　　Elementry Matrices

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۶ & ۹ & ۱۲ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

سه ماتریس مقدماتی متناظر با سه عملیات مقدماتی نوع I و II و III وجود دارد.

این سه ماتریس مقدماتی همان I هستند که از عملیات مربوطه بر روی آنها انجام شده است.

عملیات مقدماتی نوع I = تعویض جای دو سطر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۹ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

عملیات مقدماتی نوع II : ضرب یک سطر در α

$$EA = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} =$$ سطر اول در ۳ ضرب می شود.

عملیات مقدماتی نوع III : ضرب سطر i ام در α و جمع آن با سطر j ام و جاگذاری در سطر j ام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow$$

سطر اول A در ۵ ضرب شده، با سطر دوم جمع و به جای سطر دوم جاگذاری می‌شود.

تمامی ماتریس های مقدماتی به فرم زیر هستند: $I - uv^T$

که در آن u و v بردار ستونی بوده و $v^Tu \neq 1$ است. ماتریس مقدماتی غیرتکین هستند و معکوس آنها بصورت زیر است:

$$(I - uv^T)^{-1} = I - \frac{uv^T}{v^Tu - 1}$$

معکوس ماتریس مقدماتی، یک ماتریس مقدماتی است.

I : $E = I - uu^T$ $\quad (u = e_i - e_j)$

II : $E = I - (1-\alpha) e_i e_i^T$

III : $E = I + \alpha e_i e_j^T$

مثال)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 12 \\ 3 & 6 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_3E_2E_1A} \xrightarrow{G-J} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_5E_4E_3E_2E_1A = EA$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 12 \\ 3 & 6 & 13 \end{bmatrix}}_{A}}_{A_1} \rightarrow E_2E_1A = E_1E_2A$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{E_5} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_4} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_3}$$

جلسه نهم ۱۴۰۲/۱/۱۹

Date: / / Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

هم ارزی: چرا در دستگاه $Ax=b$ صرفاً از عملیات مقدماتی سطری استفاده می کنیم؟

عملیات ستونی، تضمین به یکی بودن جواب با جواب دستگاه معادلات اصلی است.

① مکان ستونی i و j را با هم تغییر می دهیم.

② ستون i را در عدد ثابت ضرب می کنیم.

③ ستون i ضرب در ثابت α دستون j ضرب در B و جمع می کنیم و در ستون j قرار می دهیم.

$A \sim B \Longleftrightarrow PAQ = B$ $\quad P, Q$ غیرتکین (Nonsingular)

$\underbrace{\overbrace{E_3E_2E_1}^{P}}_{\text{سطری}} A \underbrace{\overbrace{\cdots\cdots}^{Q}}_{\text{ستونی}} = B$ $\begin{cases} \text{کاهش گاوس} \\ \text{کاهش گاوس جردن} \end{cases}$

$A \xrightarrow[A\sim A_1]{E_1} A_1 \xrightarrow[A\sim A_2]{E_2} A_2 \ldots\ldots A_n \rightarrow A \sim A_n$

$A \overset{row}{\sim} B$ (هم سطری) $\quad PA = B \quad P \rightarrow$ غیرتکین ، $A \overset{col}{\sim} B$ (هم ستونی) $\quad AQ = B \quad Q \rightarrow$ غیرتکین

$A^{3\times3} \rightarrow$ جای ستون ۲ و ۳ را عوض می کنیم _ عملیات مقدماتی نوع I

$A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Q} = B$

* $A \sim B \ , \ B \sim C \rightarrow A \sim C$
* $A \sim B \rightarrow B \sim A$

اثبات $\rightarrow PAQ = B \rightarrow A = P^{-1}BQ^{-1} \rightarrow P^{-1}, Q^{-1}$ (nonsingular)

سوال) می دانیم $DA = B$ و D غیرتکین است، آیا $A \overset{row}{\sim} B$ ؟ بلی (اثبات ص ۱۳۳ کتاب Mayer)

Date: / / Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

$$A \overset{row}{\sim} B \rightarrow \begin{cases} A \rightarrow A_{*۳} = A_{*۱} + ۲A_{*۲} \\ B \rightarrow B_{*۳} = B_{*۱} + ۲B_{*۲} \end{cases}$$

اگر $A \overset{row}{\sim} B$، رابطه بین ستون های A، دقیقاً بین ستون های B برقرار است.

اگر $A \overset{col}{\sim} B$ رابطه بین سطرهای A، دقیقاً بین ستون‌های B برقرار است.

$$A \overset{row}{\sim} B \rightarrow B_{*k} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j B_{*j} \xrightarrow[\text{only if}]{\text{if and}} A_{*k} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j A_{*j}$$

Rank Normal Form

$$A^{m\times n} \rightarrow rank(A) = r \quad , \quad A \sim N_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \rightarrow \begin{cases} r=m \rightarrow N_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} \\ r=n \rightarrow N_r = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$A \overset{row}{\sim} E_A \rightarrow PA = E_A \xrightarrow{\text{عملیات ستونی}} PAQ_1 = E_AQ_1 = \begin{pmatrix} I_r & J \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & ۳ & 0 & ۲ & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -۵ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{rank=۳}{=} E_A \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} \overbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}^{I_r} & & & \overbrace{\begin{matrix}۳ & ۲ \\ 0 & -۵ \\ 0 & 0\end{matrix}}^{J} & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow Q_2 = \begin{bmatrix} I_r & -J \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$PAQ_1Q_2 = E_AQ_1Q_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow N_r$$

سوال) $rank\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rank(A) + rank(B)$

$$rank(A) = r \rightarrow A \sim N_r \ , \ rank(B) = s \rightarrow B \sim N_s$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & N_s \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{rank}_{r+s} = \underbrace{rank}_{r+s}$$

① $A \sim B \iff \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$

② $A \overset{row}{\sim} B \iff E_A = E_B$ ③ $A \overset{col}{\sim} B \iff E_A^T = E_B^T$

مثال) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A \,,\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = B \rightarrow \begin{cases} E_A = E_B \rightarrow A \overset{row}{\sim} B \\ E_A^T = E_B^T \rightarrow A \overset{col}{\sim} B \end{cases}$

LU

زمانی برقرار است که عبارت $AX=B$ را کاهش گاوسی دهیم و اولاً هیچ وقت به Pivot صفر برخورد نکنیم و دوماً فقط از عملیات مقدماتی نوع III استفاده کنیم

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to 3R_1]{R_2 \to 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 4R_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \triangleq U \ \text{(upper)}$$

$$L = G_1^{-1} G_2^{-1} G_3^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \triangleq L \ \text{(Lower)} \longrightarrow A = LU$$

ماتریس L و U هر دو یکتا هستند.

$$L_1U_1U_1^{-1} = L_2U_2U_1^{-1} \rightarrow L_2^{-1}L_1 = L_2^{-1}L_2U_2U_1^{-1} \rightarrow \underbrace{L_2^{-1}L_1}_{\text{پایین مثلثی}} = \underbrace{U_2U_1^{-1}}_{\text{بالا مثلثی}} = I$$

$$L_1 = L_2 , U_1 = U_2$$

کاربردهای LU

$$AX = B \rightarrow L\underbrace{UX}_{y} = B \rightarrow \begin{cases} ① \; Ly = B \\ ② \; UX = y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

y_1 را پیدا می‌کنیم و سپس به روش forward substition مابقی پیدا می‌شود.

سپس:

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_{ik}\right)$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

پیدا کردن A^{-1}:

$$\begin{cases} AX = I \\ AA^{-1} = I \end{cases} \xrightarrow[\text{کردن}]{\text{حل}} A\underset{\text{ستون jام ماتریس } A^{-1}}{x_j} = \underset{\text{ستون های jام ماتریس } I}{e_j}$$

در فاکتورگیری LU، اگر به Pivot صفر برخوردیم باید از Partial Pivoting استفاده کنیم، حق داریم جای سطرها را تغییر دهیم، به

گونه‌ای که بزرگترین ضریب (بدون در نظر گرفتن علامت) روی قطر اصلی می‌باشد.

قادر نیستیم فاکتورگیری LU انجام دهیم، زیرا در زمان کاهش با عملیات مقدماتی نوع III به Pivot صفری رسیدیم، به کمک ماتریس

Permutation، قادر به فاکتورگیری هستیم.

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۴ & ۸ & ۱۲ & -۸ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & -۱ & ۱ & -۴ & ۴ \end{array}\right] \begin{array}{l} R_۲ - \frac{۱}{۴}R_۱ \to R_۲ \\ R_۳ - \frac{۱}{۲}R_۱ \to R_۳ \\ R_۴ + \frac{۳}{۴}R_۱ \to R_۴ \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} ۴ & ۸ & ۱۲ & -۸ & ۲ \\ ۱/۴ & ۰ & -۶ & ۶ & ۱ \\ ۱/۲ & -۱ & -۴ & ۵ & ۳ \\ -۳/۴ & ۵ & ۱۰ & -۱۰ & ۴ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۴ \leftrightarrow R_۲} \left[\begin{array}{cccc|c} ۴ & ۸ & ۱۲ & -۸ & ۲ \\ -۳/۴ & ۵ & ۱۰ & -۱۰ & ۴ \\ ۱/۲ & -۱ & -۴ & ۵ & ۳ \\ ۱/۴ & ۰ & -۶ & ۶ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۳ + \frac{۱}{۵}R_۲ \to R_۳}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۴ & ۸ & ۱۲ & -۸ & ۲ \\ -۳/۴ & ۵ & ۱۰ & -۱۰ & ۴ \\ ۱/۲ & -۱/۵ & -۲ & ۳ & ۳ \\ ۱/۴ & ۰ & -۶ & ۶ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۴ \to R_۳} \left[\begin{array}{cccc|c} ۴ & ۸ & ۱۲ & -۸ & ۲ \\ -۳/۴ & ۵ & ۱۰ & -۱۰ & ۴ \\ ۱/۴ & ۰ & -۶ & ۶ & ۱ \\ ۱/۲ & -۱/۵ & -۲ & ۳ & ۳ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۴ - \frac{۱}{۳}R_۳ \to R_۴} \left[\begin{array}{cccc|c} ۴ & ۸ & ۱۲ & -۸ & ۲ \\ -۳/۴ & ۵ & ۱۰ & -۱۰ & ۴ \\ ۱/۴ & ۰ & -۶ & ۶ & ۱ \\ ۱/۲ & -۱/۵ & ۱/۳ & ۱ & ۳ \end{array}\right]$$

$$P = \underbrace{\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}}_{\text{Permutation matrix} \to PA = LU}, \quad L = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۳/۴ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱/۴ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱/۲ & -۱/۵ & ۱/۳ & ۱ \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} ۴ & ۸ & ۱۲ & -۸ \\ ۰ & ۵ & ۱۰ & -۱۰ \\ ۰ & ۰ & -۶ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \qquad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۴ \\ ۴ & ۸ & ۱۲ & -۸ \\ ۲ & ۳ & ۲ & ۱ \\ -۳ & -۱ & ۱ & -۴ \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۶۰ \\ ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

$$L\underbrace{Ux}_{y} = b \to Ux = y, \quad Ly = b$$

$$L = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۳/۴ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱/۴ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱/۲ & ۱/۵ & ۱/۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \\ y_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶۰ \\ ۵ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۶۰ \\ ۵۰ \\ -۱۲ \\ -۱۵ \end{bmatrix} = y$$

$$U = \begin{bmatrix} ۴ & ۸ & ۱۲ & -۸ \\ ۰ & ۵ & ۱۰ & -۱۰ \\ ۰ & ۰ & -۶ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶۰ \\ ۵۰ \\ -۱۲ \\ -۱۵ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۶ \\ -۱۳ \\ -۱۵ \end{bmatrix} = x$$

Date: / / Sat Sun Mon Tue Thu Wed Fri Subject:

فصل چهارم : Vector spaces

از ۴ المان تشکیل شده است:

① V (Vector) → مجموعه غیر تهی

② F (field) → میدان → مجموعه اعداد حقیقی یا مجموعه اعداد موهومی

③ vector addition $(X+Y)$ ④ scaler multiplication (αX)

$A_1 | X+Y \in V \quad , X,Y \in V$ بسته بودن نسبت به عمل جمع

$A_2 | (X+Y)+Z = X+(Y+Z) \quad ; \quad A_3 | X+Y = Y+X \quad , X,Y \in V$

$A_4 | X \in V, -X \in V, X+(-X)=0 \quad ; \quad A_5 | 0 \in V \quad , X+0=X$

$M_1 | \alpha X \in V, \alpha \in F, X \in V \quad ; \quad M_2 | (\alpha\beta)X = \alpha(\beta X) \quad , \alpha,\beta \in F, X \in V$

$M_3 | \alpha(X+Y) = \alpha X + \alpha Y \quad , \alpha \in F, X,Y \in V$

$M_4 | (\alpha+\beta)X = \alpha X + \beta X \quad , \alpha,\beta \in F, X \in V \quad ; M_5 | 1X = X \quad , X \in V$

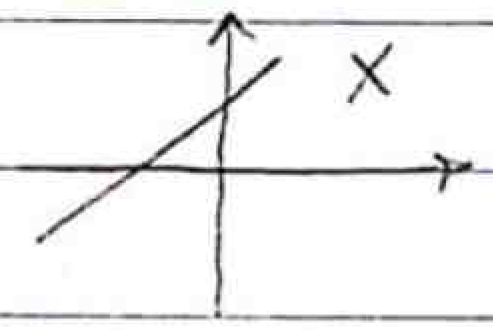
مثال) $V = iR^{m\times n} \quad F = iR$ ✓ , $V = C^{m\times n} \quad F = C$ ✓

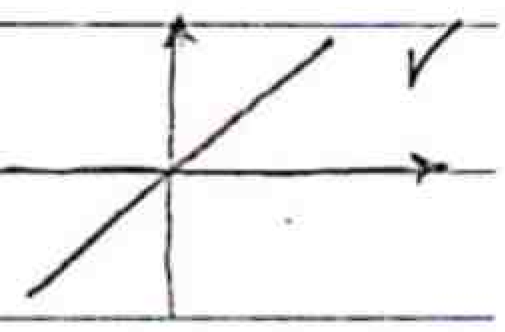
$V = R^{m\times n} \quad F = C$ ✗ , $V = C^{m\times n} \quad F = R$ ✓

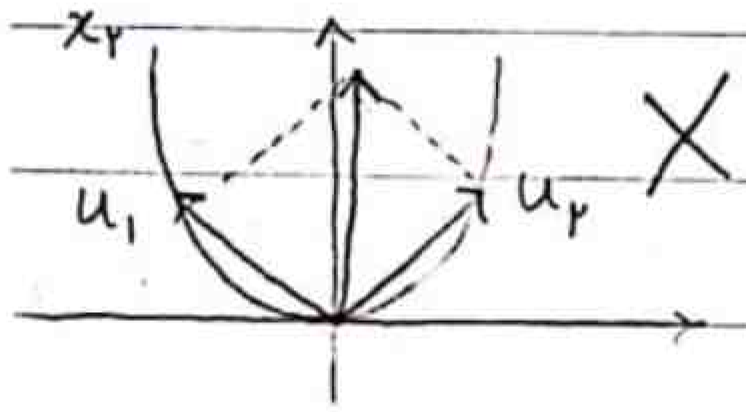
$V = R^{m\times n} \quad F = R_+$ ✓ , $V = R_+^{m\times n} \quad F = R$ ✗

Date: / / Sat Sun Mon Tue Thu Wed Fri Subject:

$V=R^2$ $y=\alpha X$ $F=R$ ✓







X از مبدا بگذرد و Flatness حفظ شود، vector space است.

**

spanning set $=\{\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+\alpha_3 V_3+\dots+\alpha_r V_r\}$

$S=\{V_1, V_2, \dots\}$, $V=\mathrm{Span}\{S\}$ $y=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=x$ → x، y را span نمی‌کنند.

۳ بردار $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ کل فضای R^3 را span می‌کنند.

* حداقل n بردار مستقل خطی، فضای n بعدی را span می‌کنند.

یادآوری:

V → vectors

F → field → R, C

+ → عمل جمع بر روی اعضای برداری — عضو بردار نیست

× → عمل ضرب مابین اعضای V و F یا مابین اعضای F — $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha=2} \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ X

** در توضیح $S_1=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \middle| x_2=x_1^2\right\}\subseteq V, F:R$ → $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$ X

$S=\{0\}$ زیرفضای بدیهی ✓

اگر V یک فضای برداری به نحوی باشد که $V=\mathrm{Span}(S)$ باشد، گوییم S یک مجموعه spanning

S is spanning set for V. برای V است.

Date: / / Sat Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri Subject:

چهار زیرفضای اصلی:

تابع f را که R^n را R^m نگاشت می‌کند در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم R(f) نشان دهنده range (برد) تابع f است. در حقیقت R(f) مجموعه ناشی از تصویر هر x تحت نگاشت f است.

رنج هر تابع خطی یک زیرفضا در R^m است.

Range Space

رنج ماتریس $A \in R^{m\times n}$، با R(A) نمایش داده شده و توسط بردتابع $f(x) = Ax$ ایجاد می‌شود.

یعنی: $R(A) = \{Ax \mid x \in R^n\} \subseteq R^m$ ، بصورت مشابه: $R(A^T) = \{A^Ty \mid y \in R^m\} \subseteq R^n$

به رنج A، فضای تصویر (image space) گفته می‌شود.

$$Ax = [A_{*1} \quad A_{*2} \quad \dots \quad A_{*n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A_{*1}x_1 + A_{*2}x_2 + \dots + A_{*n}x_n$$

بنابراین رنج A همان فضای ایجاد شده توسط ترکیب خطی ستونهای A است. به رنج A فضای ستونی A (column space) نیز گفته می‌شود.

فضای اسپن شده توسط ستونهای A = R(A) ، فضای اسپن شده توسط سطرهای A = $R(A^T)$

$b \in R(A) \iff \exists x, Ax = b$, $a \in R(A^T) \iff \exists y, A^Ty = a$ یا $y^TA = a^T$

Date: Subject:

فرض کنید A و B، دو ماتریس با سایز یکسان هستند.

$R(A^T) = R(B^T) \iff A \overset{row}{\sim} B$, $R(A) = R(B) \iff A \overset{col}{\sim} B$

مثال) بررسی کنید که آیا مجموعه های زیر فضای یکسانی را اسپن می کنند یا نه؟

$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$, $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow E_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow E_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و U فرم پلکانی ناشی از کاهش سطری A است. مجموعه های زیر، مجموعه های اسپن کننده برای فضای ستونی و سطری A هستند.

- سطرهای غیرصفر U، مجموعه $R(A^T)$ را اسپن می کند.

- ستون های اصلی A مجموعه $R(A)$ را اسپن می کند.

مثال) $R(A)$ و $R(A^T)$ را بیابید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Date: / / Subject:

$E_A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $R(A)=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, $R(A^T)=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

فضای تهی (فضای پوچی) Null space

برای ماتریس $A\in R^{m\times n}$ ، مجموعه $N(A)=\{x \mid Ax=0\}$ ، فضای تهی A نامیده می‌شود.

فضای تهی A ، تمامی پاسخ های دستگاه همگن $Ax=0$ است. مشابهاً، فضای تهی سمت چپ به صورت زیر تعریف می‌شود. $N(A^T)=\{y \mid A^Ty=0 \text{ یا } y^TA=0\}$

$N(A)=\mathrm{span}\{h_1,h_2,\dots,h_{n-r}\}$ و $N(A^T)=R(P_2^T)$

فرض کنید $A\in R^{m\times n}$ و $\mathrm{rank}(A)=r$. P ماتریسی است که $PA=U$ به فرم پلکانی است.

$P=\begin{bmatrix}P_1\\ \hline P_2\end{bmatrix}\begin{matrix}\updownarrow r \text{ سطر}\\ \updownarrow m-r \text{ سطر}\end{matrix}$ در این صورت $m-r$ سطر آخر از P فضای تهی سمت چپ A را اسپن می‌کند.

Date: / / Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

Spanning set for $R(A) = A$ ستونهای اصلی

" " " $R(A^T) = U$ سطرهای غیرصفر

" " " $N(A) =$ مجموعه متشکل از h_i ها

" " " $N(A^T) = P$ سطر انتهای $m-r$

اگر A و B دارای سایز یکسان باشند

$$\begin{cases} A \overset{row}{\sim} B \iff N(A) = N(B) \iff R(A^T) = R(B^T) \\ A \overset{col}{\sim} B \iff R(A) = R(B) \iff N(A^T) = N(B^T) \end{cases}$$

استقلال خطی

مجموعه برداری $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی است اگر تنها پاسخ معادله زیر که در آن α_i ها

اسکالر هستند، پاسخ بدیهی $\alpha_i = 0$ ، $i = 1, 2, \ldots, n$ باشد: $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$

مثال) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ← مستقل ، $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← وابسته

مثال) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{معادل}} \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

متغیر آزاد داریم پس پاسخ بدیهی $\vec{0}$ تنها پاسخ نیست و اعضای S وابسته هستند.

A is an $m \times n$ matrix

$N(A) = \{\vec{0}\} \equiv rank(A) = n \equiv$ ستونهای A تشکیل یک مجموعه مستقل خطی می دهند.

$N(A^T) = \{\vec{0}\} \equiv rank(A) = m \equiv$ سطرهای A تشکیل یک مجموعه مستقل خطی می دهند.

اگر A مربعی باشد، تمامی گزاره های زیر معادل هستند.

Date: / / Sat Sun Mon Tue Thu Wed Fri Subject:

$\text{rank}(A)=n$ ، ستون‌ها مستقل خطی هستند ، سطرها مستقل خطی هستند ، A is a Full rank matrix
مرتبه کامل

ماتریس‌های غالب قطری (Diagonaly Dominant matrices)

ماتریس $A_{n\times n}$ یک ماتریس غالب قطری است اگر: $i=1,2,\ldots,n$ ، $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$

تمامی ماتریس‌های غالب قطری غیرتکین هستند. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

می‌خواهیم بررسی کنیم که $N(A)=\{\vec{0}\}$ یعنی دستگاه $Ax=0$ ، تنها پاسخ بدیهی $x=0$ را دارد.

فرض کنید $x\neq 0$ وجود دارد که $Ax=0$ در این x فرض کنید بزرگترین مقدار در درایه kام است. یعنی

x_k از لحاظ اندازه بزرگتر از سایر x_i ها است.

برای سطر kام Ax داریم: $a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kk}x_k+a_{kn}x_n=0$

$A_{kx}\vec{x}=0$ ، $a_{kk}x_k=-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j$

$|a_{kk}x_k|=|a_{kk}||x_k|=|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j| \leqslant \sum |a_{kj}x_j| = \sum |a_{kj}||x_j| \leqslant$

$(\sum |a_{kj}|)|x_k| \longrightarrow |a_{kk}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$ بنابراین وجود $x\neq 0$ نادرست است.

ماتریس‌های وندرموند (Vandermonde)

به ماتریس زیر با شرط $x_i \neq x_j$ ماتریس Vandermonde گفته می‌شود.

اگر $m \geq n$ باشد، ستونها مستقل خطی باشند.

$$V_{m\times n}=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & & x_m^{n-1} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & & x_m^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

می‌خواهیم $N(A)=\{0\}$ را بررسی کنیم.

$$* \begin{cases} \alpha_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_1^2+\cdots+\alpha_{n-1}x_1^{n-1}=0 \\ \alpha_0+\alpha_1x_2+\alpha_2x_2^2+\cdots+\alpha_{n-1}x_2^{n-1}=0 \\ \vdots \\ \alpha_0+\alpha_1x_m+\alpha_2x_m^2+\cdots+\alpha_{n-1}x_m^{n-1}=0 \end{cases}$$

$P(x)$ یک چندجمله‌ای مرتبه $n-1$ است و می‌دانیم حداکثر $n-1$ پاسخ جزء دارد. ولی دسته معادلات * نشان می‌دهد که $P(x)$ به تعداد m پاسخ دارد. برای اینکه αها برابر صفر شوند باید حالت $m>n-1$ اتفاق بیفتد. (یعنی تنها حالت محتمل برای داشتن $m>n-1$ پاسخ، $P(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1}$ این است که αها برابر صفر شوند). بنابراین $N(A)=\{\vec{0}\}$ اگر $m\geq n$ یا $m>n-1$ باشد.

x_1 ✓ x_2 ✓ ... x_m ✓

فرض کنید $rank(A_{m\times n})=r$ است. گزاره‌های زیر برقرار هستند:

- هر زیرمجموعه ماکزیمال مستقل خطی از ستونهای A شامل دقیقاً r ستون است.
- هر زیرمجموعه ماکزیمال مستقل خطی از سطرهای A شامل دقیقاً r سطر است.

مجموعه $S=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n\}$ را در فضای V در نظر بگیرید.

- اگر S شامل یک زیرمجموعه وابسته خطی باشد، S وابسته است.
- اگر S مستقل خطی باشد، هر زیرمجموعه از S مستقل خطی است.

Date: / / Sat Sun. Mon Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

- اگر S مستقل خطی باشد و $V \in \vec{v}$، در این صورت مجموعه افزایش یافته $S_{ext} = \vec{v} \cup S$ مستقل
Extension Set
خطی است. اگر و تنها اگر $\vec{v} \notin span\{S\}$

- اگر $S \subseteq R^m$ و اگر $n > m$ باشد، S وابسته است.

پایه Basis

یک مجموعه spanning با اعضای مستقل خطی برای فضای V، تشکیل یک پایه می دهد.

مثال: ① $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ یک پایه برای فضای R^n است. $\vec{e}_i = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow$ ام i

② ستونهای ماتریس غیرتکین $A_{n\times n}$ تشکیل یک پایه برای فضای R^n می دهد.

③ سطرهای ماتریس غیرتکین $A_{n\times n}$ تشکیل یک پایه برای فضای R^n می دهد.

④ مجموعه $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ یک پایه برای فضای چندجمله ای های مرتبه n است.

⑤ برای فضای برداری بدیهی $Z = \{\vec{0}\}$ نمی توان مجموعه spanning غیرتهی پیدا کرد. بنابراین قرارداد

می کنیم که مجموعه تهی یک پایه برای فضای برداری بدیهی است.

فرض کنید V یک زیرفضا از R^m است و $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\} \subseteq V$. جملات زیر معادل هستند:

✓ B یک پایه برای V است. ✓ B یک مجموعه spanning مینیمال برای V است.

جلسه سیزدهم ۱۴۰۲/۲/۴

Date: / / Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

✓ B یک زیرمجموعه مستقل خطی، ماکزیمال برای V است.

دیمانسیون

برای فضای برداری V، دیمانسیون بصورت زیر تعریف می‌شود:

$\dim V =$ تعداد بردارهای موجود در هر پایه برای V

$\dim V =$ تعداد بردارهای موجود در هر مجموعه spanning مینیمال

مثال) - فرض کنید L یک خط در R^3 است. $\dim L = 1$

- L یک خط در R^2 است. $\dim L = 1$ - L یک خط در R است. $\dim L = 1$

- S یک صفحه در R^3 است. $\dim S = 2$ - $Z = \{\vec{0}\}$ $\dim Z = 0$

- $V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\dim V = 3$, - $V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ $\dim V = 2$

قضیه: فضاهای برداری M, N را به نحوی در نظر بگیرید که $M \subseteq N$، در این صورت:

$\dim M \leq \dim N$ ✓ ; if $\dim M = \dim N \rightarrow M = N$

برای زیرفضای اصلی ماتریسی داریم: $A \in R^{m \times n}$, $rank(A) = r$

$\dim R(A) = r$, $\dim N(A) = n - r$, $\dim R(A^T) = r$, $\dim N(A^T) = m - r$