Jozvebama.ir

Subject. مقاومت مصالح
Date. ۱۳۹۶/۱۲/۶

فصل ۱ مفاهیم پایه: تعریف تنش، کرنش، ضریب پواسون، رابطه بین تنش و کرنش

تغییر طول میله ها

فصل ۲ سازه‌های نامعین یا هیپراستاتیک در کشش و فشار

فصل ۳ تنش برشی

فصل ۴ تحلیل تنش و کرنش
- تنش تک محوره
- تنش دو محوره
- تنش سه محوره
- تنش مسطح
- دایره موهر
- اثر درجه حرارت

فصل ۵ تحلیل دیاگرام لنگر خمشی و نیروی برشی

فصل ۶ تنش برشی در تیرها

فصل ۷ ترکیب بار محوری و لنگر خمشی

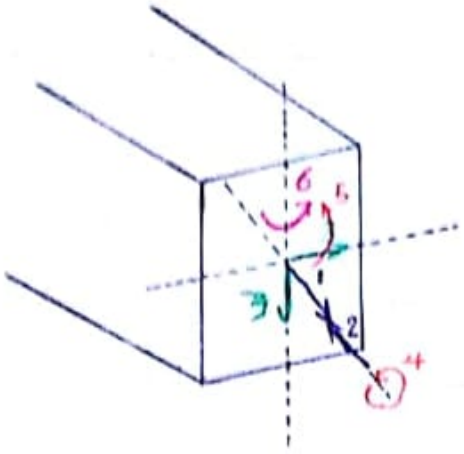
فصل ۹ لنگر پیچشی

مشخصات هندسی سطح
- مرکز سطح
- ممان اینرسی حول محورهای x و y (I_x و I_y)
- اساس مقطع (S_x و S_y)
- شعاع ژیراسیون (r_x و r_y)

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject
Date



برش مقطع

1- نیروی کششی Tension

2- نیروی فشاری Pressure

3- نیروی برشی V_y و V_x Shear

4- لنگر پیچشی Torsion

5- لنگر خمشی M_y Moment

6- لنگر خمشی M_x Moment

تنش Stress

نیرو در واحد سطح = تنش $\frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}}$ $\sigma = \frac{P}{A}$ in $\longrightarrow$ 2.54 cm

MPa $\xrightarrow{\times 10}$ kg/cm^2

ksi $\xrightarrow{\times 7}$ kg/cm^2

دستگاه	واحد	صورت تبدیل
MKS	$\frac{kgf}{cm^2}$	$9.81\,N = 1\,kgf$
SI	$\frac{N}{m^2} = Pa$	———
FPS	$\frac{lbf}{in^2} = psi$	$1\,lbf = 0.453\,kgf$

$ksi = 10^3\,psi$

PgPCO

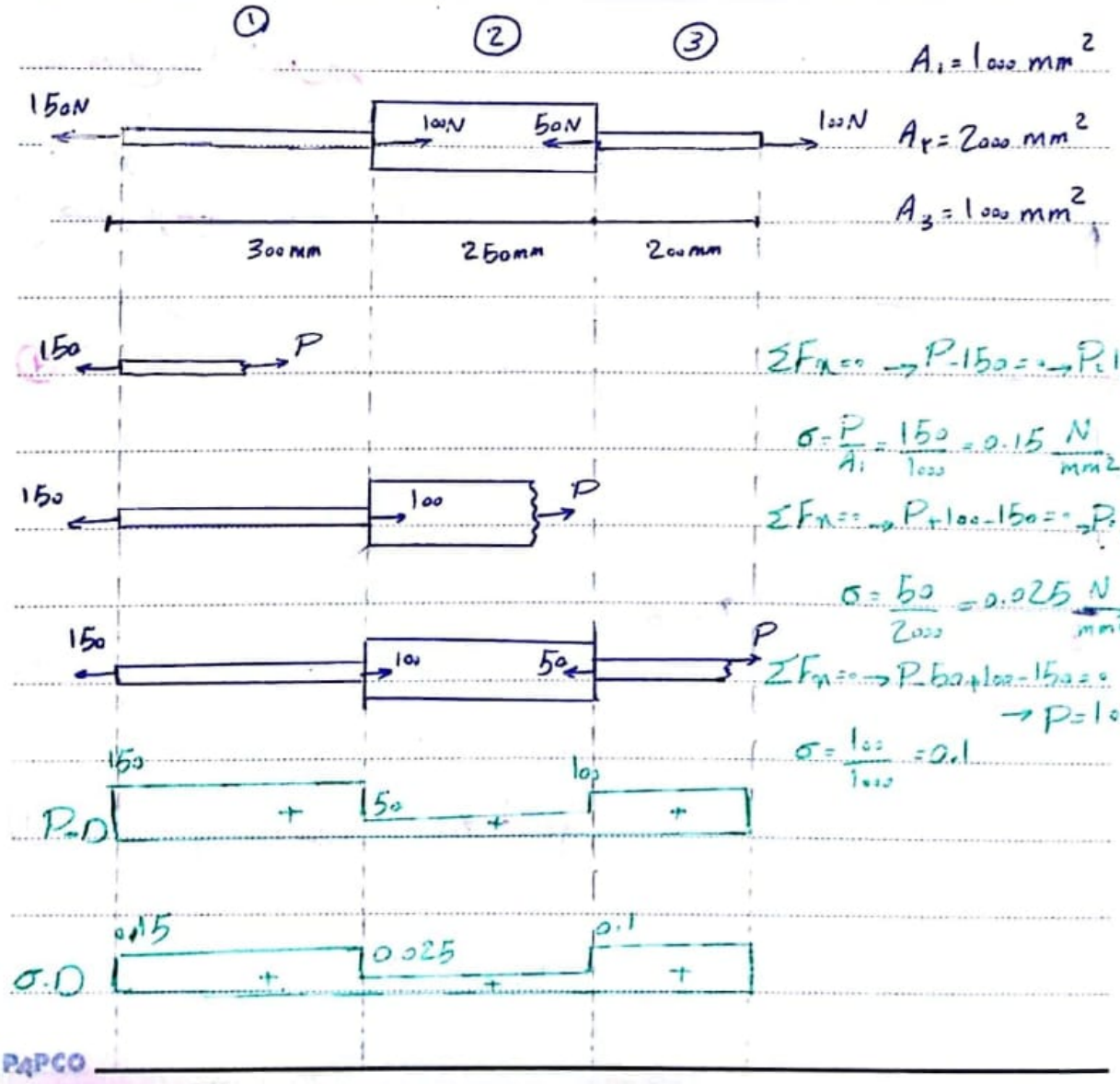
Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject
Date.

پیشوندها	نام	مقدار	مثال
k	کیلو	10^3	$kpa = 10^3 pa$
M	مگا	10^6	$Mpa = 10^6 pa = 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{N}{mm^2}$
G	گیگا	10^9	$Gpa = 10^9 pa$
m	میلی	10^{-3}	
μ	میکرو	10^{-6}	
n	نانو	10^{-9}	

مثال: در شکل زیر مطلوب است: مقدار نیروی محوری و تنش محوری در بخش‌های 1 و 2 و 3.



Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date.

کرنش strain

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

* کرنش واحد ندارد.

ضریب پواسون ν یا μ

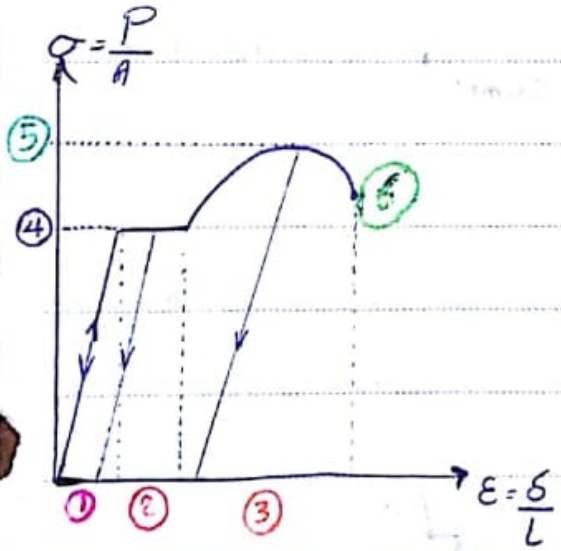
$$\text{کرنش جانبی} = \frac{\text{تغییر طول جانبی}}{\text{طول اولیه جانبی}}$$

$$\text{ضریب پواسون} = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} \right|$$

ν فولاد $= 0.25$ ν پلاستیک $= 0.5$

ν بتن $= 0.1$

رفتار مصالح در برابر اعمال بار



۱- مصالح شکل پذیر (مثل فلزات)

① ناحیه الاستیک، ناحیه ارتجاعی، ناحیه خطی

② ناحیه خمیری، ناحیه پلاستیک

③ محدوده سخت شدگی مجدد

④ تنش تسلیم، جاری شدن yeild stress

⑤ تنش نهایی Ultimate stress

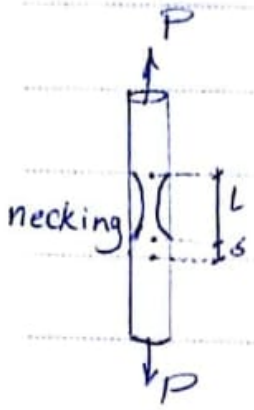
PAPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date.

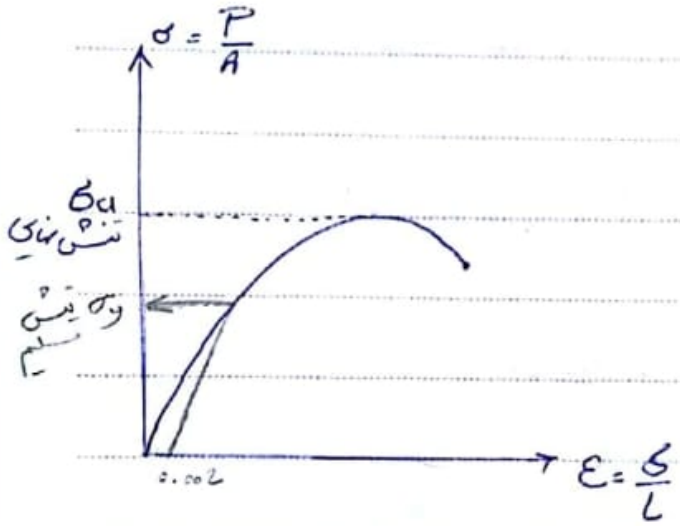
⑥ نقطه شکست Fracture point



ST37 → $\sigma_y = 2400$, $\sigma_u = 3700$ kg/cm^2

ST52 → $\sigma_y =$ [illegible], $\sigma_u = 5200$ kg/cm^2

۲- مصالح شکننده (مثل بتن)



قانون هوک

$\sigma = E \cdot \varepsilon$

E ضریب الاستیسیته یا ضریب ارتجاعی یا مدول یانگ نام دارد

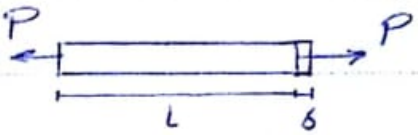
$E_{\text{فولاد}} = 2.1 \times 10^6$ kg/cm^2

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

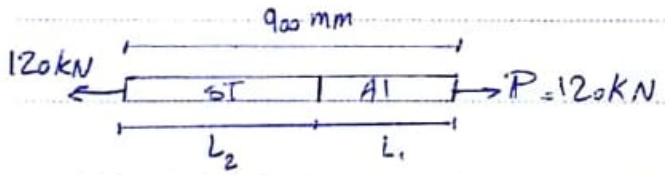
Subject
Date

تغییر طول میله (اعضای بارمحوری)



$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{A} = E\frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

مثال: یک استوانه توپر به قطر 50 mm و طول 900 mm تحت اثر نیروی کششی 120 kN قرار گرفته است. قسمتی از این استوانه به طول L_2 از جنس فولاد و قسمتی دیگر از جنس آلومینیوم و به طول L_1 می‌باشد. طول های L_1 و L_2 را به طوری تعیین کنید که افزایش طول دو میله یکسان باشد.



$$\frac{E_{ST}}{E_{AL}} = \frac{2}{0.7}$$

$$\delta_{AL} = \delta_{ST}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{P_{AL} \cdot L_1}{E_{AL} \cdot A_{AL}} = \frac{P_{ST} \cdot L_2}{E_{ST} \cdot A_{ST}} \\ &A_{AL} = A_{ST} \\ &P_{AL} = P_{ST} \end{aligned}\right\} \quad \frac{L_2}{L_1} = \frac{E_{ST}}{E_{AL}} = \frac{2}{0.7}$$

$$0.7L_2 = 2L_1 \rightarrow L_1 = 0.35L_2 \quad (1)$$

$$L_1 + L_2 = 900 \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow 0.35L_2 + L_2 = 900 \qquad L_2 = 666 \text{ mm}$$

$$L_1 = 234 \text{ mm}$$

PARCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.

Date.

مثال: میله‌ای به طول 500 mm و قطر 16mm تحت اثر نیروی محوری 12 kN قرار گرفته است. طول میله به اندازه 0.3mm افزایش یافته و از قطر آن به اندازه 0.0024 کاسته شده است. مطلوب است ضریب الاستیسیته E و نسبت پواسون مصالح مصرفی

$L = 500\,mm$ $\quad A = \frac{\pi D^2}{4}$

$d = 16\,mm$

$P = 12\,kN$ $\quad \delta = \frac{P.L}{E.A}$

$\delta = 0.3\,mm$

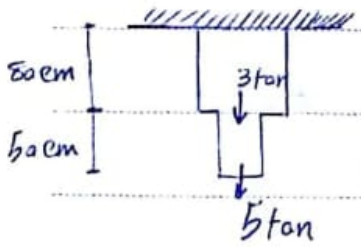
کرنش جانبی $\varepsilon = -0.0024$ $\quad 0.3 = \frac{12000 \times 500}{E \times \frac{\pi \times 16^2}{4}} \rightarrow E = 0.995 \times 10^5 \frac{N}{mm^2} = MPa$

کرنش محوری $\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0.3}{500} = 600 \times 10^{-6}$

کرنش جانبی $\frac{\text{تغییر طول میله}}{\text{طول اولیه جانبی}} = \frac{-0.0024}{16} = -150 \times 10^{-6}$

$\mu = \upsilon = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} \right| = \left| \frac{-150 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-6}} \right| = 0.25$

مثال: تغییر طول میله شکل زیر را تحت اثر بارهای وارد شده محاسبه کنید.



$A_1 = 100\,cm^2$

$A_2 = 50\,cm^2$

$\Delta L = \frac{500 \times 50}{2.1 \times 10^6 \times 50} + \frac{800 \times 80}{2.1 \times 10^6 \times 100} =$

$\Delta L = 0.002 + 0.003 = 0.005\,cm$

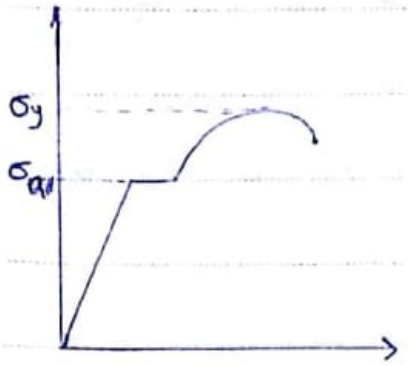
PARCO

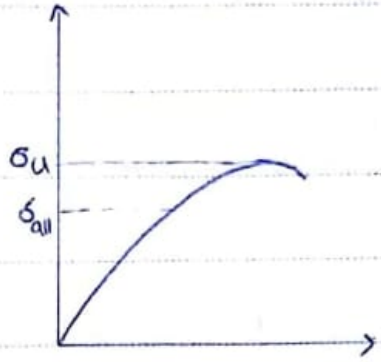
Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date: ۱۳۹۶, ۱۲, ۱۲

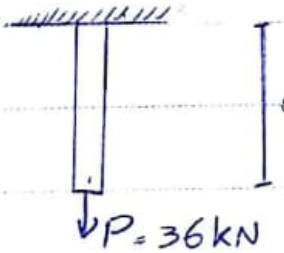
ضریب اطمینان





$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_y}{F.S} \quad F.S > 1 \qquad \sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{F.S} \quad F.S > 1$$

مثال: میله AB از جنس آلومینیوم به طول 0.8m و ضریب ارتجاعی 70 Gpa تحت اثر نیروی محوری 36kN قرار گرفته است. اگر تنش محوری مجاز 70Mpa باشد و تغییر طول مجاز 0.65mm باشد، ضخامت و عرض میله را مشخص کنید. از وزن میله صرف نظر شده و عرض میله 3 برابر ضخامت آن در نظر گرفته شود.



$E = 70\ Gpa$

$\sigma_{all} = 70\ Mpa$

$\delta_{all} = 0.65\ mm$

کنترل تنش: $\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{all}$

$$\frac{36 \times 10^3}{A} = 70 \times 10^6$$

$A = 0.514 \times 10^{-3}\ m^2$

$A = 514\ mm^2$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date.

کنترل تغییر شکل : $\delta = \frac{PL}{EA} \leq \delta_{all}$ $\quad \frac{36\times10^{3}\times0.8}{70\times10^{9}\times A} = 0.65\times10^{-3}$

$A = 0.633\times10^{-3}\ m^2$

$A = 633\ mm^2$

$b = 3t$

$A = bt = 633$

$3t \times t = 633$ $\quad t = 15\ mm$

$b = 45\ mm$

مثال : مطلوب است طراحی میلگرد فولادی که نیروی معادل $5300\ kg$ را تحمل نماید.

تنش مجاز محوری معادل $1440\ kg/cm^2$ می باشد. ضریب اطمینان مورد استفاده را پیدا کنید.

تنش تسلیم فولاد $2400\ kg/cm^2$ است.

$\sigma_{all} = 1440\ kg/cm^2$

$\sigma_y = 2400\ kg/cm^2$

کنترل تنش : $\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{all}$

$\frac{5300}{A} = 1440$ $\quad A = 3.68\ cm^2$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date.

$A = \frac{\pi D^2}{4} = 3.68$

$D = 2.16\ cm = 21.6\ mm$

use Φ 22

$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{5300}{3.8} = 1395$

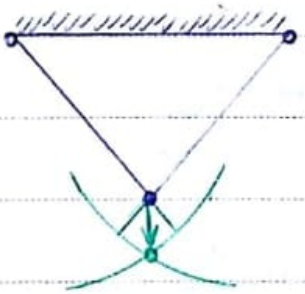
ضریب اطمینان بن بسته : $\sigma_{all} = \frac{\sigma_y}{F.S}$ $\quad F.S = \frac{\sigma_y}{\sigma_{all}} = \frac{2400}{1440} = 1.67$

ضریب اطمینان مورد استفاده : $F.S = \frac{\sigma_y}{\sigma} = \frac{2400}{1395} = 1.72$

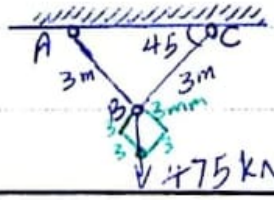
خرپا

خرپا سازه ای است که ۱- همه اعضایش خطی باشد و ۲- همه نیروها در یک صفحه وارد شود.

تعیین شکل خطی خرپا



مثال: میله فولادی AB و BC در شکل زیر چه سطح مقطعی داشته باشند تا تنش عمودی ایجاد شده در آنها از 200Mpa بیشتر نشود. ضریب الاستیسیته مصالح مصرفی در میله 200Gpa می باشد.



تعیین شکل تقریبی خطی B را محاسبه نمایید.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.

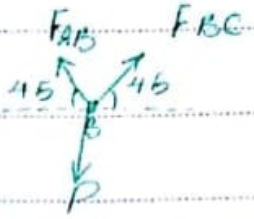
Date.

$E = 200\ GPa$

$\sigma_{all} = 200\ MPa$

$A = ?$

$\sigma_B = ?$



$\Sigma F_x = 0 \quad F_{BC}\cos 45 - F_{AB}\cos 45 = 0$

$$F_{AB} = F_{BC}$$

$\Sigma F_y = 0 \quad F_{AB}\sin 45 + F_{BC}\sin 45 - 475 = 0$

$0.707 F_{AB} + 0.707 F_{BC} = 475$

$0.707 \times 2 F_{AB} = 475$

$F_{AB} = F_{BC} = 336\ KN$

و از تنش $\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{all}$

$\frac{336 \times 10^3}{A} = 200 \times 10^6 \qquad A = 1680 \times 10^{-6}\ m^2$

$A = 1680\ mm^2$

$\delta_{AB} = \delta_{BC} = \frac{F_{AB} L_{AB}}{EA} = \frac{336 \times 10^3 \times 3}{200 \times 10^3 \times 1680 \times 10^6} = 0.003\ m$

$\delta_{AB} = \delta_{BC} = 3\ mm$

$\delta_B = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4.24\ mm$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

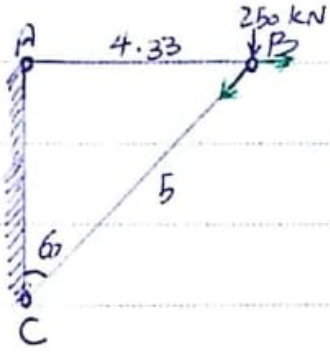
Subject.
Date.

مثال: دو میله فولادی AB و BC با اتصال مفصلی به یکدیگر و به تکیه‌گاه متصل شده‌اند

$\sigma_y = 350\ MPa$ مطابق شکل در مفصل B وارد شده است. در صورتی که تنش تسلیم $250\ kN$ با

باشد ضریب اطمینان در فنر 3.5 و در بشکن 2 فرض شود سطح مقطع لازم میله‌ها را

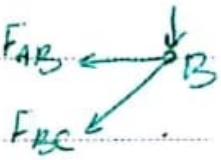
تعیین کنید. همچنین کرنش افقی و قائم مفصل B را مشخص نمایید. $E = 200\ GPa$



فنر $F.S_1 = 3.5$

بشکن $F.S_2 = 2$

$E = 200\ GPa$



$\sum F_x = 0$

① $-F_{AB} - F_{BC}\cos 30 = 0$

$\sum F_y = 0$

$-F_{BC}\sin 30 - 250 = 0$

$F_{BC}\sin 30 = -250$

$F_{BC} = -500\ kN$ فنر

① $\rightarrow -F_{AB} - (-500)\times 0.866 = 0$

$F_{AB} = 433\ kN$ بشکن

تنش مجاز: $\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} \leq \sigma_{all}$ فنری $\frac{\sigma_y}{F.S_1} = \frac{350\times 10^6}{3.5} = 100\times 10^6\ Pa$

$\frac{500\times 10^3}{A_{BC}} = \frac{350\times 10^6}{3.5} \rightarrow A_{BC} = 5000\times 10^{-6}\ m^2 = 5000\ mm^2$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.

Date

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} \leq \sigma_{all} = \frac{\sigma_y}{FS_2} = \frac{350\times10^6}{2} = 175\times10^6 \text{ Pa}$$

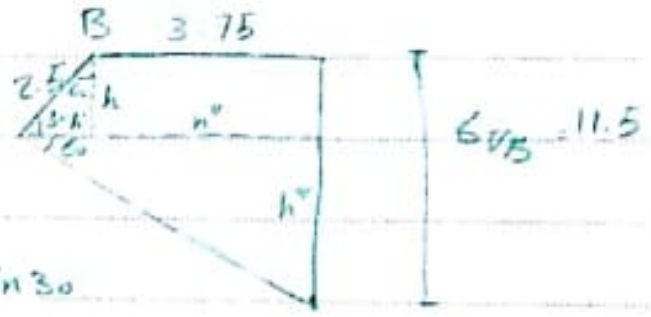
$$\frac{433\times10^3}{A_{AB}} = 175\times10^6 \rightarrow A_{AB} = 2500\times10^{-6}\ m^2 = 2500\ mm^2$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}L_{BC}}{EA_{BC}} = \frac{500\times10^3\times5}{200\times10^9\times5000\times10^{-6}} = 2.5\times10^{-3}\ m = 2.5\ mm$$

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}L_{AB}}{EA_{AB}} = \frac{433\times10^3\times4.33}{200\times10^9\times2500\times10^{-6}} = 3.75\times10^{-3}\ m = 3.75\ mm$$

$\delta_{H_B} = 3.75\ mm$

$\delta_{V_B} = 11.5\ mm$



$$\sin30 = \frac{h}{2.5} \rightarrow h = 2.5\sin30$$

$$\cos30 = \frac{h'}{2.5} \rightarrow h' = 2.5\cos30$$

$$\tan60 = \frac{h''}{h'+h''} \qquad h'' = (2.5\cos30 + 3.75)\tan60$$

$$\delta_{P_B} = h'' + h = (2.5\cos30 + 3.75)\tan60 + 2.5\sin30$$

$\delta_{V_B} = 11.5\ mm$

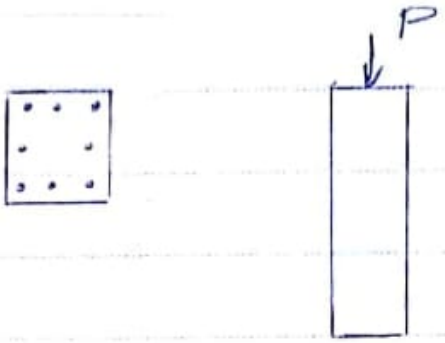
PqFCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date.

اعضا با بارمحوری از دو جنس مختلف



E_1 ضریب الاستیسیته مصالح قوی‌تر

E_2 ضریب الاستیسیته مصالح ضعیف‌تر $\quad E_1 > E_2$

A_1 سطح مقطع مصالح قوی‌تر

A_2 سطح مقطع مصالح ضعیف‌تر $\quad \frac{E_1}{E_2} = n$

$$\delta_1 = \delta_2$$

$$\frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2}$$

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2}$$

$$\rightarrow \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \rightarrow \sigma_1 = \frac{E_1}{E_2} \times \sigma_2$$

$$\sigma_1 = n\sigma_2$$

$$P = P_1 + P_2 = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = \sigma_1 A_1 + \frac{\sigma_1}{n} A_2 = \sigma_1 \left(A_1 + \frac{A_2}{n}\right)$$

$$\sigma = \frac{P}{A_1 + \frac{A_2}{n}}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{n} = \frac{P}{nA_1 + A_2}$$

سطح مقطع معادل مصالح قوی

سطح مقطع معادل مصالح ضعیف

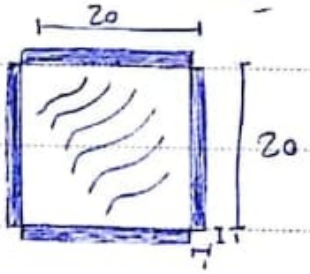
PAPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date.

مثال: ستون چوبی با مقطع مربع به ابعاد 20x20 توسط صفحات فولادی که روی آن‌ها 20 cm و ضخامت آن‌ها 1cm است مطابق شکل تقویت شده است. بار محوری معادل 70 ton بر آن وارد می‌شود. ضریب الاستیسیته فولاد و چوب به ترتیب 2×10^6 و 1.5×10^5 می‌باشد اولاً تنش در فولاد و چوب را بدست آورید ثانیاً اگر تنش مجاز فولاد برابر $1350\ kg/cm^2$ و تنش مجاز چوب $80\ kg/cm^2$ باشد، بار محوری را تا چه حدی می‌توان افزایش داد؟



$P = 70\ ton$

$E_{ST} = 2\times10^6\ kg/cm^2$

$E_W = 1.5\times10^5\ kg/cm^2$

$\sigma_{ST(all)} = 1350\ kg/cm^2$

$\sigma_{W(all)} = 80\ kg/cm^2$

$A_1 = 4\times20\times1 = 80\ cm^2$ $\qquad E_1 = E_{ST} = 2\times10^6\ kg/cm^2$

$A_2 = 20\times20 = 400\ cm^2$ $\qquad E_2 = E_W = 1.5\times10^5\ kg/cm^2$

$$n = \frac{E_1}{E_2} = 20$$

تنش محوری در فولاد $\sigma_1 = \dfrac{P}{A_1 + \frac{A_2}{n}} = \dfrac{70\times10^3}{80 + \frac{400}{20}} = 700\ kg/cm^2$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date.

$$\sigma_1 = n\,\sigma_2 \longrightarrow \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{n} = \frac{700}{20} = 35\ kg/cm^2$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{nA_1 + A_2} = \frac{70 \times 10^3}{20 \times 80 + 400} = 35$$

① اگر فولاد ابتدا به تنش مجاز برسد:

$$\sigma_1 = \sigma_{ST(all)} = 1350\ kg/cm^2$$

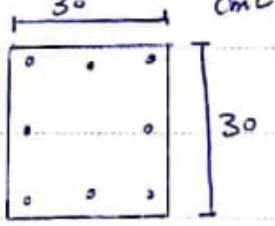
$$\sigma_1 = \frac{P}{A_1 + \frac{A_2}{n}} = \frac{P}{80 + \frac{400}{20}} = 1350 \qquad P = 1350\ kgf$$

② اگر چوب اول به تنش مجاز برسد

$$\sigma_2 = \sigma_{w(all)} = 80\ kg/cm^2$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{nA_1 + A_2} = \frac{P}{20 \times 80 + 400} = 80 \qquad P = 16000\ kgf$$

مثال: یک ستون بتن مسلح با مقطع مربع به ابعاد 30 × 30 باید بار محوری 68ton را تحمل نماید. اگر تنش مجاز بتن و فولاد به ترتیب $60\ kg/cm^2$ و $1350\ kg/cm^2$ باشد تعداد میلگردهای لازم به قطر 16 mm را به دست آورید.



Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date.

$\Phi 16$

$\sigma_{c(all)} = 60 \ kg/cm^2$

$\sigma_{ST(all)} = 1350 \ kg/cm^2$

$E_c = 1.4 \times 1.5 \ kg/cm^2$

$E_{ST} = 2.1 \times 1.6 \ kg/cm^2$

$n = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_{ST}}{E_c} = \frac{2.1 \times 1.6}{1.4 \times 1.5}$

$n = 15$

① اگر تنش در فولاد تنش مجاز باشد:

$\sigma_1 = \sigma_{ST(all)} = 1350 \ kg/cm^2$

$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{n} = \frac{1350}{15} = 90 > \sigma_{c(all)} = 60 \ kg/cm^2$ N.G

② اگر تنش در بتن تنش مجاز باشد:

$\sigma_2 = \sigma_{c(all)} = 60 \ kg/cm^2$

$\sigma_1 = n\sigma_2 = 15 \times 60 = 900 \ kg/cm^2 < \sigma_{ST(all)} = 1350 \ kg/cm^2$

ok ✓

$\sigma_2 = \frac{P}{nA_1 + A_2} = \sigma_{c(all)}$

$A_1 =$ سطح مقطع میلگرد ✓

$A_2 = 30 \times 30 - A_1$

$\frac{68000}{15A_1 + (900 - A_1)} = 60$

$A_1 = 16.67 \ cm^2$

$n \times \frac{\pi \times 1.6^2}{4} = 16.67$

$\Phi 16 \longrightarrow n = 8.3 \sim 9 \ \Phi 16$

PqPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date. ۱۳۹۶/۱۲/۲۰

سازه‌های نامعین (هیپراستاتیک)

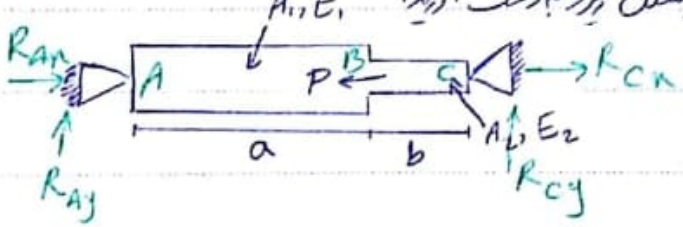
سازه‌هایی که تعداد مجهولات در آن بیشتر از معادلات تعادل قابل محاسبه باشد و یا استفاده از سه معادله تعادل قابل محاسبه باشد سازه نامعین هستند.

۱- روابط تعادل $\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_A = 0$

۲- روابط نیرو و تغییر شکل $\delta = \frac{PL}{EA}$

۳- روابط سازگاری تغییر شکل

مثال: مطلوب است محاسبه میله ABC در شکل زیر را به دست آورید.



$\Sigma F_x = 0$

$R_{Ax} + R_{Cx} - P = 0$

$R_{Ax} + R_{Cx} = P$ (4)

$\Sigma F_y = 0 \quad R_{Ay} + R_{Cy} = 0$

$\Sigma M_A = 0 \xrightarrow{+} R_{Cy}(a+b) = 0 \rightarrow R_{Cy} = 0$

$\Big\} \; R_{Ay} = 0$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject

Date

رابطه سازگاری تغییر شکل $\rightarrow \delta_{AB} + \delta_{BC} = 0$

$$\frac{F_{AB} L_{AB}}{E_1 A_1} + \frac{F_{BC} L_{BC}}{E_2 A_2} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{AB} + R_{AX} = 0$$

$$F_{AB} = -R_{AX} \quad (2)$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{BC} + R_{AX} - P = 0$$

$$F_{BC} = P - R_{AX} \quad (3)$$

(1), (2), (3) $\rightarrow$

$$\frac{-R_{AX} \cdot a}{E_1 A_1} + \frac{(P - R_{AX}) \cdot b}{E_2 A_2} = 0$$

$$\rightarrow R_{AX} = \frac{P b A_1 E_1}{b A_1 E_1 + a A_2 E_2}$$

$$(4) \rightarrow R_{CX} = \frac{P a A_2 E_2}{b A_1 E_1 + a A_2 E_2}$$

توی این مثال با توجه به این که می‌دونیم در هر حال بعد از هر تغییر شکلی فاصله دو تا تکیه‌گاه نمی‌تونه تغییر کنه

رابطه سازگاری اینکه مجموع تغییر طول‌های دو قسمت برابر صفر باشه یعنی هر چقدر یکیشون کشیده شد

Scanned by CamScanner

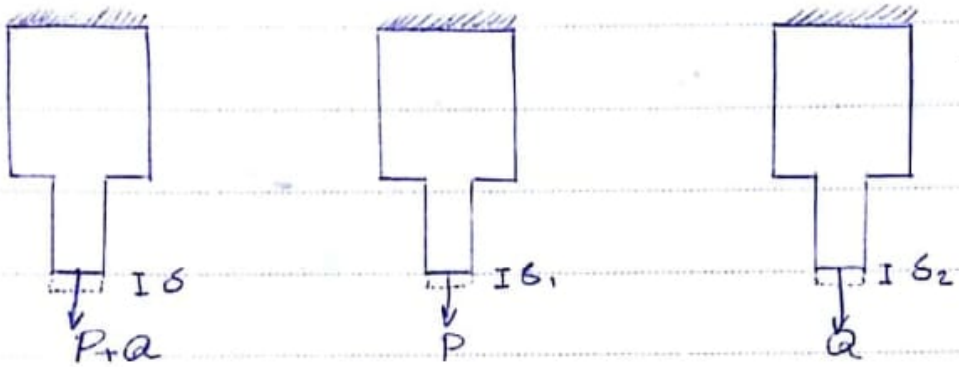
Jozvebama.ir

Subject
Date

همیشه دیگه فشرده بشه و برعکس،

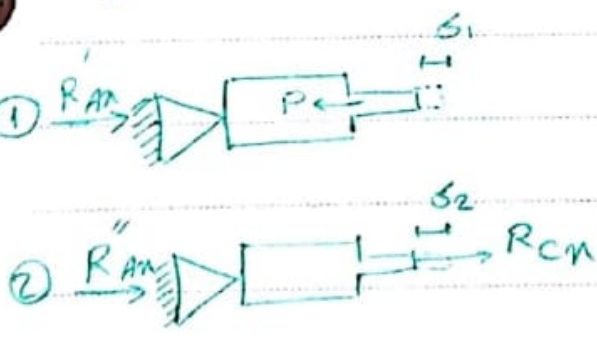
همین مثال رو به روش دیگه‌ای هم میشه حل کرد

یه اصلی وجود داره به اسم اثر نیروی به چیزی وارد بشه؛ مثلاً P+Q به این شکلی در بیان می‌شه، هر کدوم از P و Q به تنهایی جداگانه وارد بشن و بعد اثرشون با هم جمع بشه (اصل جمع آثار نیروها Super position)



$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

برای حل مثل قبلی به روش اصل جمع آثار نیروها یکی از عارضه‌ها رو بار زائد استعفایی در نظر می‌گیریم:



رابطه سازگاری تغییر شکل $\delta_1 + \delta_2 = 0$

PqPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject

Date

① $\delta_1 = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \frac{F_{AB}\,a}{E_1 A_1} + \frac{F_{BC}\,b}{E_2 A_2} = \frac{-P\cdot a}{E_1 A_1}$

BC جدا

F_{BC} — $\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{BC} = 0$

AB جدا

F_{AB} — P — $\Sigma F_x = 0 \rightarrow -F_{AB} - P = 0 \rightarrow F_{AB} = -P$

② $\delta_2 = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \frac{F_{AB}\cdot a}{E_1 A_1} + \frac{F_{BC}\cdot b}{E_2 A_2} = \frac{R_{cx}\cdot a}{E_1 A_1} + \frac{R_{cx}\cdot b}{E_2 A_2}$

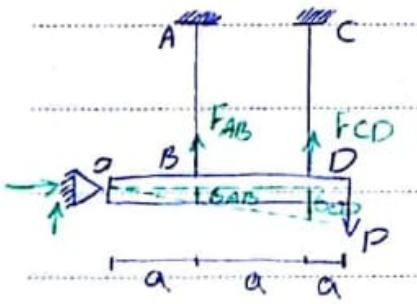
BC جدا

F_{BC} — R_{cx} $\quad \Sigma F_x = 0 \rightarrow -F_{BC} + R_{cx} = 0 \rightarrow F_{BC} = R_{cx}$

AB جدا

F_{AB} — R_{cx} $\quad \Sigma F_x = 0 \rightarrow -F_{AB} + R_{cx} = 0 \rightarrow F_{AB} = R_{cx}$

مثال: میله صلبی به طول $3a$ به وسیله دو کابل مشابه AB و CD نگه‌داری شده است. سطح مقطع هریک از کابل‌ها $20\,cm^2$ و بار $P = 25000\,kgf$ است. تنش در کابل‌های BC, AB را بدست آورید.



$A = 20\,cm^2$

$P = 25000\,kgf$

$\Sigma M_O \xrightarrow{+\circlearrowleft} F_{AB}(a) + F_{CD}(2a) - P(3a) = 0$

① $F_{AB} + 2F_{CD} = 3P = 3\times 25000 = 75000$

P&PCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject
Date.

رابطه سازگاری تغییر شکل $\frac{\delta_{AB}}{\delta_{CD}} = \frac{a}{2a} \rightarrow \delta_{CD} = 2\delta_{AB}$

$$\frac{F_{CD}L}{EA} = 2\frac{F_{AB}L}{EA}$$

$$(2) \quad F_{CD} = 2F_{AB}$$

$$(1),(2) \rightarrow F_{AB} + 2(2F_{AB}) = 75000$$

$$5F_{AB} = 75000 \rightarrow F_{AB} = 15000 \text{ kgf}$$

$$F_{CD} = 2F_{AB} = 30000 \text{ kgf}$$

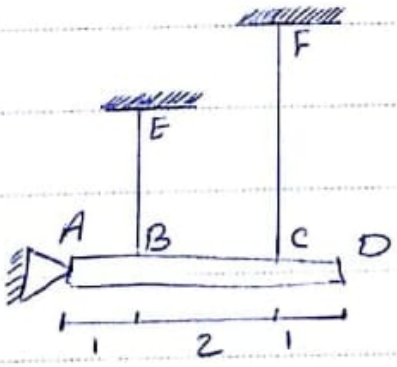
$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A} = \frac{15000}{20} = 750 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{F_{CD}}{A} = \frac{30000}{20} = 1500 \frac{kg}{cm^2}$$

مثال: جسم AD به صورت صلب فرض شده است و میله BE از فولاد و میله CF از آلومینیوم می‌باشد.

مشخصات میله BE و CF به شرح زیر تعریف شده است. اگر درجه حرارت ۱۰۰° افزایش یابد

مقدار تنش‌های ایجاد شده در BE و CF را به دست آورید.



$\Delta T = 100^\circ C$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.

Date.

فولاد BE میله — آلومینیوم CF میله

$\alpha_{ST} = 12 \times 10^{-6} \ /^\circ C$ — $\alpha_{Al} = 23 \times 10^{-6} \ /^\circ C$

$L_{ST} = 1.5 \ m$ — $L_{Al} = 2 \ m$

$A_{ST} = 4 \ cm^2$ — $A_{Al} = 8 \ cm^2$

$E_{ST} = 2.1 \times 10^6 \ kg/cm^2$ — $E_{Al} = 0.7 \times 10^6 \ kg/cm^2$

$$\delta_{BET} = L_{ST} \alpha_{ST} \Delta T = 150 \times 12 \times 10^{-6} \times 100 = 0.18 \ cm$$

$$\delta_{CFT} = L_{Al} \alpha_{Al} \Delta T = 200 \times 23 \times 10^{-6} \times 100 = 0.46 \ cm$$

از طرف دیگر: $\frac{\delta_{BE}}{\delta_{CF}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{\delta_{BET} + \delta_{BEF}}{\delta_{CFT} + \delta_{CFF}} = \frac{1}{3}$

$$\frac{0.18 + \frac{F_{BE} L_{ST}}{E_{ST} A_{ST}}}{0.46 + \frac{F_{CF} A_{Al}}{E_{Al} A_{Al}}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{0.18 + \frac{F_{BE} \times 150}{2.1 \times 10^6 \times 4}}{0.46 + \frac{F_{CF} \times 200}{0.7 \times 10^6 \times 8}} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow F_{CF} = 1.5 F_{BE} + 2240 \quad (1)$$

تعادل $\sum M_A = 0 \xrightarrow{+\circlearrowleft} F_{BE} \times 1 + F_{CF} \times 3 = 0 \rightarrow F_{BE} = -3 F_{CF} \quad (2)$

(1),(2) $\rightarrow$ $F_{BE} = -1222 \ kg$, $F_{CF} = 407 \ kg$

Scanned by CamScanner

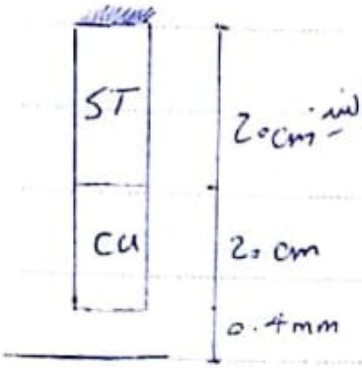
Jozvebama.ir

Subject.
Date.

$$\sigma_{BE} = \frac{F_{BE}}{A_{ST}} = \frac{-1222}{4} = -306 \ kg/cm^2$$

$$\sigma_{CF} = \frac{F_{CF}}{A_{Al}} = \frac{407}{8} = 51 \ kg/cm^2$$

مثال: در شکل مقابل فاصله بین تا صفحه صلب پایین 0.4 mm است. دمای این میله 15°C است



اگر دما تا 85°C افزایش یابد تنش ایجاد شده در میله ها را محاسبه کنید.

$E_{ST} = 2 \times 10^6 \ kg/cm^2$ $\quad \alpha_{ST} = 12.5 \times 10^{-7} /°C$

$E_{Cu} = 1 \times 10^6 \ kg/cm^2$

$T_1 = -15$ $\quad \alpha_{Cu} = 16.5 \times 10^{-7} /°C$

$T_2 = 85$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 85 - (-15) = 100^\circ C$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_{ST} &= L_{ST} \alpha_{ST} \Delta T = 20 \times 12.5 \times 10^{-7} \times 100 = 0.025 \ cm \\ \delta_{Cu} &= L_{Cu} \alpha_{Cu} \Delta T = 20 \times 16.5 \times 10^{-7} \times 100 = 0.033 \ cm \end{aligned}\right\} 0.058$$

$$0.058 - 0.04 = 0.018 \ cm$$

$$\delta_{ST} + \delta_{Cu} = 0.018 \ cm$$

$$\frac{F_{ST} L_{ST}}{E_{ST} A_{ST}} + \frac{F_{Cu} L_{Cu}}{E_{Cu} A_{Cu}} = 0.018 \rightarrow \sigma \left(\frac{L_{ST}}{E_{ST}} + \frac{L_{Cu}}{E_{Cu}} \right) = 0.018$$

PqPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.

Date.

$A_{ST} = A_{cu}$

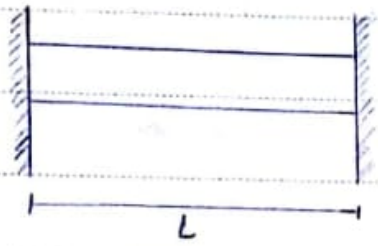
$F_{ST} = F_{cu}$

$\sigma = \frac{F_{ST}}{A_{ST}} = \frac{F_{cu}}{A_{cu}}$

$\sigma \left(\frac{20}{2\times10^6} + \frac{20}{1\times10^6} \right) = 0.018$

$\sigma = 600\ kg/cm^2$

اثر درجه حرارت



ΔT

$\left.\begin{aligned} \delta = L\alpha\Delta T \\ \delta = \frac{PL}{EA} \end{aligned}\right\} \quad \frac{PL}{EA} = L\alpha\Delta T$

مهم $\boxed{P = EA\alpha\Delta T}$

$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{EA\alpha\Delta T}{A}$

مهم $\boxed{\sigma = E\alpha\Delta T}$

مهم: اگر سازه معین باشد اثر درجه حرارت باعث ایجاد تنش نمی‌شود.

PdPCO

Scanned by CamScanner

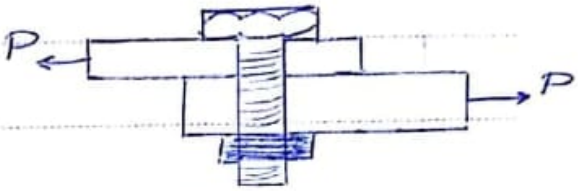
Jozvebama.ir

Subject
Date

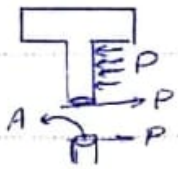
تنش های برشی

تنش عمودی $\sigma = \frac{P}{A}$

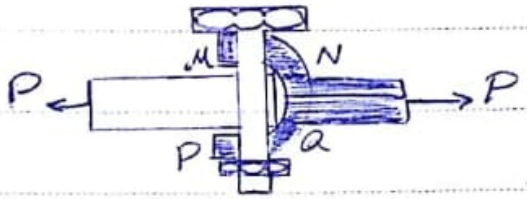
$\tau = \frac{V}{A}$



تنش برشی ۱



$\tau = \frac{P}{A}$



تنش برشی ۲ $\tau = \frac{\frac{P}{2}}{A}$

مثال: در اتصال تنش برشی ۱ نیروی معادل 6.280 ton بر اتصال وارد می شود. اگر تنش برشی مجاز

$\tau_{all} = 1000\ kg/cm^2$ باشد مطلوب است قطر پیچ مورد نیاز

$\tau = \frac{P}{A} = \frac{6280}{A} \leq \tau_{all} = 1000$

$\frac{6280}{A} = 1000 \rightarrow A = 6.28\ cm^2 = \frac{\pi D^2}{4} \rightarrow D = 2.83$

USE M30

PAPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date. ۱۳۹۷/۱/۱۹

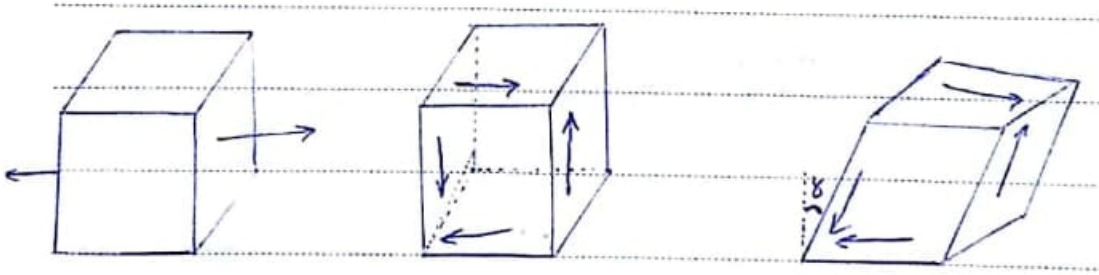
مثال: در اتصال شکل 2 مقدار نیرو 7500 lbf و قطر پیچ 0.5 in است مطلوب است تنش برشی متوسط در Pa, MN.

$$\tau = \frac{\frac{P}{2}}{A} = \frac{\frac{7500}{2}}{\frac{\pi \times 0.5^2}{4}} = 19.98 \frac{lbf}{in^2} = psi = 19.098\ ksi$$

تنش برشی

تنش عمودی $\sigma = \frac{P}{A}$ $\quad \varepsilon = \frac{\delta}{L}$ نیرو عمود بر سطح $\quad \sigma = E\varepsilon$ یا ضریب الاستیسیته

تنش برشی $\tau = \frac{V}{A}$ $\quad \gamma =$ کرنش برشی نیرو در راستای سطح $\quad \tau = G\gamma$ یا ضریب الاستیسیته برشی



$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

ضریب پواسن

υ نشانه در مورد فولاد

$$\upsilon_{ST} = 0.3 \rightarrow G = \frac{E}{2(1+0.3)} \qquad G = \frac{E}{2.6} = 0.8 \times 10^6$$

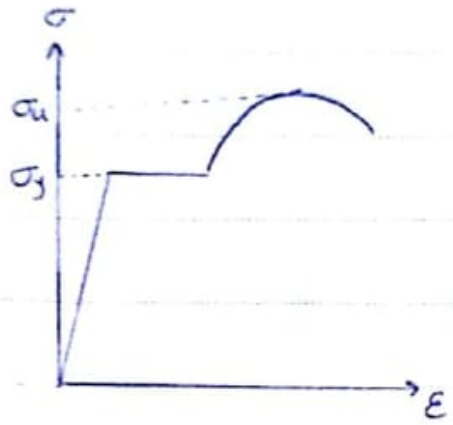
$E_{ST} = 2.1 \times 10^6\ kg/cm^2$

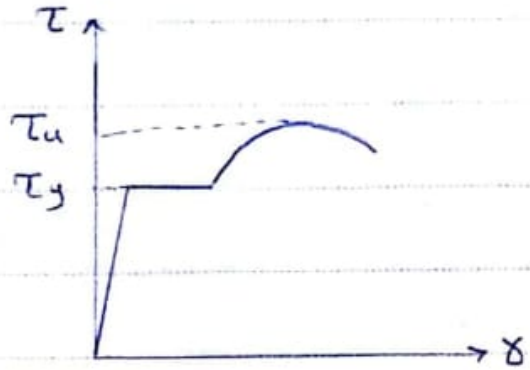
Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject
Date

معمولاً در مصالح مشابه فولاد $\tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$



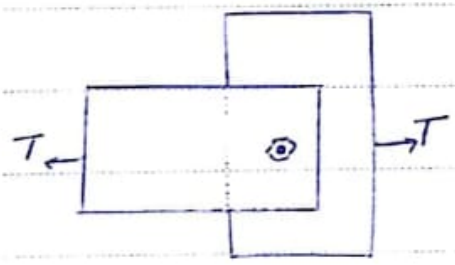


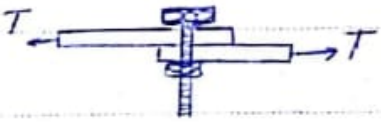
$F_b = 144_0 = \frac{F_y}{1.67}$ تنش مجاز خمشی

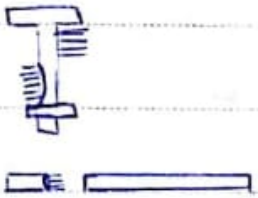
$F_y = 96_0 = \frac{F_y}{2.5} = \frac{\frac{F_y}{\sqrt{3}}}{1.44}$

تنش لهیدی

وقتی دو یا چند المان روی هم تکیه می‌کنند در آنها تنشی تحت عنوان تنش لهیدی ایجاد می‌شود و معمولاً مقدار آن به صورتی است که قابل چشم پوشی است اما در اتصال به وسیله پیچ به محاسبه آن نیاز داریم.





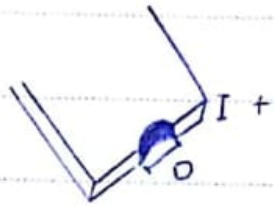


PqPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject
Date



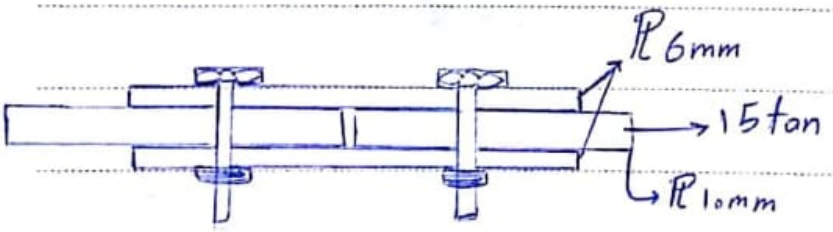
تنش لهیدی $\sigma' = \frac{P}{nDt}$ ← نیرو

n ← تعداد پیچ
t ← ضخامت ورق

تنش مجاز لهیدی $\leq \sigma'_{all}$

$\sigma'_{all} = (2-2.5)\sigma_{all}$

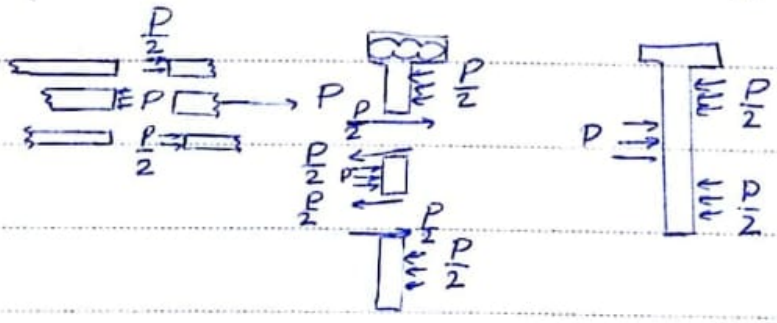
مثال: مطلوب است تعداد پیچ های لازم در هر سمت اتصال شکل زیر به طوری که قطر پیچ ها 18 mm، ضخامت صفحه اصلی 1 cm، ضخامت صفحات فرعی 6 mm، نیروی اعمال شده برابر 15 ton، تنش مجاز برشی پیچ ها $1000\ kg/cm^2$ و تنش لهیدی مجاز $2500\ kg/cm^2$ باشد.



$D = 18\ mm$

$\tau_{all} = 1000\ kg/cm^2$

$\sigma_{all} = 2500\ kg/cm^2$



Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date.

الف) کنترل برشی بیچ ها

$$\tau = \frac{V}{nA_b} = \frac{\frac{P}{2}}{n\frac{\pi D^2}{4}}$$

$$\tau = \frac{\frac{15000}{2}}{n\times\frac{\pi\times1.8^2}{4}} < \tau_{all} = 1000$$

$$n = 2.95 = 3$$

ب) کنترل لهیدگی ورق

لهیدگی ورق اصلی

$$\sigma' = \frac{P}{nDt} = \frac{15000}{n\times1.8\times1} < \sigma'_{all} = 2500$$

$$n = 3.33 \sim 4$$

لهیدگی ورق فرعی

$$\sigma' = \frac{P}{nDt} = \frac{\frac{15000}{2}}{n\times1.8\times0.6} < \sigma'_{all} = 2500$$

$$n = 2.78 \sim 3$$

use 4 M18

تحلیل تنش و کرنش

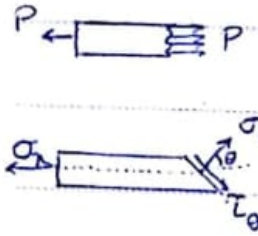
① تنش تک محوره

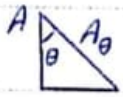
$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.
Date.





$$\cos\theta = \frac{A}{A_\theta}$$

$$A_\theta = \frac{A}{\cos\theta}$$

$$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow \sigma_\theta \cdot \cos\theta \cdot A_\theta + \tau \cdot \sin\theta \cdot A_\theta = \sigma_x \cdot A$$

$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow \sigma_\theta \cdot \sin\theta \cdot A_\theta = \tau \cos\theta \cdot A_\theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta$$

$$\tau_\theta = \sigma_x \sin\theta \cos\theta$$

① مهم

$\cos\theta = 1 \longrightarrow \theta = 0 \longrightarrow \sigma_{\theta max} = \sigma_x$

② مهم

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}\sigma_x$$

زاویه θ زاویه عمود بر سطح است نسبت به محور x ها است

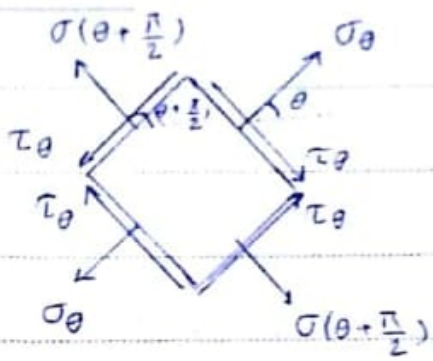
$\sin 2\theta = 1 \longrightarrow 2\theta = 90 \longrightarrow \theta = 45$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject

Date



$$\sigma(\theta+\frac{\pi}{2}) = \sigma_x \cos^2(\theta+\frac{\pi}{2})$$

$$\sigma(\theta+\frac{\pi}{2}) = \sigma_x \sin^2\theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta$$

$$\sigma(\theta+\frac{\pi}{2}) + \sigma_\theta = \sigma_x (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \rightarrow \sigma(\theta+\frac{\pi}{2})$$

مثال: میله ای با سطح مقطع $850\ mm^2$ مطابق شکل تحت اثر نیروی کششی $60\ kN$ قرار گرفته است.

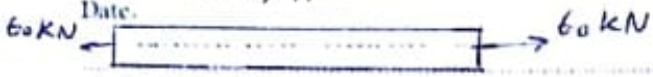
الف) تنش عمودی و برشی را بر صفحه ای که مطابق شکل با محور میله زاویه 30° می سازد محاسبه نمایید.

ب) حداکثر تنش عمودی و حداکثر تنش برشی و جهات مربوط به آن را مشخص نمایید.

Scanned by CamScanner

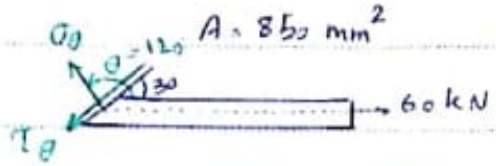
Jozvebama.ir

Subject. ۱۳۹۷/۱/۲۶
Date.



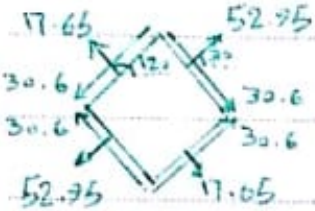
الف) $\theta = 90 + 30 = 120$

$A = 850\ mm^2$



$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta = 70.6 \cos^2 120$

$\sigma_\theta = 17.65\ N/mm^2$ کشش

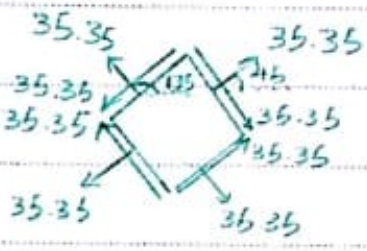


$\tau_\theta = \sigma_x \sin\theta \cos\theta = 70.6 \sin 120 \cos 120 = 30.6\ N/mm^2$

$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{60000}{850} = 70.6\ \frac{N}{mm^2}$

ب) $\sigma_{\theta max} = \sigma_x = 70.6$ $\theta = 0^\circ$

$\tau_{\theta max} = \frac{1}{2}\sigma_x = \frac{1}{2} \times 70.6 = 35.35\ \frac{N}{mm^2}$ $\theta = 45^\circ$

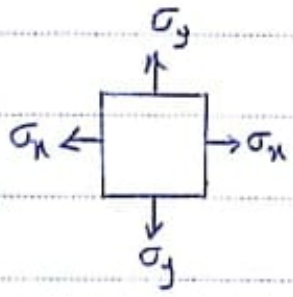


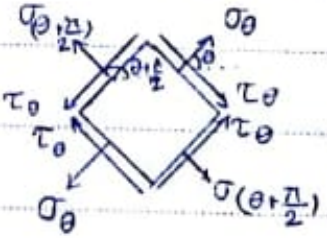
$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta = 70.6 \cos^2 45$

$\sigma_\theta = 35.35\ \frac{N}{mm^2}$

② تنش در محوره

در دو راستای محور برهم تنش وجود دارد:





↓ − ↑

↑ + ↓

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject

Date

1) $\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta$

$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$

2) $\sigma_\theta + \sigma(\theta + \frac{\pi}{2}) = \sigma_x + \sigma_y$

$\tau(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\tau_\theta$

3) $\tau_{\theta_{max}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \qquad \theta = 45^\circ$

$\sigma_{\theta_{max,min}} = \sigma_x \pm \sigma_y$

$\max \sigma_\theta \rightarrow \frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta = 0 \rightarrow \sin 2\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$ یا $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\theta = 0 \rightarrow \sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times 1 = \sigma_x$

$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times (-1) = \sigma_y$

مثال: تنش دو محوره مطابق شکل زیر بر بخشی از سازه وارد می‌شود. مطلوب است:

الف) تنش‌های عمودی و برشی در زاویه ای N عمود بر سطح با جهت مثبت محور x ها زاویه

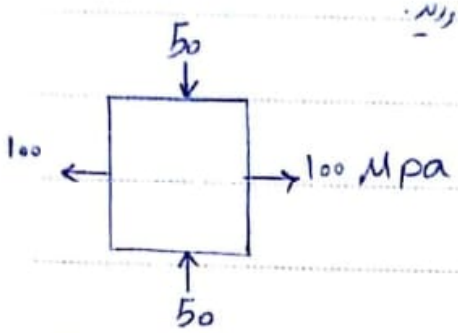
Scanned by CamScanner

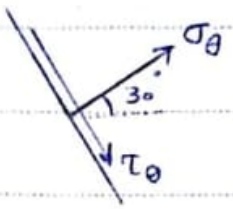
Jozvebama.ir

Subject
Date

30° را بسازید و بدست آورید.

ب) max تنش عمودی و برشی وجهات مربوطه را بدست آورید.





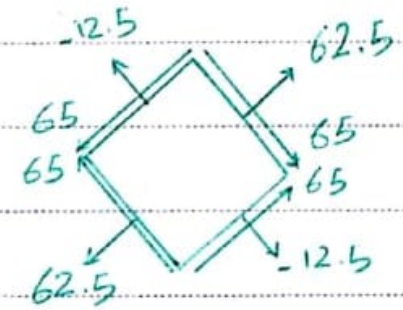
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta = \frac{100 + (-50)}{2} + \frac{100 - (-50)}{2}\cos 60^\circ$$

$$\sigma_\theta = 62.5 \text{ Mpa}$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta = \frac{100 - (-50)}{2}\sin 60 = 64.95 \text{ Mpa}$$

$$\theta = 0, 90 \longrightarrow \begin{cases} \sigma_{max} = 100 \text{ Mpa} \\ \sigma_{min} = -50 \text{ Mpa} \end{cases}$$

$$\theta = 45 \longrightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{100 - (-50)}{2} = 75 \text{ Mpa}$$



Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.

Date.

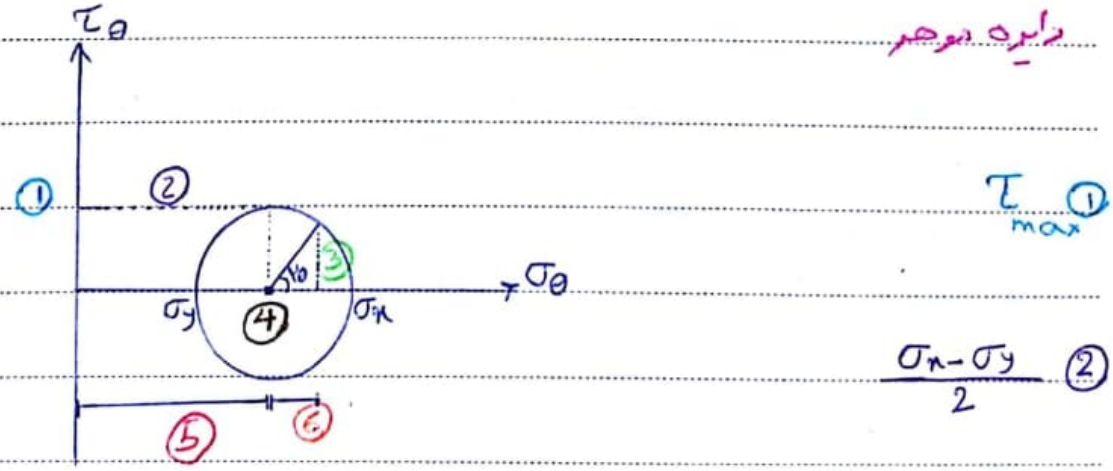
$$\textcircled{1}\begin{cases}\sigma_\theta = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta \\ \tau_\theta = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\sigma_\theta - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta \\ \tau_\theta = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\left(\sigma_\theta - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \cos^2 2\theta \left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 \\ \tau_\theta^2 = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \sin^2\theta\end{cases}$$

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \underbrace{\left[\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta\right]}_{1}$$

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2$$



دایره موهر

τ_{max} ①

$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ ②

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject

Date

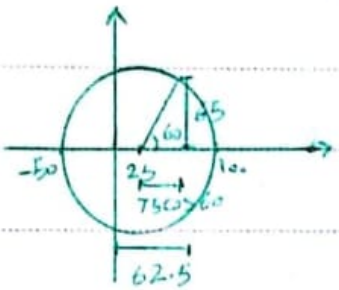
$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta \quad (3)$$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (5)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta \quad (6)$$

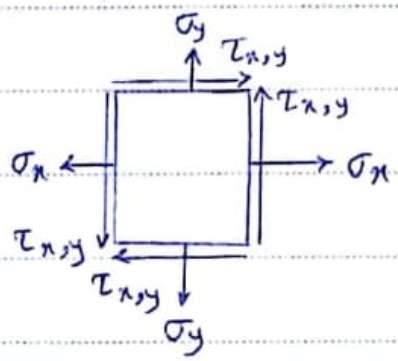
مثال: دایره مور مثل قبلی!



$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100 - 50}{2} = 25$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{100 - (-50)}{2} = 75$$

نکته مسئله



(1)

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{x,y} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{x,y} \cos 2\theta$$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject

Date

(2)

تنش عمودی اصلی

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}}$$

تنش برشی حداکثر

$$\cot 2\theta_s = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

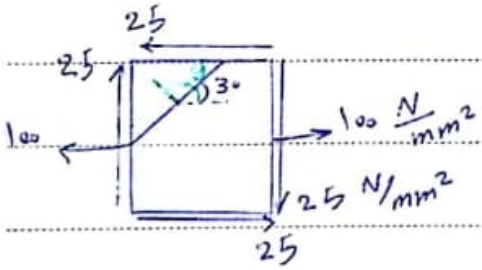
$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}}$$

مثال: وضعیت تنش در نقطه‌ای از سازه مطابق شکل زیر است:

الف) تنش عمودی و برشی را در صفحه‌ای که مطابق شکل زاویه 30° می‌سازد پیدا کنید.

ب) تنش‌های اصلی و برشی و جهات مربوطه را تعیین نمایید.

ج) مطلوب است تعیین تنش عمودی در محلی که تنش برشی max است.



$\theta = 90 + 30 = 120$

$\sigma_x = 100$

$\tau_{xy} = -25$

PdPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject

Date

الف)
$$\begin{cases} \sigma_\theta = \frac{100+0}{2} + \frac{100-0}{2}\cos 240 + (-25)\sin 240 = 46.65 \ N/mm^2 \\ \tau_\theta = \frac{100-0}{2}\sin 240 - (-25)\cos 240 = -55.8 \ N/mm^2 \end{cases}$$

ب) $\tan 2\theta_p = \frac{2\times(-25)}{100-0} = -0.5 \rightarrow \begin{cases} \theta_p = -13.28^\circ \\ \theta_p = 76.72^\circ \end{cases}$

$$\sigma_{1,2} = \frac{100+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100-0}{2}\right)^2 + (-25)^2} = \begin{cases} 105.9 \ MPa \\ -5.9 \ MPa \end{cases}$$

$\cot 2\theta_s = \frac{2(-25)}{100+0} \rightarrow \begin{cases} \theta_s = 31.72 \\ \theta_s = 121.72 \end{cases}$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{100-0}{2}\right)^2 + (-25)^2} = 55.9 \ MPa$$

ج) $\sigma_\theta = \frac{100+0}{2} + \frac{100-0}{2}\cos(2\times 31.72) + (-25)\sin(2\times 31.72)$

$\sigma_\theta = 50 \ MPa$

دایره موهر تنش مسطح

τ_θ

$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ ①

σ_2 ① σ_1 σ_θ

② 2θ

مبدا حرکت

$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$ ②

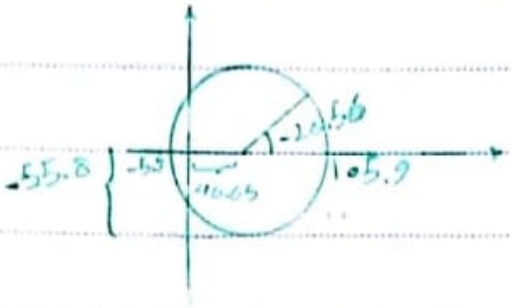
Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject

Date

مثال: دایره مور هر مثال قبل!

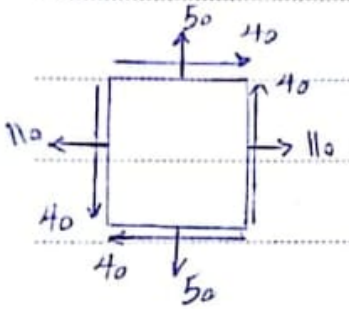


مثال: در صورتی که وضعیت تنش‌ها در بخشی از سازه مطابق شکل زیر باشد به کمک دایره مور هر مورد را بیابید:

الف) تنش‌های اصلی و جهات اصلی

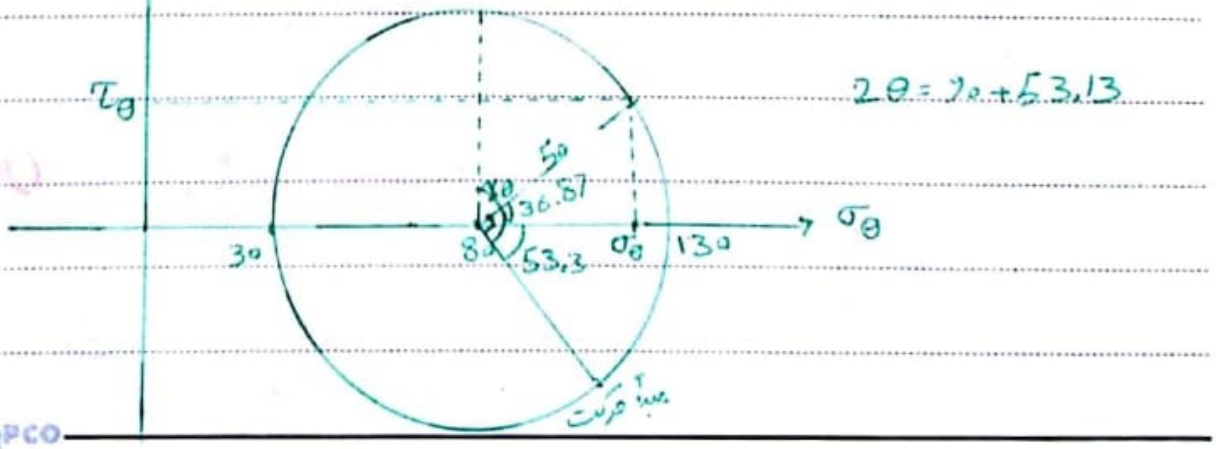
ب) حداکثر تنش برشی و جهت مربوطه. همچنین تنش عمودی در صفحه‌ای که تنش برشی max است.

ج) تنش عمودی و برشی در صفحه $\theta = 45$



مرکز دایره $\Rightarrow \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{110 + 50}{2} = 80$

شعاع $= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{110 - 50}{2}\right)^2 + 40^2} = 50$



$2\theta = 90 + 53.13$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject
Date

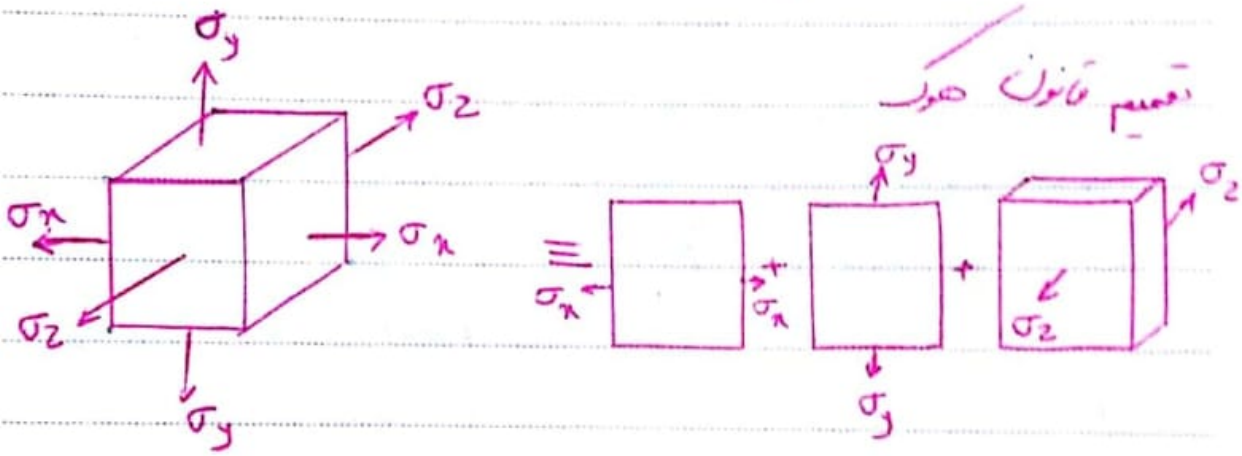
$$\sigma_\theta = 80 + 50\cos(90 - 53.13) + 12$$

$$\tau_\theta = 50\sin(90 - 53.13) = 30$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{x,y}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(30)}{110 - 50}$$

$$\begin{cases} 2\theta_p = 53.13 \\ 2\theta_p = 233.13 \end{cases}$$

$$\theta_p = \begin{cases} 11.56 \\ 116.56 \end{cases}$$



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \left(-\frac{\upsilon\sigma_y}{E}\right) + \left(\frac{\upsilon\sigma_2}{E}\right)$$

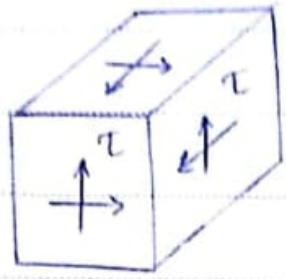
$$\varepsilon_y = \left(-\frac{\upsilon\sigma_x}{E}\right) + \frac{\sigma_y}{E} + \left(-\frac{\upsilon\sigma_2}{E}\right)$$

$$\varepsilon_2 = \left(-\frac{\upsilon\sigma_x}{E}\right) + \left(-\frac{\upsilon\sigma_y}{E}\right) + \frac{\sigma_2}{E}$$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject
Date ۱۳۹۲/۲/۲



$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\tau = G\gamma$$

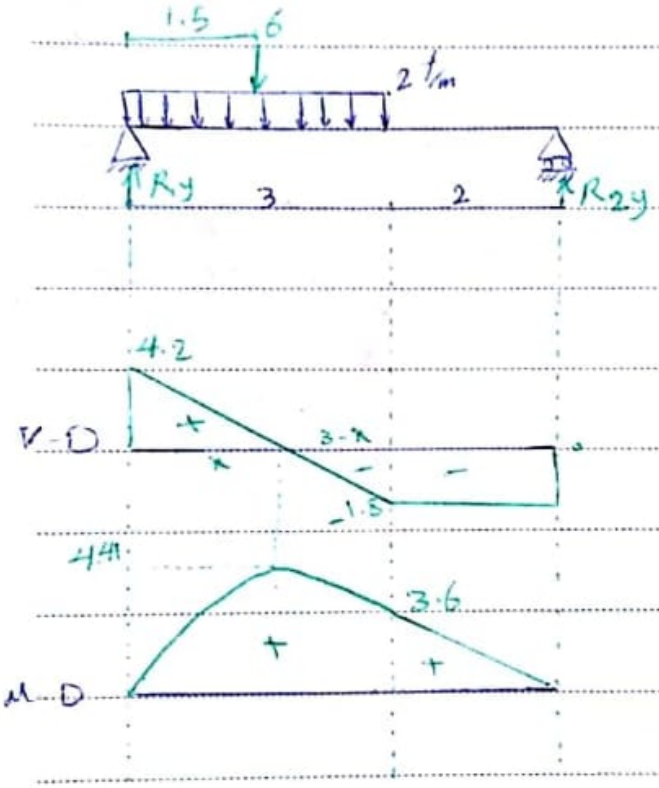
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$2\theta_p = -2\sigma$$

تبدیل دیاگرام گسترشی و نیروی برشی



(+)

$\Sigma M_A = 0$

$R_{2y} \times 5 = 6 \times 1.5$

$R_{2y} = 1.8$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_{1y} + 1.8 = 6$

$R_{1y} = 4.2$

$$\frac{x}{3-x} = \frac{4.2}{1.8} = \frac{1}{0.42}$$

$0.42x = 3 - x$

$3 = 1.42x$

$x = 2.1$

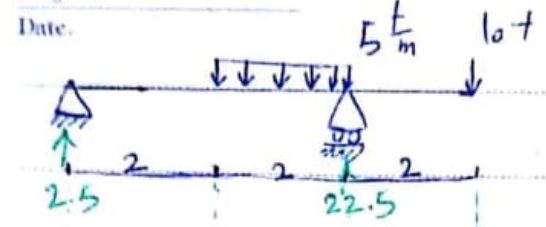
PqPCO

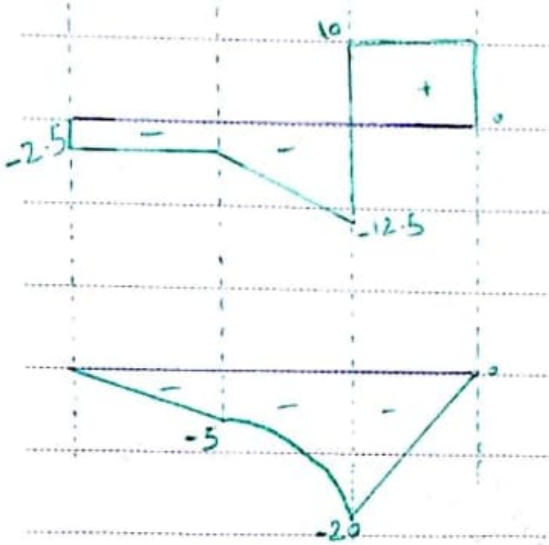
Scanned by CamScanner

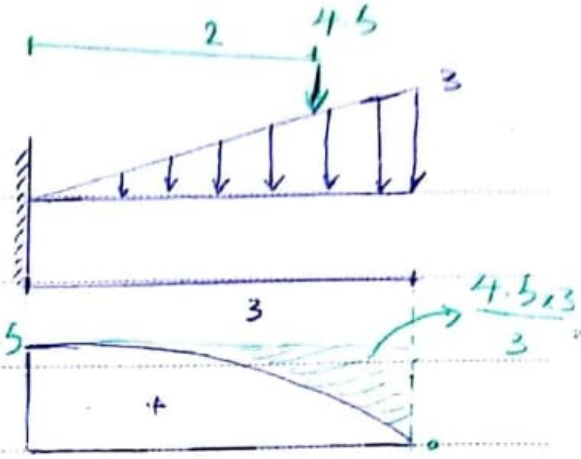
Jozvebama.ir

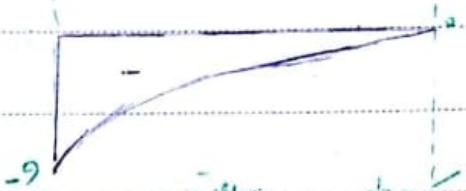
Subject.

Date.

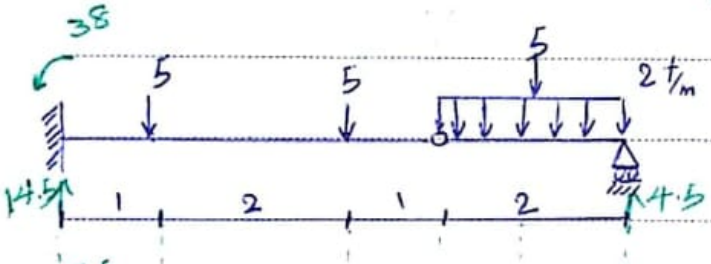


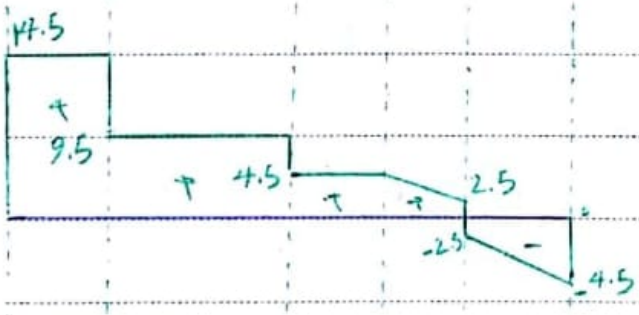


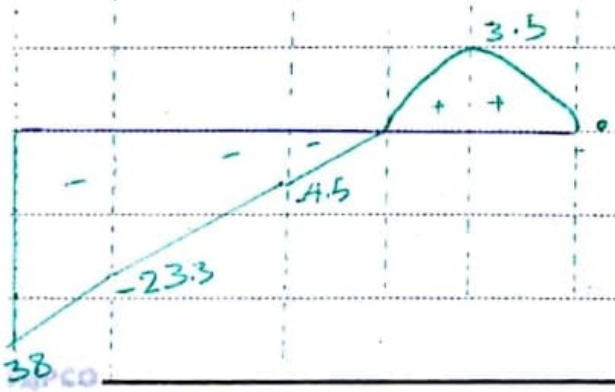


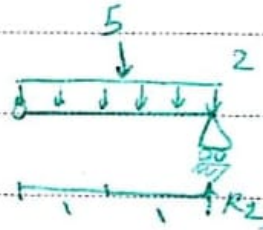


		ساعت	گرانروح
1 برابر		$\frac{ab}{2}$	$\frac{b}{3}$
2 برابر		$\frac{ab}{3}$	$\frac{b}{4}$
3 برابر		$\frac{ab}{4}$	$\frac{b}{5}$









$\sum M_C = 0$

$R_{2y} \times 2 = 5 \times 1 + 4 \times 1$

$R_{2y} = \frac{9}{2} = 4.5$

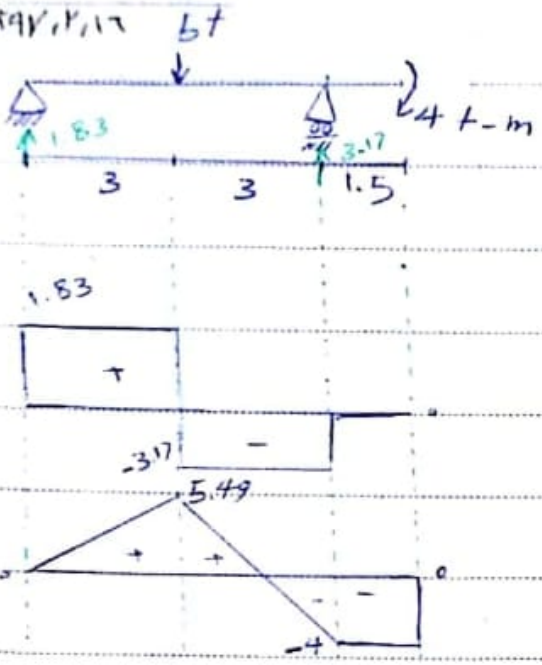
$M = 5 \times 1 + 5 \times 3 + 5 \times 5 + 4 \times 5 - 4.5 \times 8$

$M = 65 - 27 = 38$

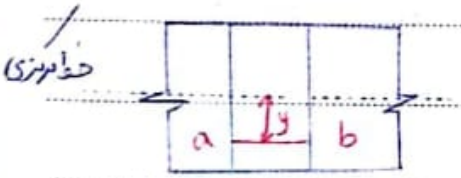
Scanned by CamScanner

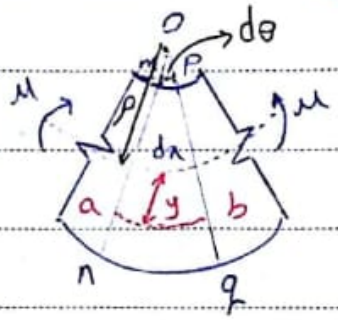
Jozvebama.ir

Subject
Date ۱۳۹۷/۲/۱۲



تنش عمودی در تیرها





طول اولیه ab = dx

طول ثانویه ab بعد از بارگذاری = $(\rho + y)\,d\theta$

$$dx = \rho\, d\theta \longrightarrow d\theta = \frac{dx}{\rho}$$

$$\longrightarrow \text{طول ثانویه} = (\rho + y)\frac{dx}{\rho}$$

$$\text{اضافه طول} = \text{طول ثانویه} - \text{طول اولیه}$$

$$= (\rho + y)\frac{dx}{\rho} - dx = dx + \frac{y}{\rho}dx - dx = \frac{y}{\rho}dx$$

PqPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject

Date

در سطح دلخواه x $\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{\frac{y}{\rho} dx}{dx} = \frac{y}{\rho}$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{y}{\rho} \quad (1)$$

اگر نیرو در راستای طول $= 0 \rightarrow \int \sigma_x \cdot dA = 0 \rightarrow \int \frac{Ey}{\rho} dA = 0 \rightarrow \frac{E}{\rho}\int y\, dA = 0$

$\rightarrow \int y\, dA = 0$ خط برش تار خنثی از محل مرکز سطح عبور می‌کند

نیرو خنثی مربوط به سطح $dA = \sigma_x \cdot y \cdot dA$

لنگر خنثی $= M = \int \sigma_x \cdot y \cdot dA = \int \frac{Ey}{\rho} \cdot y \cdot dA = \frac{E}{\rho}\int y^2 dA = \frac{E I_x}{\rho}$

$\rightarrow \rho = \frac{E I_x}{M} \xrightarrow{(1)} \sigma_x = \frac{\frac{Ey}{1}}{\frac{EI_x}{M}} \rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{My}{I_x}}$

خمشی مهم

Scanned by CamScanner

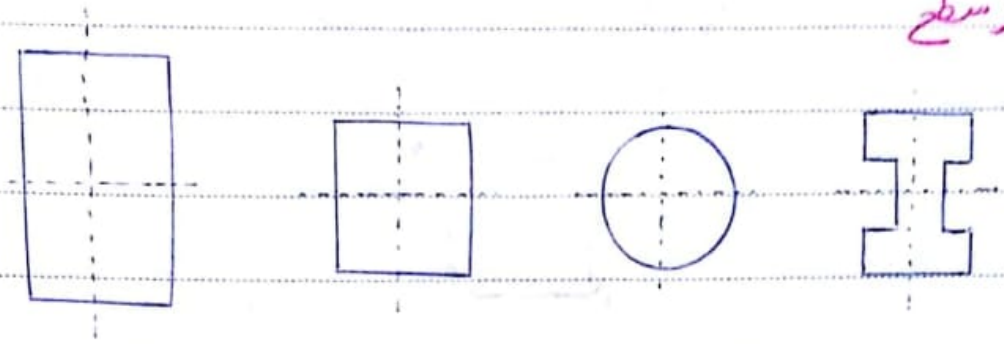
Jozvebama.ir

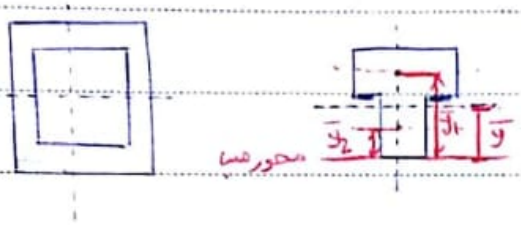
Subject

Date

مشخصات سطوح

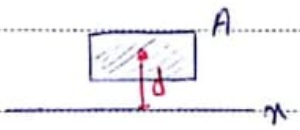
① مرکز سطح





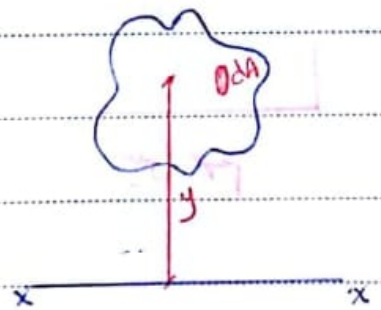
$$\bar{y} = \frac{A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2}{A_1 + A_2} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}$$

② گشتاور اول سطح



$$Q_x = A \cdot d$$

③ گشتاور دوم سطح یا ممان اینرسی

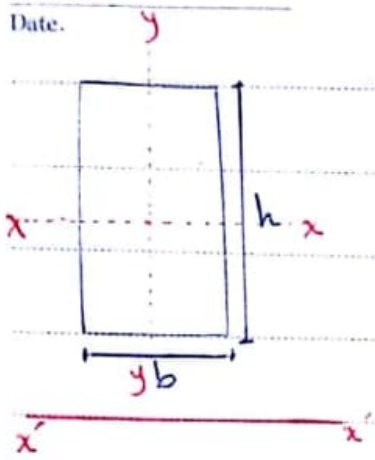


$$I_x = \int y^2 dA$$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

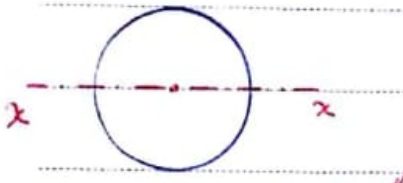
Subject.
Date.



$$I_x = \frac{bh^3}{12} \rightarrow S_x = \frac{I_x}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \rightarrow S_y = \frac{I_y}{c} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{hb^2}{6}$$

$$I_{x'} = I_x + Ad^2$$



$$I_x = \frac{\pi D^4}{64} \rightarrow S_x = \frac{I_x}{c} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32}$$

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

- σ: تنش عمودی ناشی از خمش
- M: ممان خمشی حول محور خنثی
- y: فاصله از محور خنثی
- I: ممان اینرسی حول محور خنثی

cm^2	مساحت
cm^3	اساس مقطع
cm^4	ممان اینرسی

$$y_{max} = c \rightarrow \sigma_{max} = \frac{M \cdot c}{I} = \frac{M}{\frac{I}{c}} \rightarrow \sigma_{max} = \frac{M}{S}$$

اساس مقطع $S = \frac{I}{c}$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$ شعاع ژیراسیون

مثال: یک تیر طره‌ای از یک سازه به طول 1.6m بار متمرکز 16kN مطابق شکل وارد شده است

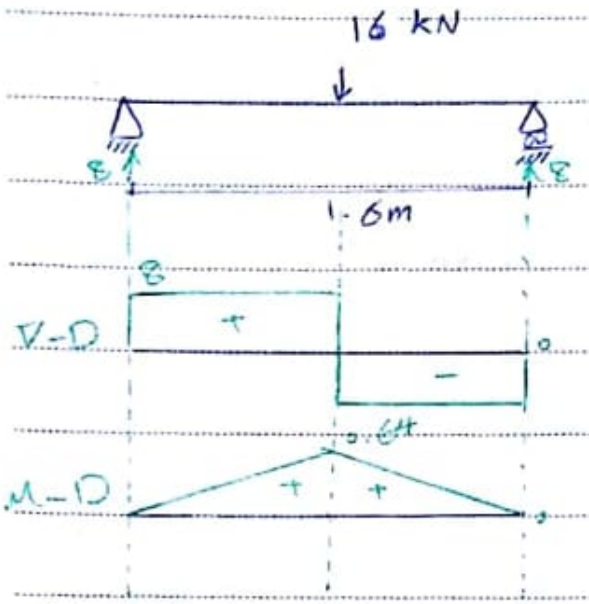
Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.

Date.

تنش مجاز این مقطع 110 Mpa است. قطر مقطع دایره‌ای شکل این عضو را



محاسبه کنید.

$\sigma_{all} = 110 MPa$

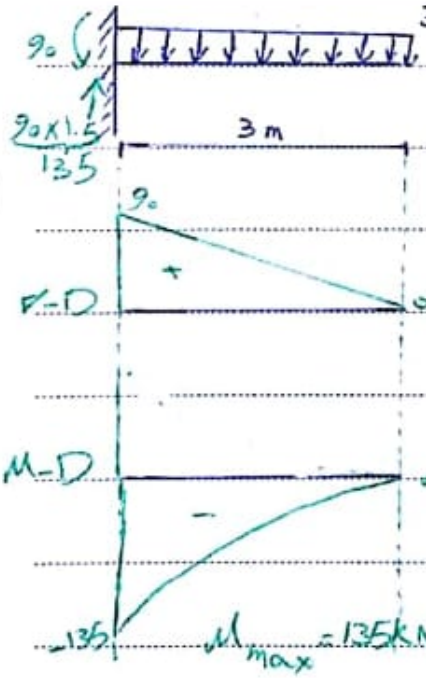
$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S} \leq \sigma_{all}$

$\frac{0.64 \times 10^{3}}{S} = 110 \times 10^{6}$

$S = 58.2 \times 10^{-6}\ m^3$

$\frac{\pi D^3}{32} = 58.2 \times 10^{-6} \rightarrow D = 84 \times 10^{-3}\ m = 84\ mm$

مثال: آرتش مجاز تنش برشی و نرمال عضو شکل زیر 150 Mpa بوده مقطع مناسب از



جنس IPE با تنش مجاز $\sigma_{all} = 150 MPa$ در نظر

$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S} \leq \sigma_{all}$

$\frac{135 \times 10^{3}}{S} = 150 \times 10^{6}$

$S_{req} = 9 \times 10^{-4}\ m^3 = 90\ cm^3$

USE IPE 360 ($S_x = 90.4\ cm^3$)

PAPCO

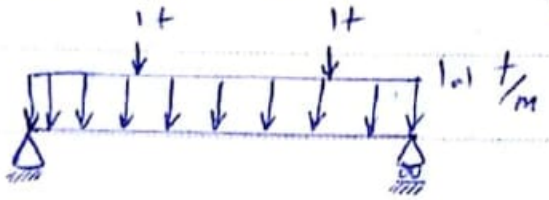
Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

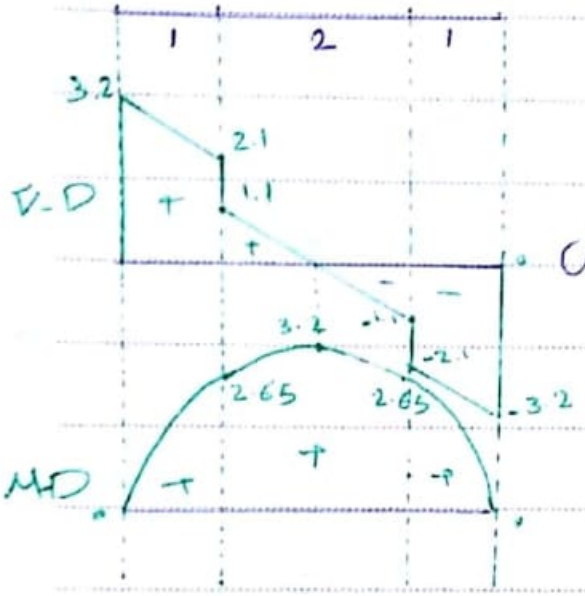
Subject

Date

مثال: در تیر شکل زیر تنش مجاز برابر $1600\ kg/cm^2$ باشد، مقاطع را در چهار حالت زیر طراحی کنید



الف) مقطع دایره‌ای



ب) مقطع مربع $\sigma_{all} = 1600\ kg/cm^2$

ج) مقطع مستطیل شکل با فرض ارتفاع برابر 2 برابر عرض

د) مقطع IPE $M_{max} = 3.2\ t\text{-}m$

$$\sigma = \frac{M_{max}}{S} \leq \sigma_{all}$$

$$\frac{3.2\times10^5}{S} = 1600 \rightarrow S_{req} = 200\ cm^3$$

الف) دایره

$$S = \frac{\pi D^3}{32} = 200 \rightarrow D = 12.68\ cm$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 12.68^2}{4} = 126\ cm^2$$

ب) مربع

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{a^3}{6} = 200$$

$$a = 10.63\ cm$$

$$A = a^2 = 10.63^2 = 113\ cm^2$$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject
Date

ج) $S_{req} = 200$

$h = 2b$

$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = 200$

$\rightarrow \begin{cases} b = 6.7\ cm \\ h = 13.4\ cm \end{cases}$

$A = bh = 6.7 \times 13.4 = 89.8\ cm^2$

ب) IPE $S_{req} = 200$ جدول اشتل $\rightarrow$ IPE 220 $\rightarrow S_x = 252\ cm^3$

$A = 33.4\ cm^2$

سطح × حجم × وزن × قیمت

$V = A \times L$ ($L = 1\ m$)

با توجه به تناسب قیمت با وزن و حجم و به تبع آن با سطح مصرفی استفاده از مقطع IPE صرفه اقتصادی بیشتری دارد.

مقاطع لانه زنبوری (این مبحث جزو درس نیست)

اساس مقطع با ارتفاع مساوی است (با فرض ریدیف) به همین علت برای افزایش اساس مقطع برش‌های پرس ۱ در جان مقطع IPE زده می‌شود و پرس 2 مجدداً به هم جوش داده

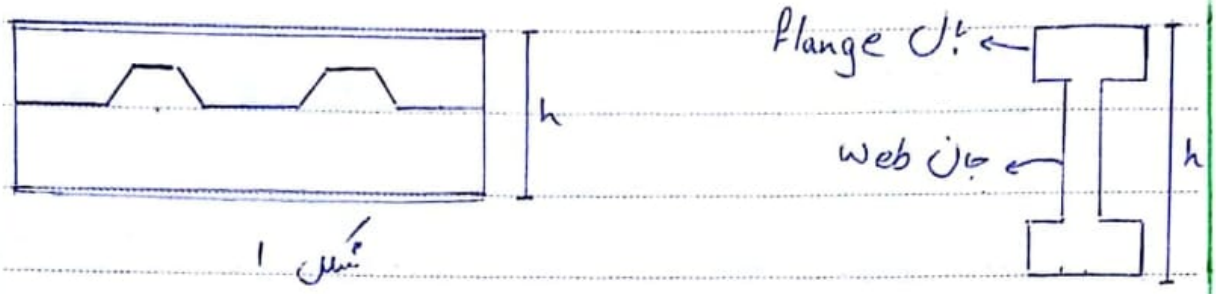
Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

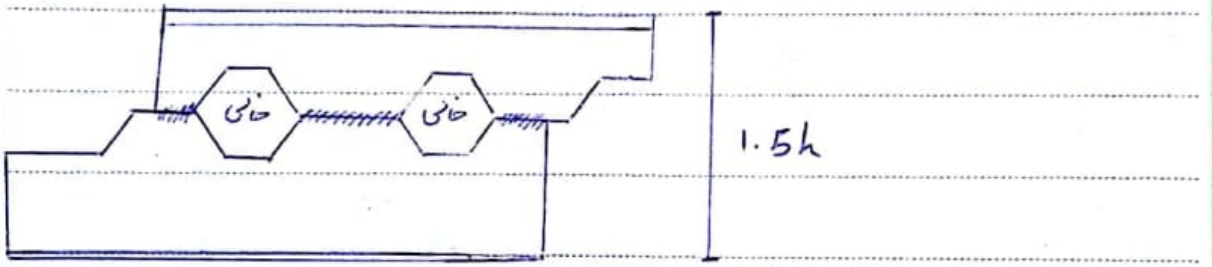
Subject

Date

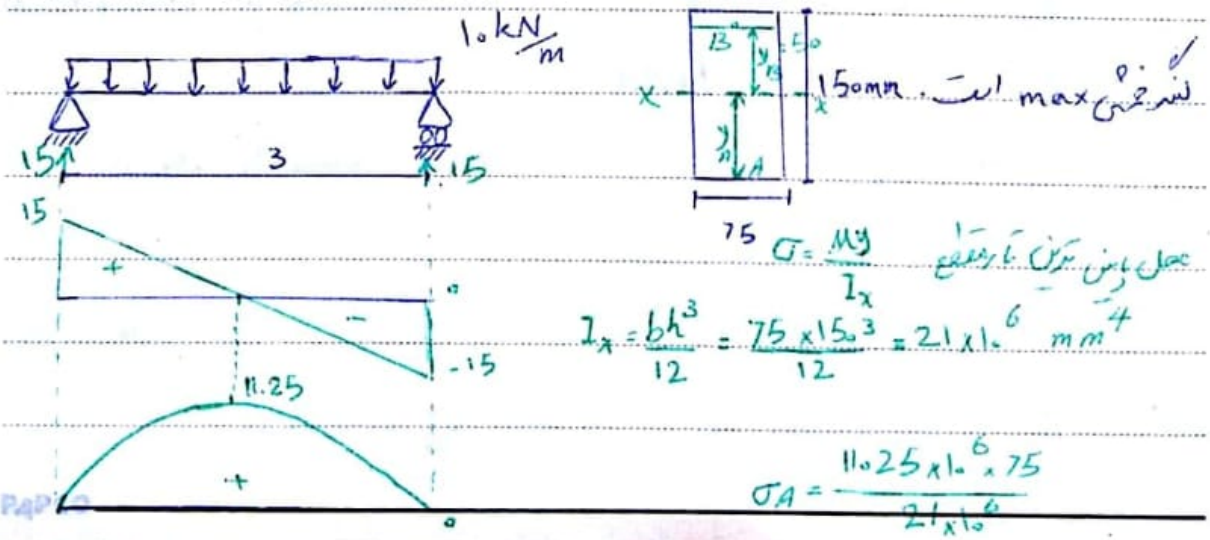
می‌شود. (با توجه به خفیف شدن جان و نیاز به پرکردن حفره در بعضی موارد صرف اقتصادی ندارد و استفاده زیادی نمی‌شود.) به این نوع برش، برش پای باز گفته می‌شود.



شکل ۱



یک تیر ساده به طول 3m تحت بار شکل زیر قرار گرفته است. مطلوب است تعیین مقدار و محل تنش حداکثر کششی و همچنین تعیین مقدار تنش در فاصله 25mm از بالاترین تار مقطع در محلی که تنش خمشی max است.



محل پایین‌ترین تار مقطع

$$\sigma = \frac{My}{I_x}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{75 \times 150^3}{12} = 21 \times 10^6 \ mm^4$$

$$\sigma_A = \frac{11.25 \times 10^6 \times 75}{21 \times 10^6}$$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

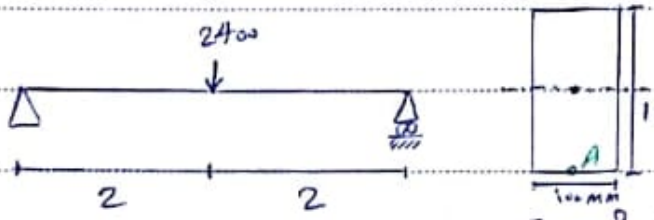
Subject.
Date. ۱۳۹۷/۲/۲۳

$\sigma_A = 40.19 \frac{N}{mm^2} \downarrow MPa$

$MPa = 10^6 Pa = 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{N}{10^6 mm^2} = \frac{N}{mm^2}$

$\sigma_B = \frac{M y_B}{I_x} = \frac{11.25 \times 10^6 \times 50}{21 \times 10^6} = 26.8 MPa \downarrow \frac{N}{mm^2}$ تمرین

مثال: تنش را در پایین ترین تار مقطع در محلی که تنش برشی max است در دو حالت:



الف) از وزن تیر صرف نظر شده است.

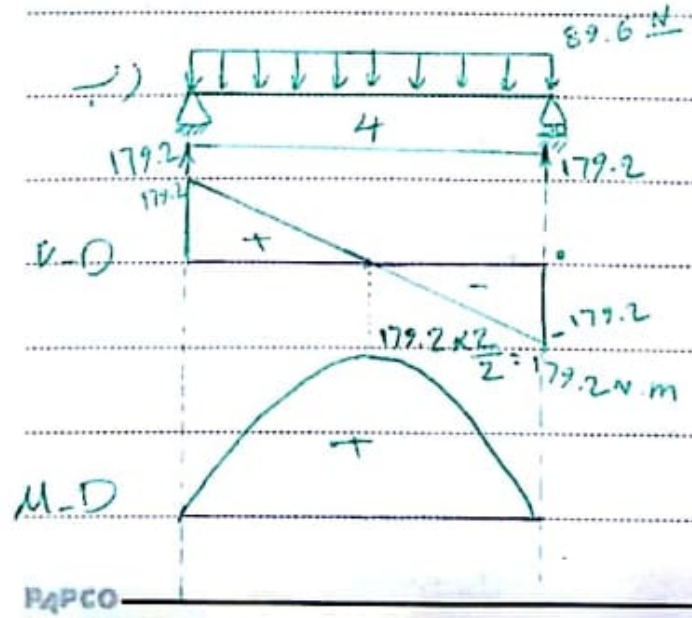
ب) وزن مخصوص تیر $5600 \frac{N}{m^3}$ فرض شده است.

$I_x = \frac{100 \times 160^3}{12} = 34 \times 10^6 mm^4 = 34 \times 10^{-6} m^4$

از وزن تیر صرف نظر شده است. $M_{max} = 2400 N.m$ بدست آمده

$\sigma_A = \frac{M.y_A}{I_x} = \frac{2400 \times 80 \times 10^{-3}}{34 \times 10^{-6}} = 5.65 \times 10^6 Pa = 5.65 MPa$

ب)



$\gamma = \frac{w}{V} \rightarrow$ بدست آمده $w = \gamma V = \gamma A \times 1m$

$= 5600 \times 160 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-3} = 89.6 \frac{N}{m}$

$\sigma_A = \frac{2579.2 \times 80 \times 10^{-3}}{84 \times 10^{-6}} = 607 \times 10^6 Pa$

$\sigma_A = 607 MPa$

PAPCO

Scanned by CamScanner

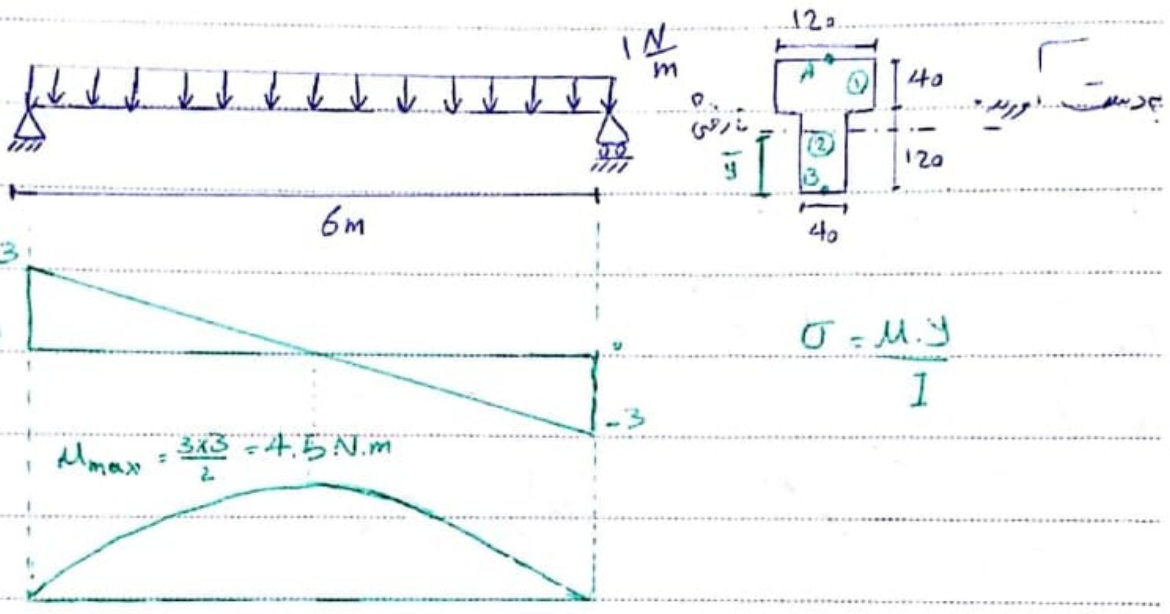
Jozvebama.ir

Subject. ناشی از بار خارجی ناشی از وزن تیر

Date.

$M_{max} = 2400 + 179.2 = 2579.2$

مثال: تنش را در بالاترین و پایین ترین نقاط مقطع T شکل زیر در محلی که تنش خمشی max است



$\sigma = \frac{M.y}{I}$

$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{120\times40\times140 + 120\times40\times60}{120\times40\times2} = 100\ mm$

$I_{x_1} = I_{\bar{x}_1} + Ad^2 = \frac{120\times40^3}{12} + 120\times40\times40^2 = 832\times10^4\ mm^4$

$I_{x_2} = I_{\bar{x}_2} + Ad^2 = \frac{40\times120^3}{12} + 120\times40\times40^2 = 1344\times10^4\ mm^4$

$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = 2176\times10^4\ mm^4$

$\sigma_A = \frac{M_{max}\cdot y_A}{I_x} = \frac{4.5\times10^3\times60}{2176\times10^4} = 12.38\times10^{-3}\ N/mm^2$

Scanned by CamScanner

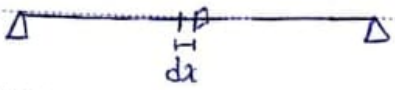
Jozvebama.ir

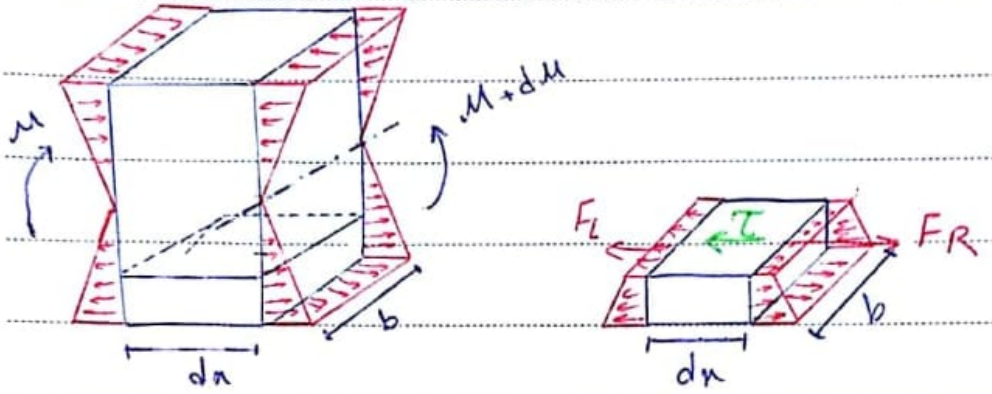
Subject.

Date.

$$\sigma_B = \frac{M_{max} \cdot y_B}{I_x} = \frac{4.5 \times 10^{3} \times 100}{2176 \times 10^{-4}} = 20.63 \times 10^{-3}\ N/mm^2$$

تنش برشی در تیرها





$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \tau b\,dx + F_L = F_R$$

$$F_R = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{(M+dM)y}{I_x} \times dA$$

$$F_L = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{My}{I} \times dA$$

$$\rightarrow \tau = \left(\frac{dM}{dx}\right) \times \frac{1}{Ib} \times \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y\,dA$$

($\frac{dM}{dx}$: V ; $\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y\,dA$: گشتاور اول سطح)

$$\tau = \frac{Vq}{Ib}$$

(τ: تنش برشی ؛ V: برش برشی ؛ q: گشتاور اول سطح نازک مورد نظر ؛ I: ممان اینرسی حول تار خنثی ؛ b: عرض مقطع در تار مورد نظر)

P4PCO

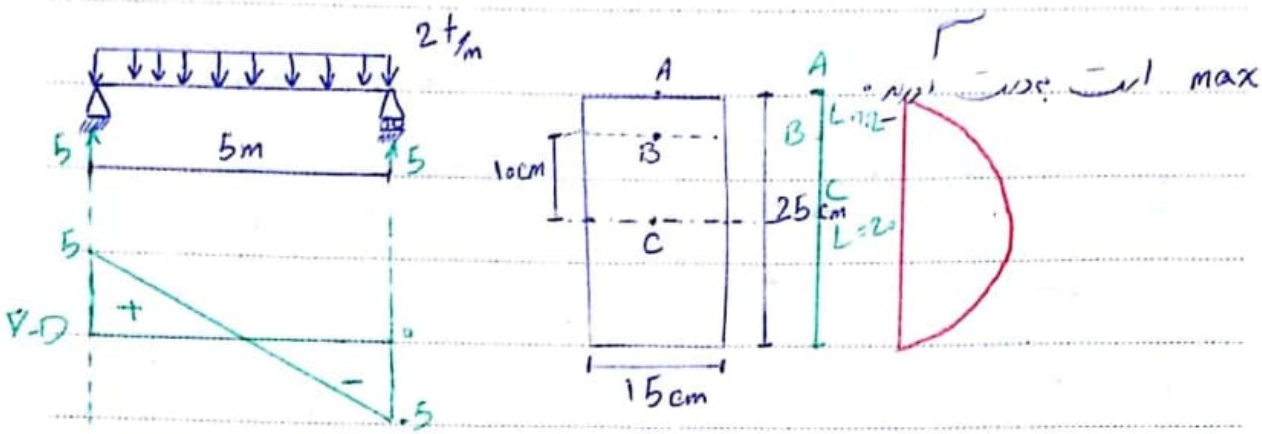
Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject

Date

مثال: در تیر مستطیل شکل زیر تنش برشی در تیر را در نقاط A و B و C در حالتی که نیروی برشی



$V_{max} = 5\ ton$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{15 \times 25^3}{12} = 19531\ cm^4$$

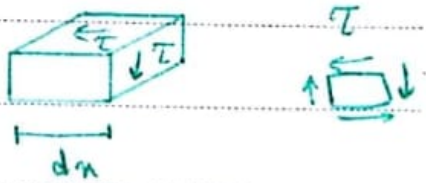
$$Q_B = A.d = 15 \times 2.5 \times 11.25 = 422\ cm^3$$

$$\tau_B = \frac{VQ_B}{Ib} = \frac{5000 \times 422}{19531 \times 15} = 7.2\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$Q_A = A \times d = 0$$

$$\tau_A = \frac{VQ_A}{Ib} = 0$$

$$\tau_C = \frac{VQ_C}{Ib} = \frac{5000 \times 1172}{19531 \times 15} = 20\ \frac{kg}{cm^2}$$



$$Q_C = 15 \times 12.5 \times 6.25 = 1172\ cm^3$$

Scanned by CamScanner

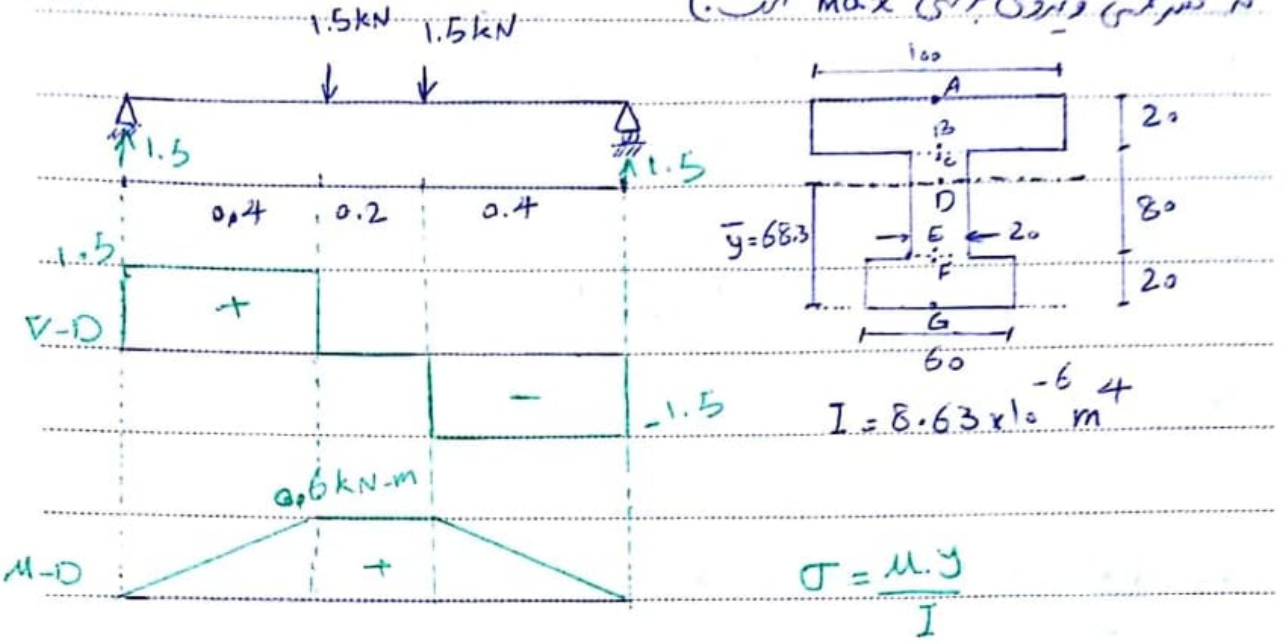
Jozvebama.ir

Subject

Date

مثال: تنش برشی و عمودی را در نقاط A, B, C, D, E, F, G به دست آورید. (مقطع T شکل)

که تنش برشی و نرمال max است.



$I = 8.63 \times 10^{-6}\ m^4$

$\sigma = \frac{M.y}{I}$

نقطه	M_{N-m}	I_x m^4	y mm	$\sigma_{\times 10^{-6}}$ MPa
A	0.6×10^3	8.63×10^{-6}	120 - 68.3 = 51.7	3.6
B	"	"	31.7	2.2
C	"	"	31.7	2.2
D	"	"	0	0
E	"	"	68.3 - 20 = 48.3	3.35
F	"	"	48.3	3.35
G	"	"	68.3	4.75

PqPCO

Scanned by CamScanner

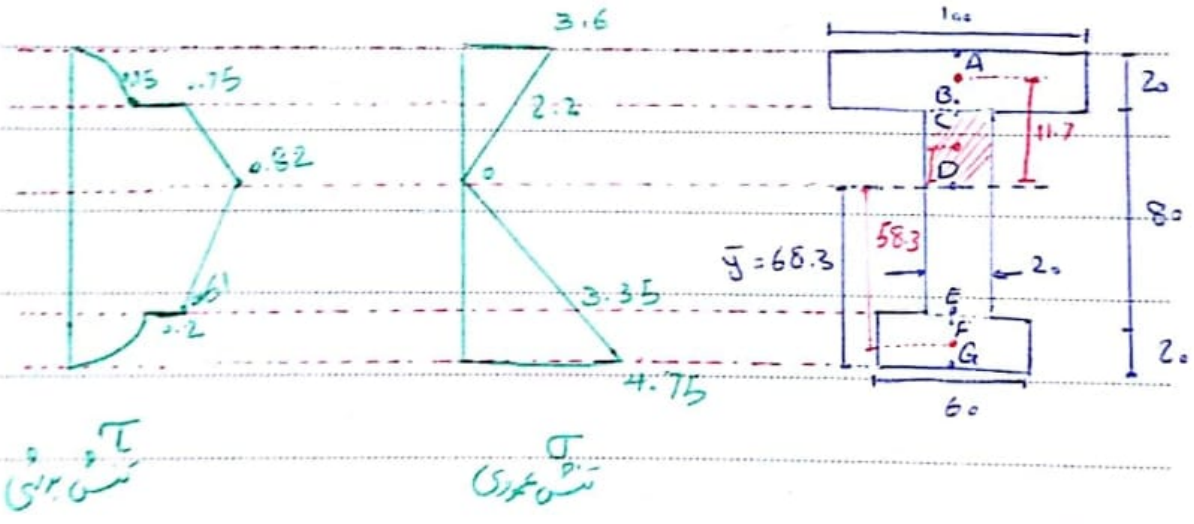
Jozvebama.ir

Subject

Date

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \qquad Q = A \cdot y$$

b_w	V_N	$I\ m^4$	$b\ m$	$Q\ m^3$	$\tau\ MPa$
A	1500	8.63×10^{-6}	100	0	0
B	"	"	100	$100 \times 20 \times 41.7$	0.15
C	"	"	20	$100 \times 20 \times 41.7$	0.75
D	"	"	20	$100 \times 20 \times 41.7 + 31.7 \times 20 \times \frac{1}{2} \times 31.7$	0.82
E	"	"	20	$60 \times 20 \times 58.3$	0.61
F	"	"	60	$60 \times 20 \times 58.3$	0.2
G	"	"	60	0	0



تنش برشی τ

تنش محوری σ

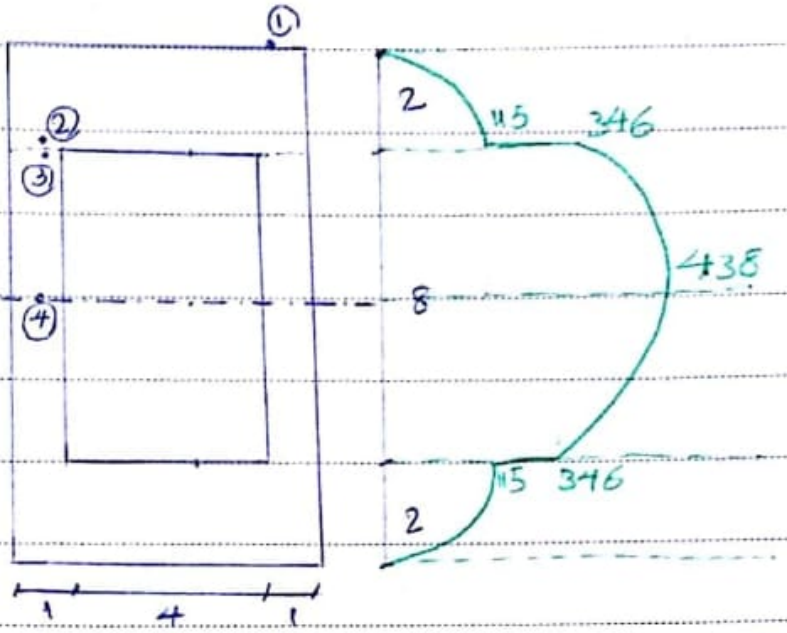
PAPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject
Date ۱۳۹۷/۲/۳۰

مثال: اگر نیروی برشی در تیر شکل زیر 8 ton باشد تنش برشی را در نقاط 1، 2، 3 و 4 بدست آورید.



$V = 8\ ton$

$$I = \frac{6\times12^3}{12} - \frac{4\times8^3}{12} = 693\ cm^4$$

$Q_1 = 0$

$Q_2 = A\cdot d = 2\times6\times5 = 60\ cm^3$

$Q_3 = Q_2 = 60\ cm^3$

$Q_4 = 6\times2\times5 - 1\times4\times2 + 1\times4\times2 = 76\ cm^3$

(1) در نقطه $\tau_1 = \frac{VQ_1}{Ib_1} = \frac{8000\times0}{693\times6} = 0\ \ kg/cm^2$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject

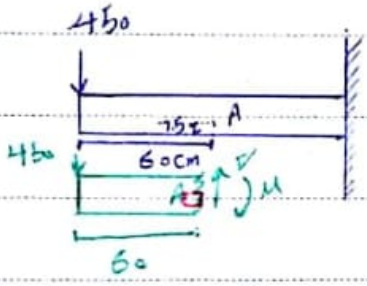
Date

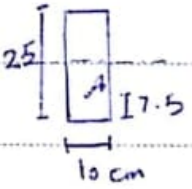
(2) در نقطه ۱ $\tau_2 = \frac{VQ_2}{Ib_2} = \frac{8000 \times 60}{693 \times 6} = 115 \ kg/cm^2$

(3) در نقطه ۱ $\tau_3 = \frac{VQ_3}{Ib_3} = \frac{8000 \times 60}{693 \times 2} = 346 \ kg/cm^2$

(4) در نقطه ۱ $\tau_4 = \frac{VQ_4}{Ib_4} = \frac{8000 \times 16}{693 \times 2} = 438 \ kg/cm^2$

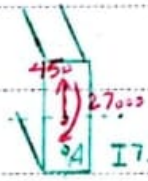
مثال: یک تیر کنسول به مقطع مستطیل بار متمرکزی را در انتهای آزاد خود تحمل می‌نماید. تنش اصلی را در نقطه A در مثال مشخص شده است پیدا کنید و آن تنش‌ها را بر روی المان‌هایی با امتداد مشخص نشان دهید.





$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V = 450 \ kg$

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow M - 450 \times 60 = 0 \rightarrow M = 27000 \ kg-cm$



$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \times 25^3}{12} = 13.20 \ cm^4$

Scanned by CamScanner

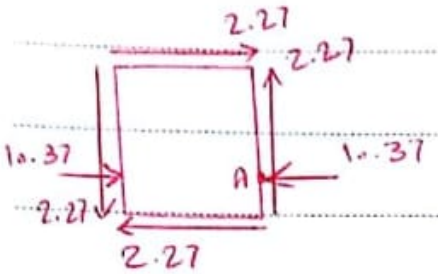
Jozvebama.ir

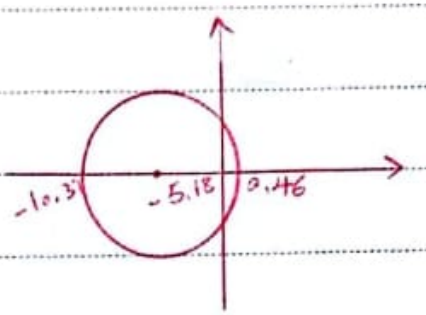
Subject

Date

تنش عمودی ناشی از لنگر خمشی $\sigma_A = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{27000 \times 5}{13.20} = 10.37 \ kg/cm^2$

تنش برشی ناشی از نیروی برشی $\tau_A = \frac{VQ}{Ib} = \frac{4500 \times (10 \times 7.5 \times 8.75)}{13.20 \times 10} = 2.27 \ kg/cm^2$





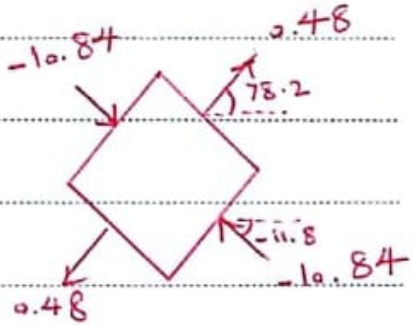
تنش اصلی $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}}$

$\sigma_{1,2} = \frac{-10.37 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10.37 - 0}{2}\right)^2 + 2.27^2}$

$\sigma_1 = 0.48 \ kg/cm^2$

$\sigma_2 = -10.84 \ kg/cm^2$

$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 2.27}{-10.37 - 0}$ → $\theta_p = -11.8$ ، $\theta_p = 78.2$



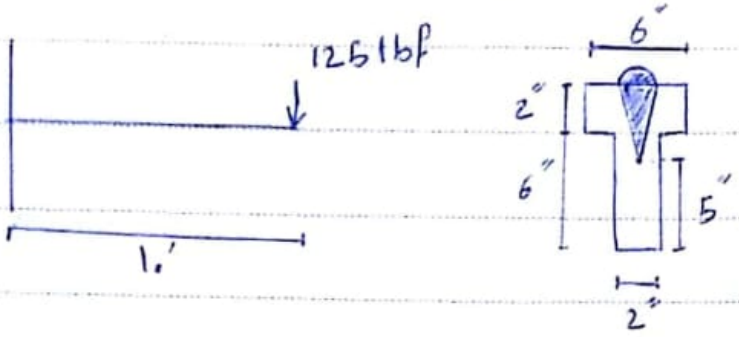
Scanned by CamScanner

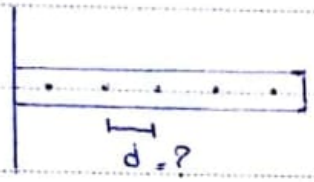
Jozvebama.ir

Subject

Date

مثال: فاصله مورد نیاز میخ ها را در تیر چوبی شکل زیر به دست آورید. نیروی برشی هر میخ برابر





2.54 cm	inch	"
30 cm	Foot	'
90 cm	yard	3'

12" = 1'

$\tau = \frac{VQ}{Ib}$ ← جریان برشی $q = \tau b = \frac{VQ}{Ib} \cdot b = \frac{VQ}{I}$

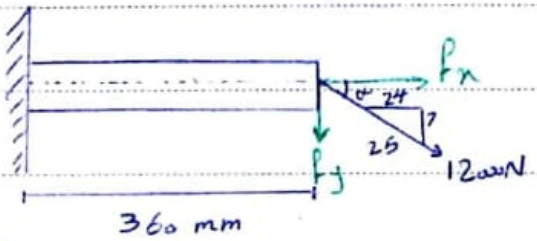
(نیروی واحد طول in)

$q = \frac{125 \times 6 \times 2 \times 2}{136} = 22 \frac{lbf}{in}$

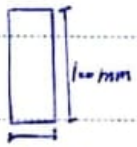
نیروی وارد شده بر میخ $= 22d = 94 \rightarrow d = \frac{94}{22} = 4.25$ in

ترکیب نیروی محوری و لنگر خمشی

مثال: تنش های حداکثر و موقعیت تار خنثی را در تیر طره شکل زیر در مقطعی به تنش ها حداکثر



هندسه مقطع را بیابید



Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.

Date.

$F_x = 12000 \times \cos\alpha = 12000 \times \frac{24}{25} = 11520\ N$

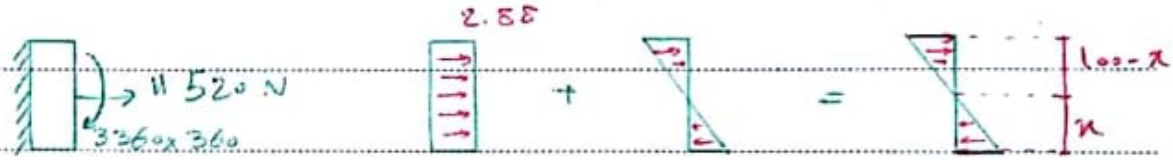
$F_y = 12000 \times \sin\alpha = 12000 \times \frac{7}{25} = 3360\ N$

$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{My}{I}$

$\frac{11520}{40\times10^3} = 2.88$

$\frac{3360 \times 360 \times 50}{\frac{40\times10^3}{12}} = 18.14$

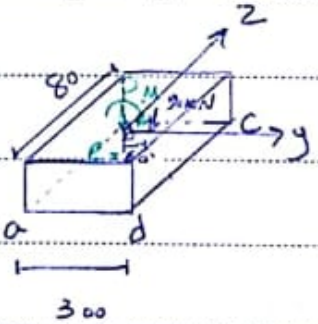
$18.14 + 2.88 = 21.02$



$18 - 14 - 2.88 = 15.26$

$\frac{x}{100-x} = \frac{15.26}{21.02} \rightarrow x = 42\ mm$

مثال: تنش های عمودی را در نقاط a و b و c و d بدست آورید.



نیرو

گشتاور

$P = 90$

$M = 90 \times 60$

$e = 60$

PqPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject.

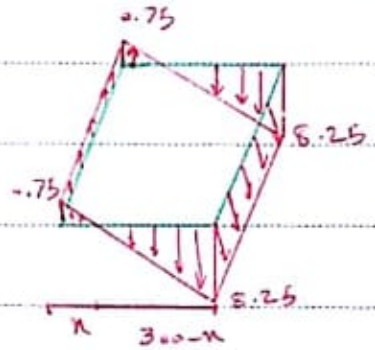
Date.

$$\sigma_a = -\frac{P}{A} + \frac{M_z y}{I_z} = -\frac{9000}{80\times300} + \frac{(9000\times6\times150)}{\left(\frac{80\times300^3}{12}\right)} = 0.75 \ N/mm^2$$

$$\sigma_b = -\frac{P}{A} + \frac{M_z y}{I_z} = -3.75 + 4.5 = 0.75 \ N/mm^2$$

$$\sigma_c = -\frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} = -3.75 - 4.5 = -8.25 \ N/mm^2$$

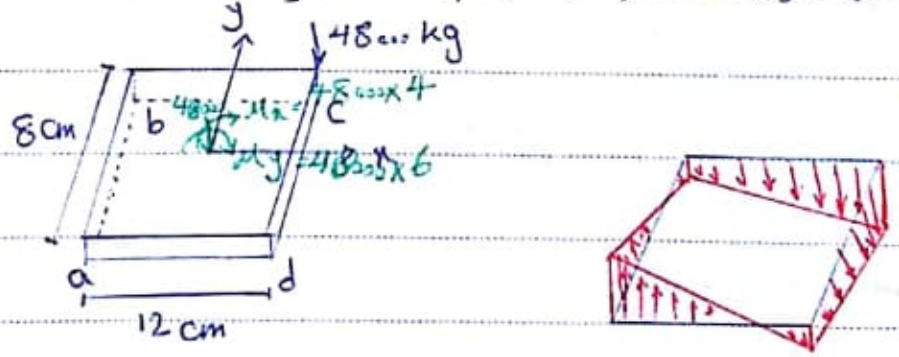
$$\sigma_d = -\frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} = -3.75 - 4.5 = -8.25 \ N/mm^2$$



$$\frac{x}{300-x} = \frac{0.75}{8.25}$$

$$x = 25 \ mm$$

مثال: تنش های عمودی را در نقاط a و b و c و d بدست آورید.



Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject

Date ۱۳۹۷ ،۳ ،۶

$$\sigma = \pm\frac{P}{A} \pm \frac{M_x y}{I_x} \pm \frac{M_y x}{I_y}$$

$$\sigma_a = -\frac{P}{A} + \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} = -\frac{4800}{12\times 8} + \frac{4(4800\times 4)}{\frac{12\times 8^3}{12}} + \frac{6(4800\times 6)}{\frac{8\times 12^3}{12}}$$

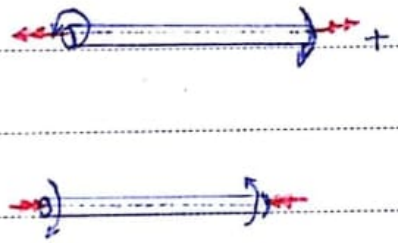
$$\sigma_b = -\frac{P}{A} - \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} = -500 - 1500 + 1500 = -500$$

$$\sigma_c = -\frac{P}{A} - \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} = -500 - 1500 - 1500 = -3500$$

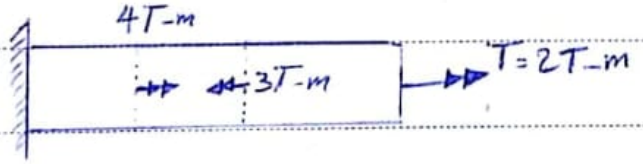
$$\sigma_d = -\frac{P}{A} + \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} = -500 + 1500 - 1500 = -500$$

$\sigma_{cr} = 2500$

Torsion پیچش



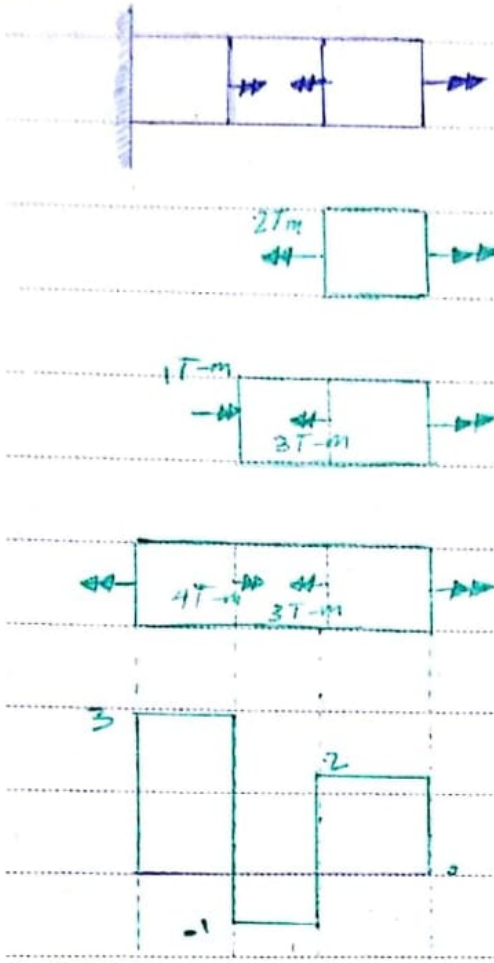
مثال: دیاگرام تنش پیچشی را در مقطع شکل زیر رسم کنید.



Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

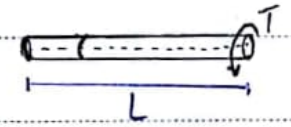
Subject.
Date.

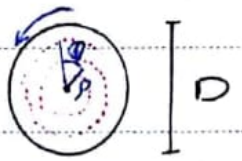


دیاگرام گشتاور پیچشی

پیچش مقاطع مختلف

۱) مقطع دایره‌ای توپر





$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J}$$ ← ممان اینرسی قطبی

$$\Phi = \frac{T \cdot L}{GJ}$$ ← ضریب الاستیسیته برشی

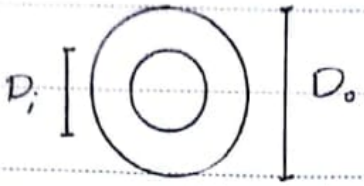
$$J = \frac{\pi D^4}{32} \qquad \tau_{max} = \frac{T \frac{D}{2}}{J}$$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject
Date

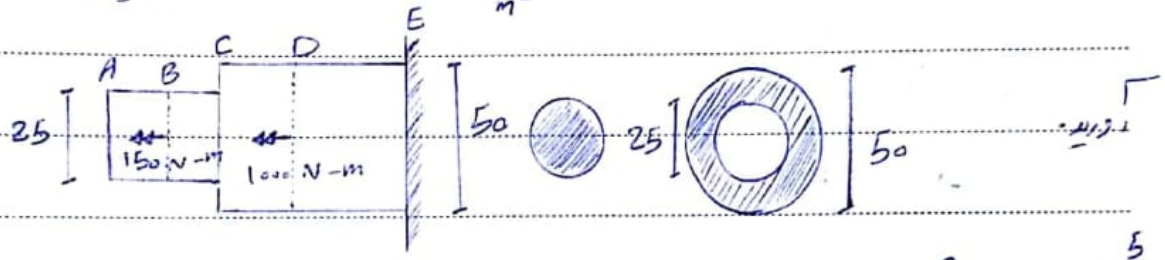
2) مقطع دایره‌ای توخالی



$$J = \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4)$$

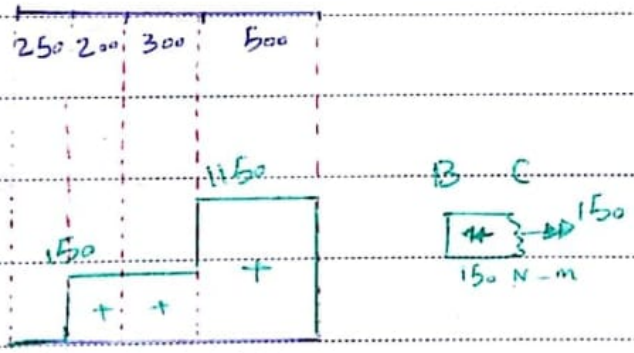
$$\tau_{max} = \frac{T \cdot \frac{D_o}{2}}{J}$$

مثال: شفت پیچشی مطابق شکل در نقاط B و D برابر 150 N-m و 1000 N-m وارد شده است. در صورتی که ضریب الاستیسیته برشی $0.8 \times 10^5 \ N/m^2$ باشد زاویه پیچش انتهای A چقدر است؟



$G = 0.8 \times 10^5$

$\Phi_A = ?$



$$J_{AB} = J_{BC} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (25)^4}{32} = 38.3 \times 10^3 \ m^4$$

$$J_{CD} = J_{DE} = \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{32}(50^4 - 25^4) = 57.5 \times 10^3$$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject
Date

$$\Phi_{AE} = \Phi_{AB} + \Phi_{BC} + \Phi_{CD} + \Phi_{DE}$$

$$\Phi_{AE} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{G J_{AB}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{G J_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{G J_{CD}} + \frac{T_{DE} L_{DE}}{G J_{DE}}$$

$$\Phi_{AE} = \frac{0 \times L_{AB}}{G J_{AB}} + \frac{150 \times 100 \times 200}{0.8 \times 10^5 \times 38.3 \times 10^3} + \frac{150 \times 100 \times 300}{0.8 \times 10^5 \times 51.5 \times 10^3} + \frac{150 \times 100 \times 500}{0.8 \times 10^5 \times 51.5 \times 10^3}$$

$$\Phi_{AE} = 0.0233 \text{ rad} = 0.0233 \times \frac{180}{\pi} = 1.3^\circ$$

مثال: یک محور توخالی فولادی به طول 3 m برای انتقال گشتاور پیچشی 25 KN-m به کار رفته است. درصورتی که حداکثر زاویه پیچش در طول 2.5° و حداکثر تنش برشی مجاز 90 MPa باشد قطر داخلی و خارجی این محور را محاسبه نمایید. ضریب الاستیسیته برشی 85 Gpa است.

$T = 25$ KN-m

$\Phi_{max} = 2.5^\circ$ $\quad \tau = \frac{T \cdot \frac{D_o}{2}}{J} = \frac{25 \times 1000 \times \frac{D_o}{2}}{\frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4)} = \tau_{max} = 90 \times 10^6$

$\tau_{max} = 90$ MPa $\quad D_o^4 - D_i^4 = 1.414 \times 10^{-3} D_o$ ①

$G = 8.5$ Gpa $\quad \Phi = \frac{T \cdot L}{GJ} = \frac{25 \times 1000 \times 3}{85 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4)} = \Phi_{max} = 2.5 \times \frac{\pi}{180}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

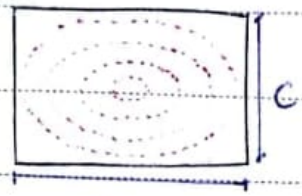
Jozvebama.ir

Subject
Date

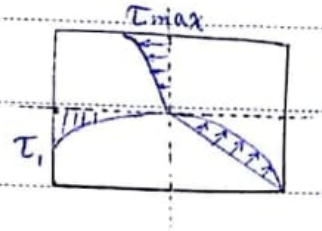
$$D_o^4 - D_i^4 = 2.06 \times 10^{-4} \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \begin{cases} D_o = 0.145\ m \\ D_i = 0.124\ m \end{cases}$$

3) مقاطع مستطیل شکل



$b > c$



$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2}$$

$$\tau_1 = \eta \tau_{max}$$

$$\Phi = \frac{T \cdot L}{\beta b c^3 G}$$

$\frac{b}{c}$	1	1.5	2	3	6	10	>10
α	0.208	0.231	0.246	0.267	0.290	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.229	0.268	0.299	0.313	0.333
η	1	0.859	0.795	0.755	0.743	0.742	0.742

4) مقاطع جدارنازک باز

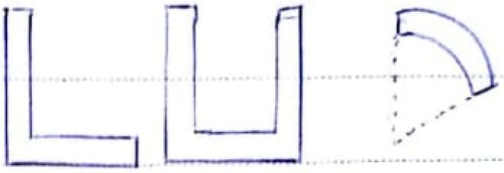
* به مقاطعی که نسبت $\frac{b}{c}$ در آنها بیش از ۱۰ باشد جدارنازک گفته می‌شود

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

+ مقاطع جدار نازک باز مقاطعی مثل نبشی ها و... هستند که در آنها دو سر مقطع بهم نمی رسد.

$\alpha = \beta = \frac{1}{3} \leftarrow \frac{b}{c} > 10$



$\tau_{max} = \frac{3T}{bc^2}$

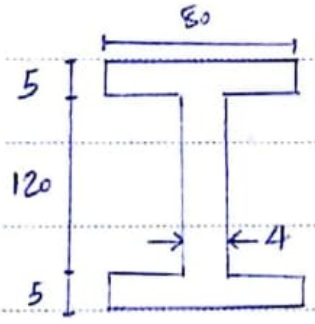
$\phi = \frac{3TL}{bc^3 G}$

$\tau_{max} = \frac{3T}{\Sigma bc^2}$

$\phi = \frac{3TL}{G\Sigma bc^2}$

مثال: تیری با مقطع I شکل مطابق شکل زیر تحت اثر لنگر پیچشی T قرار گرفته است.

مطلوب است حداکثر مقدار T در صورتی که تنش برشی مجاز 35MPa و زاویه پیچشی مجاز



برطول 1m برابر 6° باشد. ($G = 82000$).

$\tau_{all} = 35 MPa$

$\phi = 6°$

$L = 1 m$

$G = 82000 \ N/mm^2$

لنگر تنش $\tau_{max} = \frac{3T}{\Sigma bc^2} = \frac{3T}{80 \times 5^2 \times 2 + 120 \times 4^2} = \tau_{all} = 35 \ N/mm^2$

$T = 69000 \ N-mm$

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

Subject
Date ۱۳۹۷/۳/۱۴

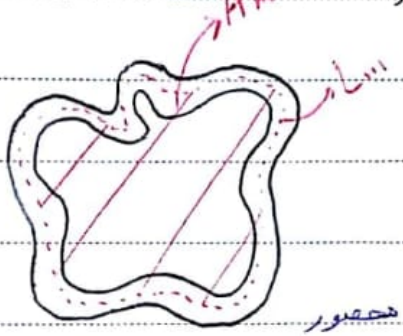
کنترل تغییر شکل : $\phi = \frac{3TL}{G\Sigma bc^3} = \frac{3T \times 1000}{82000 \times (50 \times 5^3 \times 2 + 120 \times 4^3)} \leq 6 \times \frac{\pi}{180}$

$T = 79000 \ N-mm$

$T = \min\{69000, 79000\} = 69000 \ N-mm$

5) مقطع جدار نازک بسته

* این مقاطع در پیچش بسیار مقاوم هستند.



طول وسط ضخامت ها ← L_m

ضخامتی نه با تغییر کردن وسط ضخامت ها به هم نخورد

$q = cte = f$ جریان برشی ، A_m ← می شود

$\tau t = cte$

$\tau = \frac{T}{2tA_m}$ ← تنش برشی ، ضخامت ←

$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$

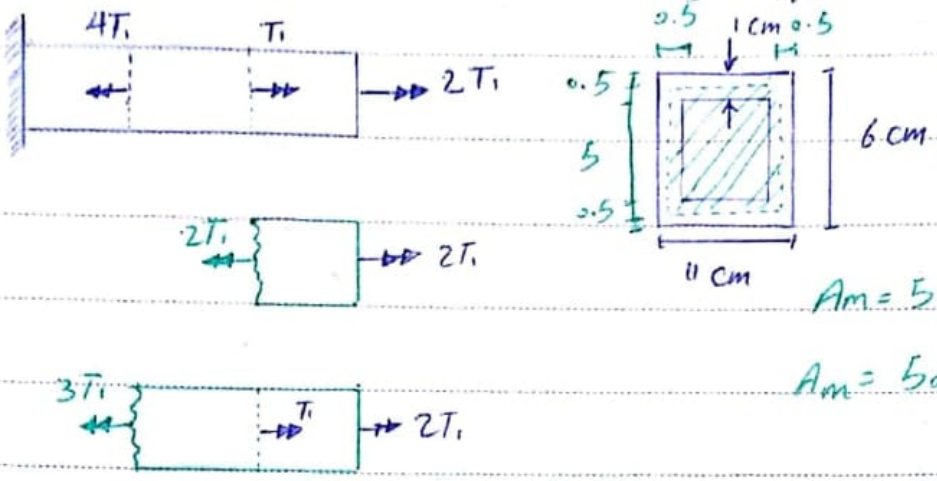
$\Phi = \frac{T \cdot L_m \cdot l}{4GtA_m^2}$ ← طول جزء

مدیر الاستیسیته برشی

Jozvebama.ir

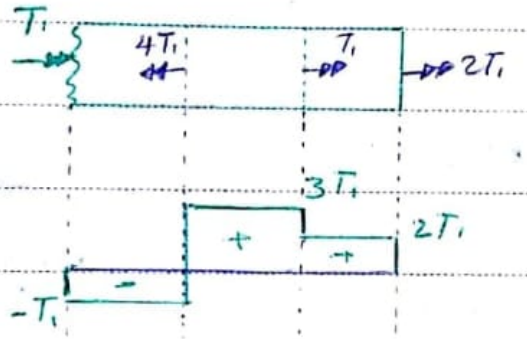
Subject
Date

مثال: حداکثر لنگر پیچشی قابل تحمل مقطع شکل زیر و ضخامت جداره 1 cm تحت اثر تنش برشی مجاز $80\ N/mm^2$ باشد مطلوب است محاسبه T_1



$A_m = 5 \times 10\ cm^2$

$A_m = 50 \times 100\ mm^2$



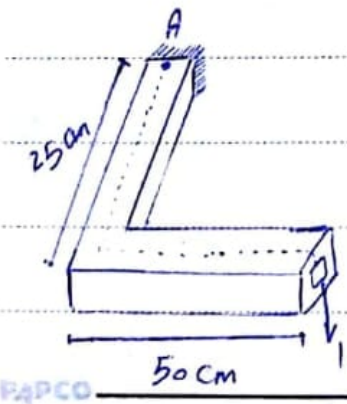
$T_{max} = 3T_1$

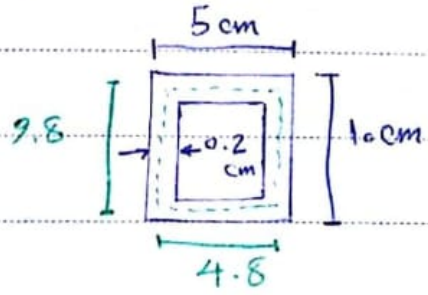
$\tau = \frac{T_{max}}{2tA_m} = \tau_{all}$

$\frac{3T_1}{2 \times 10 \times (50 \times 100)} = 80$

$T_1 = 266 \times 10^3\ N\text{-}mm$

مثال: مقطع تیر شکل زیر به صورت Box با ابعاد مشخص شده می باشد. مطلوب است تعیین تنش های اصلی در نقطه A در بالاترین تار مقطع در محل تکیه گاه.



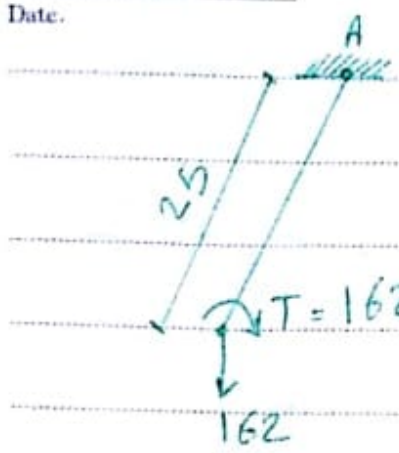


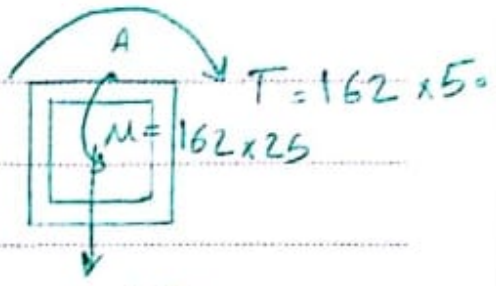
Scanned by CamScanner

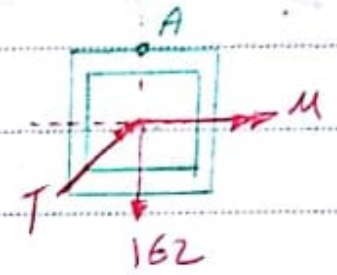
Jozvebama.ir

Subject.

Date.







تنش برشی ناشی از نیروی برشی

$V = 162\ kg \rightarrow \tau = \frac{VQ}{Ib} \rightarrow Q_A = 0 \rightarrow \tau_A = 0$

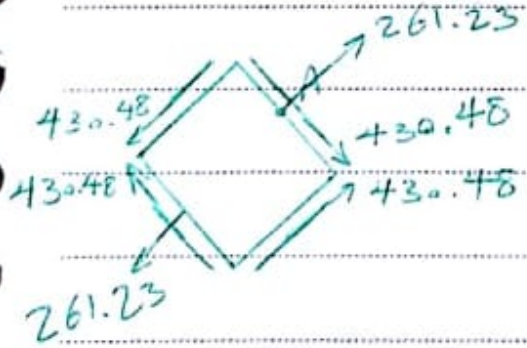
تنش عمودی ناشی از لنگر خمشی

$M = 162 \times 25 \rightarrow \sigma = \frac{My}{I} \rightarrow \frac{(162 \times 25) \times 5}{77.52} = 261.23\ \frac{kg}{cm^2}$

تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی

$T = 162 \times 50 \rightarrow \tau = \frac{T}{2tA_m} = \frac{162 \times 50}{2 \times 0.2 \times (9.6 \times 4.8)} = 430.48\ \frac{kg}{cm^2}$

$I_x = \frac{5 \times 10^3}{12} - \frac{4.6 \times 9.6}{12} = 77.52\ cm^4$



$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$\sigma_{1,2} = \frac{261.23 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{261.23 - 0}{2}\right)^2 + (430.48)^2}$

$\sigma_{1,2} \begin{cases} 580.47\ kg/cm^2 \\ -319.24 \end{cases}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Jozvebama.ir

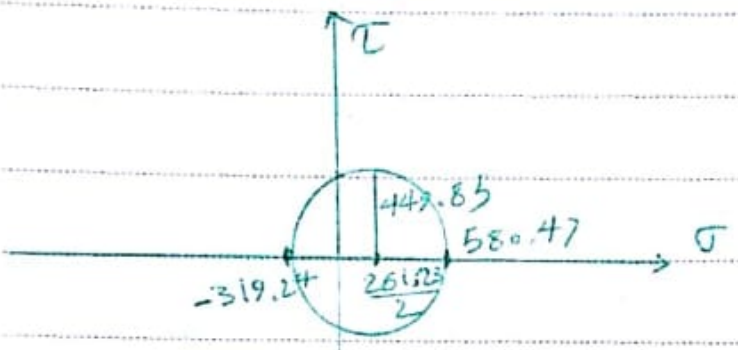
Subject.

Date.

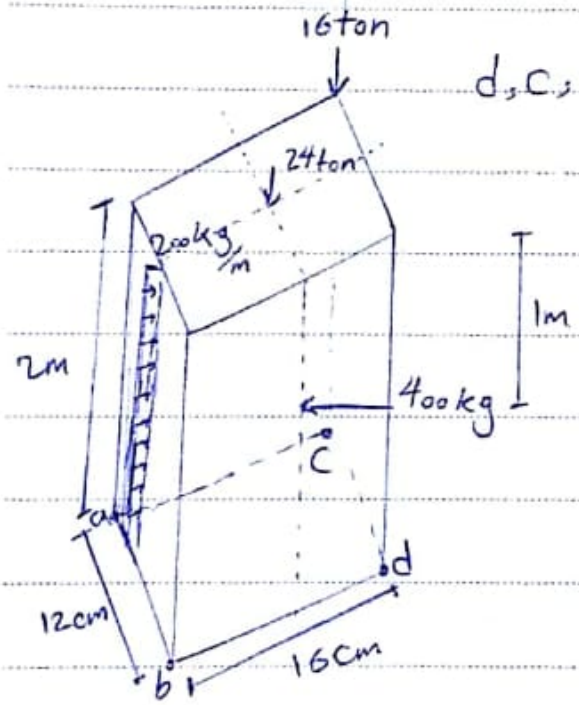
$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{261.23-0}{2}\right)^2 + (430.48)^2}$$

$$\tau_{max} = 449.85 \ kg/cm^2$$

$$\tan\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\times 430.48}{261.23-0}$$



مثال: مطلوب است تنش‌های در نقطه a و b، c، d



@hoomansa7

Scanned by CamScanner