جزوه درس ریاضی عمومی ۲

دکتر نرگس طاهری

دانشگاه تهران جنوب

به نام خدا

فصل اول: توابع عددی

حد و پیوستگی توابع دو متغیره. — ۲ نمره

مشتقات جزیی و ضمنی — ۲/۵ نمره

مشتق سویی — ۲ نمره

مشتق پارامتری

تعیین معادله صفحه مماس و خط قائم با استفاده از بردار گرادیان

کاربرد مشتق — ۲ نمره

فصل دوم: انتگرال دوگانه — ۲ نمره

حل انتگرال های دوگانه معمولی

عوض ترتیب انتگرال گیری * مهم *

تغییر متغیر دکارتی و قطبی

کاربرد انتگرال دوگانه (محاسبه مساحت و حجم)

فصل سوم: انتگرال سه گانه — ۲ نمره

تغییر متغیر استوانه ای و کروی

کاربرد انتگرال سه گانه (تعیین حجم و محاسبه مساحت رویه ها)

فصل چهارم: انتگرال خط — ۲ تا ۳ نمره

محاسبه کار با استفاده از انتگرال خط

انتگرال خط مستقل از مسیر

تعیین تابع پتانسیل

قضیه‌ی گرین * مهم *

فصل پنجم: انتگرال سطح ۱۰۵

محاسبه‌ی شار عبوری از یک رویه ۲ نمره

قضیه‌ی دیورژانس ۲ نمره

قضیه‌ی استوکس ۳ نمره

فصل اول: توابع عددی (توابع چند متغیره)

تعریف: تابع $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ را یک تابع k متغیره گوییم

به طور مثال تابع $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $z=f(x,y)$ را یک تابع دو متغیره در فضای $\mathbb{R}^3$ گوییم.

حد یک تابع دو متغیره:

گوییم تابع $z=f(x,y)$ وقتی (x,y) به سمت (x_0,y_0) میل می‌کند دارای حد L است هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

شرط اول: وجود حدهای مکرر یعنی:

$$\lim_{y \to y_0}\left(\lim_{x \to x_0} f(x,y)\right) = L = \lim_{x \to x_0}\left(\lim_{y \to y_0} f(x,y)\right)$$

شرط دوم: بررسی حد تابع در مسیرهای مختلف:

در بررسی شرط دوم مسیر $y-y_0 = \overset{\text{پارامتر ثابت}}{m}(x-x_0)^k$ را به ازای دو مقدار $k=1$ و $k=2$ در نظر می‌گیریم یعنی حد تابع $f(x,y)$ را در مسیر $y-y_0=m(x-x_0)$ و در مسیر $y-y_0=m(x-x_0)^2$ محاسبه می‌کنیم اگر جواب‌های

بدست آمده با جواب [illegible] بدست آمده از شرط اول مساوی باشد.

تابع در نقطه (x_0, y_0) حد دارد، در حالی که اگر در هر کدام از مسیرها جواب

حاصل شده وابسته به m باشد آن گاه تابع حد ندارد.

مثال: حد توابع زیر را بررسی کنید.

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

شرط اول:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

تابع در $(0,0)$ حد ندارد.

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^2}\right) = 0$$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

شرط اول:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^2}\right) = 0$$

شرط دوم: بررسی حد در مسیر $y-0=m(x-0)$ یا $y=mx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(mx)}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\times mx}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=\frac{0}{1+m^2}=0$$

بررسی حد در مسیر $y=mx^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(mx^2)}{x^2+(mx^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\times mx^2}{\cancel{x^2}(1+m^2x^2)}=\frac{0}{1}=0$$

تابع $\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ در نقطه‌ی $(0,0)$ حد دارد.

۲) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$$

شرط اول:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^4}\right)=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^4}\right)=0$$

شرط دوم: بررسی در مسیر $y=mx$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(mx)^2}{x^4+(mx)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x^4}{x^4(1+m^4)}=\frac{m^2}{1+m^4}$$

حد ندارد زیرا وابسته به m است.

۴) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to1}\frac{x^2\cancel{(y-1)^2}}{x^2+\cancel{(y-1)^2}}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{0}{x^2}\right)=0$$ شرط اول

$$\lim_{y\to1}\left(\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^2}(y-1)^2}{\cancel{x^2}+(y-1)^2}\right)=\lim_{y\to1}\left(\frac{0}{(y-1)^2}\right)=0$$

شرط دوم:

$$y-1=m(x-0) \Rightarrow y=mx+1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2(mx)^2}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^2}\,m^2x^2}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=0$$

$$y-1=mx^2 \Rightarrow y=mx^2+1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2(mx^2)^2}{x^2+(mx^2)^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^2}\,m^2x^4}{\cancel{x^2}(1+m^2x^2)}=0$$

تابع $\dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$ در نقطه‌ی $(0,1)$ حد دارد.

تمرین: حد توابع زیر را بررسی کنید.

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$

۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$

۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x y^2}{|x|^3 + 2|y|^3}$

۴) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

---

۱) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^4}$

شرط اول:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^4}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right) = 0$$

شرط دوم:

$y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 mx}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 mx}{x^2(1 + m^4 x^2)} = 0$$

$y = mx^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 mx^2}{x^2 + m^4 x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 mx^2}{x^2(1 + m^4 x^6)} = 0$$

تابع در نقطه‌ی (۰،۰) حد دارد.

۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

شرط اول:

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{0}{y^4}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2 y^2}{x^4+y^4}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{0}{x^4}\right) = 0$

شرط دوم:

$y = mx$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(mx)^2}{x^4+(mx)^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2m^2x^2}{x^4(x^4+m^4)} = \dfrac{1}{m^2}$

تابع در نقطه‌ی (0,0) حد ندارد.

---

۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{|x|^3+2|y|^3}$

شرط اول

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy^2}{|x|^3+2|y|^3}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{0}{|x|^3}\right) = 0$

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy^2}{|x|^3+2|y|^3}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{0}{2|y|^3}\right) = 0$

شرط دوم:

$y = mx$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,m^2x^2}{|x|^3+2|mx|^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3m^2}{|x|^3(1+2|m|^3)}$

$$\begin{cases} \xrightarrow{x\to 0^+} \dfrac{m^2}{1+2m^2} \\[2ex] \xrightarrow{x\to 0^-} \dfrac{-m^2}{1+2m^2} \end{cases}$$

تابع در نقطه‌ی (۰و۰) حد ندارد.

مثال $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

شرط اول:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y}\right) = 0$$

شرط دوم:

$y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,mx}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,mx}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,mx}{|x|\sqrt{1+m^2}} = 0$$

$y = mx^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,mx^2}{\sqrt{x^2+m^2x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,mx^2}{\sqrt{x^2(1+m^2x^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,mx^2}{|x|\sqrt{1+m^2x^2}} = 0$$

تابع در نقطه‌ی (۰و۰) حد دارد.

مثال:

$$1)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$$

شرط اول:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin(x-\cancel{y})}{\cos(x+\cancel{y})}\right)=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cancel{x}-y)}{\cos(\cancel{x}+y)}\right)=0$$

شرط دوم: ★ بررسی مسیر $y=x$ (این مسیر مختص توابع مثلثاتی می‌باشد) ★

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x-x)}{\cos(x+x)}=\frac{0}{1}=0$$

تابع در $(0,0)$ حد دارد.

$$2)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin^3 y}{1-\cos(x^2+y^2)}$$

شرط اول:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin x \sin^3 \cancel{y}}{1-\cos(x^2+\cancel{y^2})}\right)=\frac{0}{\text{غیر صفر}}=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin \cancel{x} \sin^3 y}{1-\cos(\cancel{x^2}+y^2)}\right)=0$$

شرط دوم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \sin^3 x}{1-\cos(2x^2)}=\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \sin^3 x}{2\sin^2 x^2} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}$$

تابع در $(0,0)$ حد ندارد.

$\sin u \sim u$

نکته:

$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

تعریف پیوستگی: گوییم تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) پیوسته است هرگاه ۳ شرط زیر برقرار باشد.

شرط اول: وجود حدهای مکرر

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = f(x_0,y_0)$$

شرط دوم: بررسی دو مسیر $y=mx$ و $y=mx^2$ برای پیوستگی در نقطه $(0,0)$ و بررسی مسیر $y=x$ در توابع مثلثاتی که جواب به دست آمده با $f(x_0,y_0)$ برابر باشد.

شرط سوم: بررسی تعریف پیوستگی

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 ; \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 \left(\underbrace{\overset{\text{نُرم}}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}}_{\text{فاصلهٔ } (x,y) \text{ از } (x_0,y_0)} < \delta \right) \overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

در حالت خاص بررسی تعریف پیوستگی در نقطه $(0,0)$ *بسیار مهم* ۰/۵ نمره

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0, \ \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2, \ \sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$

موارد مورد استفاده در اثبات تعریف پیوستگی یعنی پیدا کردن رابطه δ و ε:

$|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$

$|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$

$|x-y| \leqslant |x|+|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$

$|x^{\text{زوج}} y^{\text{فرد}}| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$

$|x^{\text{فرد}} y^{\text{زوج}}| \leqslant |x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{|x^{\text{زوج}} y^{\text{فرد}}|}{|x^{\text{زوج}}+y^{\text{زوج}}|} \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\frac{|x^{\text{فرد}} y^{\text{زوج}}|}{|x^{\text{زوج}}+y^{\text{زوج}}|} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$|\sin x| \leqslant 1 \rightarrow |x\sin x| \leqslant |x|$

$|\cos x| \leqslant 1 \rightarrow |x\cos x| \leqslant |x|$

$|y\sin y| \leqslant |y|$

$|y\cos y| \leqslant |y|$

$|\sin y| \leqslant 1$

$|\cos y| \leqslant 1$

$|\sin^2(x-y)| \leqslant |x-y|^2$

مثال: پیوستگی را بررسی کنید

$$1)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

شرط اول: بررسی حدهای مکرر

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}}\right)=0=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}}\right)$$

شرط دوم:

$y=mx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^4+m^4x^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2\sqrt{1+m^4}}=\frac{m}{1+m^4}$$ وابسته به m.

تابع در $(0,0)$ حد ندارد و در نتیجه پیوسته نیست.

۲) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^4+2y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

شرط اول:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^3}{x^4+2y^4}\right)=0=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^3}{x^4+2y^4}\right)$$

شرط دوم:

$y=mx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2m^3x^3}{x^4+2m^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{x}{x^5}(m^3)}{x^4(1+2m^4\underset{0}{x^4})}=0$$

$y=mx^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2m^3x^6}{x^4+2m^4x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{m^3\cancel{x^4}x^4}{x^4(1+2m^4x^4)}=0$$

شرط سوم:

$\forall \varepsilon>0\quad \exists\delta>0\,;\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \sqrt{x^2+y^2}<\delta$

$\Longrightarrow |f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$

$\left|\dfrac{x^2y^3}{x^4+2y^4}-0\right|<\varepsilon \longrightarrow \dfrac{|x^2y^3|}{|x^4+2y^4|}<\varepsilon$

برای پیدا کردن رابطه δ و ε از $\left|\dfrac{x^2y^3}{x^4+2y^4}\right|<\varepsilon$ شروع می‌کنیم

$$\left|\frac{x^2y^3}{x^4+2y^2}\right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta < \varepsilon$$

با فرض $\varepsilon > \delta$ تابع در $(0,0)$ پیوسته است.

۳) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

شرط اول:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{4x^2y^3}{x^2+y^2}\right)=0=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{4x^2y^3}{x^2+y^2}\right)$$

شرط دوم:

$y=mx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2m^3x^3}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}(4m^3x^3)}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=0$$

$y=mx^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2m^3x^6}{x^2+m^2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}(4m^3x^6)}{\cancel{x^2}(1+m^2x^2)}=0$$

شرط سوم:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ ;\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \sqrt{x^2+y^2}<\delta$$

$$\rightarrow |f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$$

$$\left| \frac{4x^2y^3}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{4|x^2y^3|}{|x^2+y^2|} \leq 4|y| \leq 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta < \varepsilon$$

با فرض $4\delta < \varepsilon$ تابع در $(0,0)$ پیوسته است.

$$4)\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

شرط اول

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}\right) = 0 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}\right)$$

شرط دوم

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x-x)}{|x|+|x|} = 0$$

شرط سوم

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 ; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 , \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{|\sin^2(x-y)|}{|x|+|y|} \leqslant \frac{|x-y|^2}{|x|+|y|} \leqslant \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta < \varepsilon$$

با فرض $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ تابع در $(0,0)$ پیوسته است.

مشتقات جزئی مرتبه اول:

تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ را در نظر می‌گیریم مشتق جزئی مرتبه اول تابع f نسبت به x را که با یکی از دو نماد f_x یا $\frac{\partial f}{\partial x}$، مشتق جزئی مرتبه اول تابع f نسبت به y را با یکی از دو نماد f_y یا $\frac{\partial f}{\partial y}$ نشان می‌دهیم.

$$f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

مثال: مشتقات جزئی مرتبه اول را حساب کنید.

1) $f(x,y) = \ln(1+xy)$

$$f_x = \frac{y}{1+xy} \qquad f_y = \frac{x}{1+xy}$$

2) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_x=\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f_y=\frac{-\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

مشتقات جزئی مرتبه دوم:

مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع $z=f(x,y)$ نسبت به x و y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

مثال: اگر $z=x\,Ln(x^2+y^2)-2y\,\arctan\frac{y}{x}$ مطلوب است محاسبه‌ی

z_x ، z_y ، z_{xx} ، z_{yx}.

$$z_x = 1 \times Ln(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2} \times x - \frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \times 2y$$

$1+u^2$

$$\Rightarrow z_x = Ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow z_x = Ln(x^2+y^2) + 2$$

$$z_{xx} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$z_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \times x - 2\tan\frac{y}{x} - \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \times 2y$$

$$z_y = \frac{2yx}{x^2+y^2} - 2\tan\frac{y}{x} - \frac{2yx}{x^2+y^2} = -2\tan\frac{y}{x}$$

$$z_{yx} = -2 \times \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{+2y}{x^2+y^2}$$

مثال: اگر $z = \frac{x+y}{x-y}$ داده شده باشد حاصل عبارت زیر را پیدا کنید:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

$$z_x = \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2}$$

$$z_y = \frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}$$

$$\frac{-2yx}{(x-y)^2} + \frac{2xy}{(x-y)^2} = 0$$

مثال: نشان دهید تابع $z = f(x^2+y^2)$ در معادلهٔ $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند

$$z_x = 2x \times f'(x^2+y^2)$$

$$z_y = 2y \times f'(x^2+y^2)$$

$$2xy \times f'(x^2+y^2) - 2yx \times f'(x^2+y^2) = 0$$

مثال: اگر $z = f(x^2-y) + g(x^2+y)$ به طوری که f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند

نشان دهید: $z_{xx} - \frac{1}{x} z_x = 4x^2 z_{yy}$

$$z_x = 2x f'(x^2-y) + 2x g'(x^2+y)$$

$$z_{xx} = 2f'(x^2-y) + 2x f''(x^2-y) \times 2x + 2g'(x^2+y) + 2x g''(x^2+y) \cdot 2x$$

$$\Rightarrow z_{xx} = 2f'(x^2-y) + 4x^2 f''(x^2-y) + 2g'(x^2+y) + 4x^2 g''(x^2+y)$$

$$z_y = -f'(x^2-y) + g'(x^2+y)$$

$$z_{yy} = f''(x^2-y) + g''(x^2+y)$$

$$2f'(x^2-y) + 4x^2 f''(x^2-y) + 2g'(x^2+y) + 4x^2 g''(x^2+y) - \frac{1}{x} \times 2x f'(x^2-y) - \frac{1}{x} 2x \times g'(x^2+y) =$$

$4x^2 f''(x^2-y) + 4x^2 g'(x^2+y)$

$4x^2 f''(x^2-y)+4x^2 g''(x^2+y) = 4x^2 f''(x^2-y)+4x^2 g''(x^2+y)$ ✓

مثال، اگر $z = \frac{1}{y} f(x-y)$ حاصل $z + yz_x + yz_y$ را بیابید.

$z_x = \frac{1}{y} \times f'(x-y)$

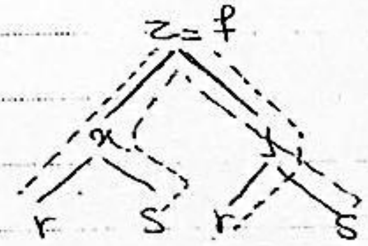
$z_y = \frac{-1}{y^2} f(x-y) - f'(x-y) \times \frac{1}{y}$

$\frac{1}{y} f(x-y) + \cancel{f'(x-y)} - \frac{1}{y} f(x-y) - \cancel{f'(x-y)} = 0$

مشتقات زنجیره‌ای:

اگر داشته باشیم $z=f(x,y)$ و $x=g(r,s)$ و $y=h(r,s)$ آنگاه مشتق زنجیره‌ای z نسبت به r

و مشتق زنجیره‌ای z نسبت به s عبارت اند از:

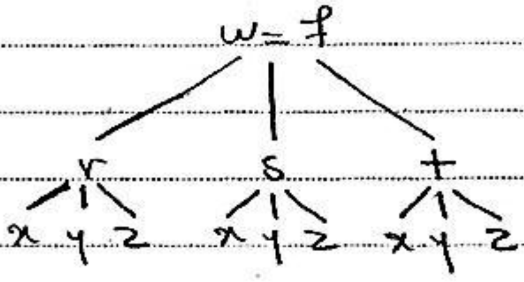


$z_r = \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial r}$

$z_s = \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial s}$

مثال، نشان دهید تابع $w = f(\underbrace{2x+4y-6z}_{r}, \underbrace{2y+4z-6x}_{s}, \underbrace{4x-6y+2z}_{t})$

که معادله‌ی $w_x + w_y + w_z = 0$ صدق می‌کند.



$$w_x = \frac{\partial w}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\times\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial r}\times(۲) + \frac{\partial w}{\partial s}\times(-۶) + \frac{\partial w}{\partial t}\times(۴) \qquad ①$$

$$w_y = \frac{\partial w}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t}\times\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$w_y = \frac{\partial w}{\partial r}\times(۴) + \frac{\partial w}{\partial s}\times(۲) + \frac{\partial w}{\partial t}\times(-۶) \qquad ②$$

$$w_z = \frac{\partial w}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\times\frac{\partial t}{\partial z}$$

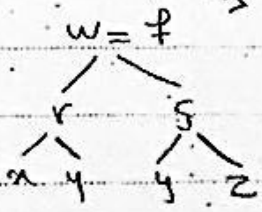
$$w_z = \frac{\partial w}{\partial r}\times(-۶) + \frac{\partial w}{\partial s}\times(۴) + \frac{\partial w}{\partial t}\times(۲) \qquad ③$$

$$① + ② + ③ = (0)\frac{\partial w}{\partial r} + (0)\frac{\partial w}{\partial s} + (0)\frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

حال با فرض $w = f\left(\overbrace{\frac{y-x}{xy}}^{r}, \overbrace{\frac{z-y}{yz}}^{s}\right)$ نشان دهید.

$$x^2 w_x + y^2 w_y + z^2 w_z = 0$$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ $\qquad$ $\frac{1}{y} - \frac{1}{z}$



$$w_x = \frac{\partial w}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial r} \times \frac{-1}{x^2}$$

$$w_y = \frac{\partial w}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s} \times \frac{\partial s}{\partial y}$$

$$w_y = \frac{\partial w}{\partial r} \times + \frac{1}{y^2} + \frac{\partial w}{\partial s} \times \frac{-1}{y^2}$$

$$w_z = \frac{\partial w}{\partial s} \times \frac{\partial s}{\partial z}$$

$$w_z = \frac{\partial w}{\partial s} \times \frac{1}{z^2}$$

$$x^2 \times \frac{-1}{x^2} \times \frac{\partial w}{\partial r} + y^2 \times \frac{1}{y^2} \times \frac{\partial w}{\partial r} - y^2 \times \frac{1}{y^2} \times \frac{\partial w}{\partial s} + z^2 \times \frac{1}{z^2} \times \frac{\partial w}{\partial s}$$

$$= -\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial s} = 0$$

تمرین ۱) اگر $z = x f(x - ay) + y g(ax - y)$ نشان دهید: $z_{xy} - z_{yx} = 0$

۲) اگر $u = f(y-z, z-x, x-y)$ نشان دهید: $u_x + u_y + u_z = 0$

۳) درصورتی که داشته باشیم $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 2uv$ و

$\phi(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ نشان دهید: $\frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{\partial \phi}{\partial u} = 0$

۱- اگر $z = xf(x-ay) + yg(ax-y)$ نشان دهید: $z_{xy} - z_{yx} = 0$

$$z_x = f(x-ay) + xf'(x-ay) + ayg'(ax-y)$$

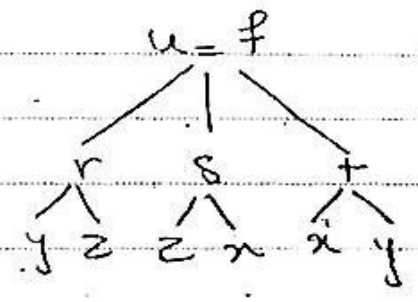
$$z_{xy} = -af'(x-ay) - axf''(x-ay) + ag'(ax-y) - ayg''(ax-y)$$

$$z_y = -axf'(x-ay) + g(ax-y) - yg'(ax-y)$$

$$z_{yx} = -af'(x-ay) - axf''(x-ay) + ag'(ax-y) - ayg''(ax-y)$$

$$z_{xy} - z_{yx} = -af'(x-ay) - axf''(x-ay) + ag'(ax-y) - ayg''(ax-y)$$
$$+ af'(x-ay) + axf''(x-ay) - ag'(ax-y) + ayg''(ax-y) = 0$$

۲- اگر $u = f(\overbrace{y-z}^{r}, \overbrace{z-x}^{s}, \overbrace{x-y}^{t})$ نشان دهید: $u_x + u_y + u_z = 0$



$$u_x = \frac{\partial u}{\partial s} \times \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \times \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial s} \times (-1) + \frac{\partial u}{\partial t} \times (1)$$

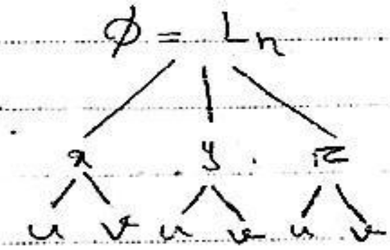
$$u_y = \frac{\partial u}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \times \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \times (1) + \frac{\partial u}{\partial t} \times (-1)$$

$$u_z = \frac{\partial u}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s} \times \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \times (-1) + \frac{\partial u}{\partial s} \times (1)$$

$$u_x + u_y + u_z = \cancel{-\frac{\partial u}{\partial s}} + \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + \cancel{\frac{\partial u}{\partial r}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + \cancel{\frac{\partial u}{\partial s}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial r}} = 0$$

۳_ درصورتی که داشته باشیم $x=u+v$ ، $y=u-v$ ، $z=2uv$ و $\phi(x,y,z) = Ln(x^2+y^2+2z)$ نشان دهید: $\frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{\partial \phi}{\partial u} = 0$

$$\phi(x,y,z) = Ln(x^2+y^2+2z)$$



$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = \frac{2x}{x^2+y^2+2z} \times (1) + \frac{2y}{x^2+y^2+2z} \times (-1) + \frac{2}{x^2+y^2+2z} \times (2u)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial v} = \frac{2x-2y+4u}{x^2+y^2+2z}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{2x+2y+2z\times 2v}{x^2+y^2+2z} = \frac{2x+2y+4v}{x^2+y^2+2z} \quad ②$$

$$① - ② = \frac{\cancel{2x}-2y+4u-2x-2y-4v}{x^2+y^2+2z}$$

$$= \frac{4u-4y-4v}{x^2+y^2+2z} = \frac{\overbrace{4u-4v}^{4(u-v)=4y}-4y}{x^2+y^2+2z} = \frac{4y-4y}{x^2+y^2+2z} = 0$$

مشتق ضمنی:

تابع $f(x,y,z)=0$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم z تابعی مشتق پذیر برحسب x و y می‌باشد آن گاه مشتق ضمنی z نسبت به x و y به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}$$

(f_x: مشتق f نسبت به x — f_z: مشتق f نسبت به z)

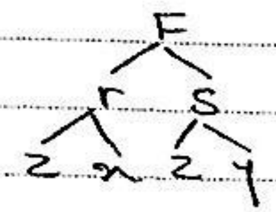
$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}$$

مثال: اگر z تابعی از x و y باشد و $F(z-\frac{1}{x}, z+\frac{1}{y}) = 0$ نشان دهید:

$$y^2 z_y - x^2 z_x = 1$$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}$$

برای پیدا کردن F_x و F_z از روش زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم $F(\underbrace{z-1/x}_{r}, \underbrace{z+1/y}_{s})$



$$F_z = \frac{\partial F}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial z}^{\,1} + \frac{\partial F}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial z}^{\,1}$$

$$\Rightarrow F_z = \frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial s}$$

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial x}^{\,1/x^2} = 1/x^2\,\frac{\partial F}{\partial r}$$

$$z_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial r}\times\frac{1}{x^2}}{\frac{\partial F}{\partial r}\times\frac{\partial F}{\partial s}} \quad (1)$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial y}^{\,1/y^2} = \frac{1}{y^2}\times\frac{\partial F}{\partial s}$$

$$z_y = -\frac{\frac{1}{y^2}\times\frac{\partial F}{\partial s}}{\frac{\partial F}{\partial r}\times\frac{\partial F}{\partial s}} \quad (2)$$

(1),(2)

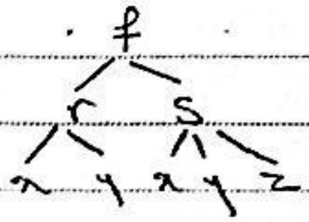
$$y^2 z_y - x^2 z_x = \frac{\frac{\partial F}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial r}}{\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial s}} = 1$$

۵- اگر z تابعی از x و y باشد و $f\left(\frac{x}{y}, \frac{z+xy}{x}\right)=0$ مقدار xz_x+yz_y را بیابید.

$\frac{z}{x}+y$

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z}$$

$$f\Big(\underbrace{\frac{x}{y}}_{r}\,,\,\underbrace{\frac{z}{x}+y}_{s}\Big)$$



$$f_x = \frac{\partial f}{\partial r}\times \overset{1/y}{\frac{\partial r}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial s}\times \overset{-z/x^2}{\frac{\partial s}{\partial x}}$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial s}\times \overset{1/x}{\frac{\partial s}{\partial z}}$$

$$z_x = -\frac{\frac{1}{y}\times\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{z}{x^2}\times\frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{1}{x}\times\frac{\partial f}{\partial s}}$$

$$z_y = -\frac{f_y}{f_z}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial r}\times \overset{-x/y^2}{\frac{\partial r}{\partial y}} + \frac{\partial f}{\partial s}\times \overset{1}{\frac{\partial s}{\partial y}}$$

$$z_y = -\frac{-\frac{x}{y^2}\times\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{1}{x}\times\frac{\partial f}{\partial s}}$$

$$x z_x + y z_y = \frac{\cancel{-\frac{x}{y}\times\frac{\partial f}{\partial r}} + \frac{z}{x}\times\frac{\partial f}{\partial s} + \cancel{\frac{x}{y}\times\frac{\partial f}{\partial r}} - y\frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{1}{x}\times\frac{\partial f}{\partial s}}$$

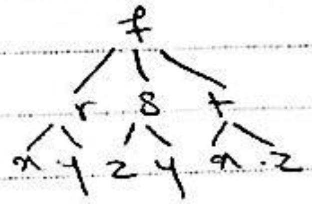
$$\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{z}{x}-y\right)$$

$$=\frac{\frac{z}{x}-y}{\frac{1}{x}} = z - yx$$

مثال: اگر $f(y^2x, z^2y, x^2z)=0$ آن گاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ را بیابید.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = -\frac{f_x}{f_z}$$

$$f(\underbrace{y^2x}_{r}, \underbrace{z^2y}_{s}, \underbrace{x^2z}_{t})$$



$$f_x = \frac{\partial f}{\partial r}\times\cancel{\frac{\partial r}{\partial x}}^{\,y^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\times\cancel{\frac{\partial t}{\partial x}}^{\,2xz}$$

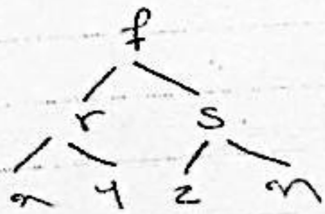
$$f_z = \frac{\partial f}{\partial s}\times\cancel{\frac{\partial s}{\partial z}}^{\,2zy} + \frac{\partial f}{\partial t}\times\cancel{\frac{\partial t}{\partial z}}^{\,x^2}$$

$$z_x = -\frac{y^2\frac{\partial f}{\partial r}+2xz\frac{\partial f}{\partial t}}{x^2\frac{\partial f}{\partial t}+2zy\frac{\partial f}{\partial s}}$$

مثال: تابع ضمنی $f(x^2-y^2, z-x^2)=0$ مفروض است حاصل yz_x+xz_y را بدست آورید.

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z}$$

$$f(\underbrace{x^2-y^2}_{r}, \underbrace{z-x^2}_{s})$$



$$f_x = \frac{\partial f}{\partial r}\times\cancel{\frac{\partial r}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial s}\times\cancel{\frac{\partial s}{\partial x}}^{\,-2x}$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial s} \times \frac{\partial s}{\partial z}^{\nearrow 1} \qquad z_x = -\frac{2x\frac{\partial f}{\partial r} - 2x\frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial f}{\partial s}}$$

$$z_y = -\frac{f_y}{f_z}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial y}^{\nearrow -2y} \qquad z_y = -\frac{-2y\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial f}{\partial s}}$$

$$y z_x + x z_y \Rightarrow \frac{\cancel{-2xy\frac{\partial f}{\partial r}} + 2xy\cancel{\frac{\partial f}{\partial s}} + \cancel{2yx\frac{\partial f}{\partial r}}}{\cancel{\frac{\partial f}{\partial s}}} = \boxed{+2xy}$$

تمرین :

۱ـ اگر $F\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x}\right) = 0$ آنگاه K را طوری بیابید که $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = Kz$

باشد. $(K=1)$

۲ـ هرگاه $\underbrace{z = z(x,y)}_{\text{مشتق ضمنی}}$ و $\underbrace{x^2 z + 2y + e^{x-y-2z}}_{F(x,y,z)=0} = 0$ نشان دهید

$z_x(1,-1,1) = 3$ می‌شود.

۳ـ اگر $F(x^3 - y^3, x^2 - z^2) = 0$ ، $z = z(x,y)$ ثابت کنید

$$y^2 z \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = xy^2$$

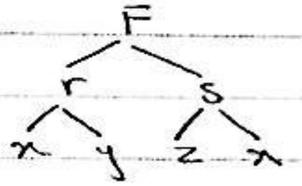
۴ـ اگر $F\left(z - \frac{1}{x}, z + \frac{1}{y}\right) = 0$ ثابت کنید

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial y} - x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

۵- اگر $z=z(x,y)$ تابعی مشتق پذیر باشد و $\underbrace{z\sin(x+y)-zy+x^2=1}_{F(x,y,z)=1}$

مقادیر z_x و z_y را به ازای (۱ و ۱- و ۰) بیابید.

۱- اگر $F\left(\overset{r}{\frac{x}{y}}, \overset{s}{\frac{z}{x}}\right)=0$ آنگاه K را طوری بیابید که $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=Kz$.



$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z}$$

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial r}\times\overset{\frac{1}{y}}{\cancel{\frac{\partial r}{\partial x}}}+\frac{\partial f}{\partial s}\times\overset{-\frac{z}{x^2}}{\cancel{\frac{\partial s}{\partial x}}}=\frac{1}{y}\times\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{z}{x^2}\frac{\partial f}{\partial s}$$

$$f_z=\frac{\partial f}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial s}\times\frac{1}{x}$$

$$z_x=-\frac{\frac{1}{y}\times\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{z}{x^2}\times\frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{1}{x}\times\frac{\partial f}{\partial s}}=-\frac{\frac{x^2\partial f\partial s-zy\partial r\partial f}{y\cancel{x}^2\cancel{\partial s}\partial r}}{\frac{\partial f}{x\cancel{\partial s}}}=-\frac{\cancel{\partial f}(x^2\partial s-zy\partial r)}{y\partial r\cancel{\partial f}}$$

$$z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_z}$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial r}\times\overset{-\frac{x}{y^2}}{\frac{\partial r}{\partial y}}=-\frac{x}{y^2}\times\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$z_y=+\frac{\frac{x}{y^2}\times\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{1}{x}\times\frac{\partial f}{\partial s}}=\frac{x^2\partial f\partial s}{y^2\partial r\partial f}\xrightarrow{\times y}\frac{x^2\partial s}{y\partial r}$$

$$xz_x + yz_y = \frac{2y\cancel{\partial r} - x^2\partial s + x^2\partial s}{y\cancel{\partial r}} = z$$

$$z = kz \Rightarrow \boxed{K=1}$$

۲ـ هرگاه $z=z(x,y)$ ، $x^2z + 2y + e^{x-y-2z} = 0$ نشان دهید $z_x(1,-1,1) = 3$ می‌شود.

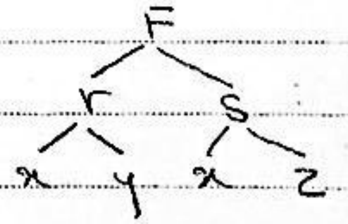
$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} \qquad f_x = 2xz + e^{x-y-2z}$$

$$f_z = x^2 - 2e^{x-y-2z}$$

$$z_x = -\frac{2xz + e^{x-y-2z}}{x^2 - 2e^{x-y-2z}} \xrightarrow{(1,-1,1)} -\frac{2+e^{0}}{1-2e^{0}} = \boxed{3}$$

۳ـ اگر $F(\underbrace{x^3-y^3}_{r}, \underbrace{x^2-z^2}_{s}) = 0$ ، $z=z(x,y)$ ثابت کنید

$$y^2 z\frac{\partial z}{\partial x} + x^2 z\frac{\partial z}{\partial y} = xy^2$$



$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial r} \times \overbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}^{3x^2} + \frac{\partial f}{\partial s} \times \overbrace{\frac{\partial s}{\partial x}}^{2x} = 3x^2\frac{\partial f}{\partial r} + 2x\frac{\partial f}{\partial s}$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial s} \times \overbrace{\frac{\partial s}{\partial z}}^{-2z} = -2z\frac{\partial f}{\partial s}$$

$$z_x = -\frac{3x^2\frac{\partial f}{\partial r} + 2x\frac{\partial f}{\partial s}}{-2z\frac{\partial f}{\partial s}}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial r} \times \overbrace{\frac{\partial r}{\partial y}}^{-3y^2} = -3y^2\,\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$z_y = \frac{3y^2\,\frac{\partial f}{\partial r}}{-2z\,\frac{\partial f}{\partial s}}$$

$$y^2 \cancel{z} \times \frac{3x^2\,\frac{\partial f}{\partial r} + 2x\,\frac{\partial f}{\partial s}}{2\cancel{z}\,\frac{\partial f}{\partial s}} + x^2 \cancel{z} \times \frac{3y^2\,\frac{\partial f}{\partial r}}{-2\cancel{z}\,\frac{\partial f}{\partial s}}$$

$$= \frac{3x^2y^2\,\frac{\partial f}{\partial r} + 2xy^2\,\frac{\partial f}{\partial s} - 3x^2y^2\,\frac{\partial f}{\partial r}}{2\,\frac{\partial f}{\partial s}} = \boxed{xy^2}$$

اگر $F(\underbrace{z-\frac{1}{x}}_{r} , \underbrace{z+\frac{1}{y}}_{s}) = 0$ آنگاه ثابت کنید:

$$y^2\,\frac{\partial z}{\partial y} - x^2\,\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial s} \times \overbrace{\frac{\partial s}{\partial y}}^{-\frac{1}{y^2}} = -\frac{1}{y^2} \times \frac{\partial f}{\partial s}$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial r} \times \overbrace{\frac{\partial r}{\partial z}}^{1} + \frac{\partial f}{\partial s} \times \overbrace{\frac{\partial s}{\partial z}}^{1} = \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial s}$$

$$z_y = -\frac{-\frac{1}{y^2} \times \frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial s}}$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \times \frac{\partial f}{\partial r}$$

$$z_x = -\frac{\frac{1}{x^2} \times \frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial s}}$$

$$\cancel{y^2} \times \frac{\frac{1}{\cancel{y^2}} \times \frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial s}} + x^2 \times \frac{\frac{1}{x^2} \times \frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial s}} = 1$$

مسأله: اگر $z = z(x,y)$ تابعی مشتق پذیر باشد و $z\sin(x+y) - zy + x^2 = 1$ مقادیر z_x و z_y را به ازای $(1, -1, 1)$ به دست آورید.

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{z\cos(x+y) + 2x}{\sin(x+y) - y}$$

$$= -\frac{1+2}{0+1} = -3$$

$$z_y = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{z\cos(x+y) - z}{\sin(x+y) - y} = -\frac{1-1}{0+1} = 0$$

بردار گرادیان:

تابع سه متغیری $w = f(x,y,z)$ را در نظر می‌گیریم. بردار گرادیان تابع f برداری است عمود بر سطحی که در فضای سه بعدی تابع f می‌سازد و طبق رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\underset{\text{گرادیان } f}{\vec{\nabla} f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

مثال. بردار گرادیان توابع زیر را بیابید.

1- $w = \ln(x^2+y^2+z^2)$

$$\vec{\nabla} w = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

2- $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\cancel{2}z}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

کرل میدان برداری:

تابع برداری $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ را در نظر می‌گیریم. کرل تابع برداری F را با نماد $\mathrm{curl}\,\vec{F}$ نشان می‌دهیم.

۲- حاصل ضرب خارجی بردار گرادیان در تابع برداری F می باشد یعنی:

$$\overrightarrow{\text{Curl} F} = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{F}}_{\text{ضرب خارجی دو بردار}}$$

جواب بدست آمده از کرل یک تابع، برداری می باشد.

مثال: کرل توابع برداری داده شده را بدست آورید.

$$1- \quad F(x,y,z) = x^2 y \,\vec{i} - 3xy \,\vec{j} + (z-2)\,\vec{k}$$

در نقطه (۱,۲,۱)

$$\text{Curl}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \longrightarrow \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & -3xy & z-2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(z-2)}{\partial y} - \frac{\partial(-3xy)}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial(z-2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 y)}{\partial z}\right)\vec{i}$$

$$+ \left(\frac{\partial(-3xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 y)}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= (0\,,\,0\,,\,-3y - x^2) \xrightarrow{(1,2,1)} (0,0,-7)$$

۲_ $F(x,y,z) = (x - z\,,\, x^3 + yz\,,\, -3xy^2)$

در نقطه $(1,1,1)$

$$\text{Curl} F = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - z & x^3 + yz & -3xy^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(-3xy^2)}{\partial y} - \frac{\partial(x^3+yz)}{\partial z} \right) i - \left(\frac{\partial(-3xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x-z)}{\partial z} \right) \vec{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial(x^3+yz)}{\partial x} - \frac{\partial(x-z)}{\partial y} \right) \vec{k} =$$

$$= (-6xy - y\,,\, +3y^2 - 1\,,\, 3x^2 - 0)$$

$$= (-7\,,\, 2\,,\, 3)$$

دیورژانس یک تابع برداری:

تابع برداری $F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ را در نظر می‌گیریم، به حاصل ضرب داخلی بردار گرادیان، تابع برداری $\vec{F}$

دیورژانس F گوییم و با $div \vec{F}$ نشان می‌دهیم.

$$div \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

ضرب داخلی

نکته: گرادیان یک تابع اسکالر مانند $f(x,y,z)$ یک برداری باشد

دیورژانس یک تابع برداری مانند $\overrightarrow{F(x,y,z)}$ اسکالر است.

مثال: دیورژانس تابع برداری $\vec{F}(x,y,z) = x^2y\,\vec{i} + e^{xyz}\,\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}$ را بیابید.

$$div \vec{F} = \frac{\partial(x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial(e^{xyz})}{\partial y} + \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial z}$$

$$div \vec{F} = 2xy + xze^{xyz} + 0$$

مشتق سویی (جهتی):

تابع $w = f(x,y,z)$ را در نظر می‌گیریم. مشتق سویی یا جهتی تابع $f(x,y,z)$ در جهت بردار یکه $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ را با نماد $D_{\vec{u}} f$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_{\vec{u}} f = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \underline{\underline{\vec{u}}} = \|\overrightarrow{\nabla f}\| \, \|\vec{u}\| \cos\theta$$

که بردار یکه

* اندازه‌ی x در فضای سه‌بعدی را با $\|x\|$ نشان می‌دهیم.

مشتق سویی یک تابع در جهت بردار یکه $\vec{u}$ وقتی بیشترین مقدار را

دارد که بردار گرادیان و تابع و بردار یکه $\vec{u}$ در یک جهت باشد.

مثال: مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)=xy+yz^2+xy^2$ را در نقطه

$(3,0,2)$ و در امتداد بردار $(2,-1,-2)$ بیابید.

$$\vec{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(y+y^2,\ x+z^2+2xy,\ 2yz\right)$$

$$\underline{2,0,3}:\ (0,11,0) \quad ①$$

$$\text{بردار یکه } u=\frac{(-2,-1,2)}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \quad ②$$

اندازه‌ی بردار دارد ← 3

①و②

$$D_{\vec{u}} f=(0,11,0)\cdot\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=-\frac{11}{3}$$

مثال: تیر/۹۳: مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)=3x-5y+2z$ را در جهت عمود بر گرادیان

در سطح $g: x^2+y^2+z^2=9$ در نقطه‌ای به مختصات $(1,2,2)$ بیابید.

$$\vec{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=(3,-5,2) \quad ①$$

از آنجا که بردار گرادیان یک سطح داده شده همواره بر آن سطح عمود می باشد

لذا مشتق سوئی تابع f در جهت $\boxed{\text{بردار گرادیان } g}$ گرفته می‌شود.

$$\vec\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)\Big|_{(2,2,1)} = (4,4,2)$$

$$\vec u = \frac{\vec\nabla g}{\|\vec\nabla g\|} = \frac{(4,4,2)}{\underbrace{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}_{6}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad ②$$

$$①,② \rightarrow D_u f = (3,-5,2)\cdot\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{10}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

مثال: ۱،۶،۹۳، مشتق سوئی تابع $f(x,y,z) = xyz + x^2y^2z^3$ در نقطه $(1,-1,1)$

در امتداد منحنی فصل مشترک استوانه‌های $g: x^2+y^2=2$ و $h: x^2+z^2=2$ به دست آورید.

$$\vec\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(yz+2xy^2z^3,\ xz+2x^2yz^3,\ xy+3x^2y^2z^2\right)$$

$$\Big|_{(1,-1,1)} = (-1+2,\ 1-2,\ -1+3) = (1,-1,2) \quad ①$$

ضرب خارجی $\vec\nabla f$ و $\vec\nabla g$ عمود بر فصل مشترک دو سطح می‌باشد

گرادیان g عمود بر سطح g می‌باشد

گرادیان h عمود بر سطح h می‌باشد.

$$\vec\nabla g = (2x, 2y, 0)\Big|_{(1,-1,1)} = (2,-2,0)$$

$$\vec\nabla f = (2x, 0, 2z)\Big|_{(1,-1,1)} = (2,0,2)$$

$$(2,-2,0)\times(2,0,2)=(-4,-4,4) \quad ②$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4-0),\ -(4-0),\ (0+4) = (-4,-4,4)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{\nabla g}\times\vec{\nabla f}}{\|\vec{\nabla g}\times\vec{\nabla f}\|} = \frac{(-4,-4,4)}{\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(4)^2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad ③$$

①, ③

$$\longrightarrow D_{\vec{u}} f = (1,-1,2)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

مثال: مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=e^{xy}+e^{yz}+e^{xz}$ در نقطهٔ $(0,1,0)$ و در جهت

بردار مماس بر $\vec{r(t)}=(\sin t, \cos t, t)$ به ازای $t=0$ را بیابید.

$$\vec{\nabla f}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(ye^{xy}+ze^{xz},\ xe^{xy}+ze^{yz},\ ye^{yz}+xe^{xz}\right)$$

$$\Big|_{(0,1,0)} = \left(e^0+0,\ 0+0,\ e^0+0\right) = (1,0,1) \quad ①$$

بردار مماس بر بردار وضعیت $r(t)$ را توسط $\vec{r'(t)}$ محاسبه می‌کنیم.

$$r'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)\Big|_{t=0} = (1,0,1)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{r'(t)}}{\|r'(t)\|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad ②$$

$D_{\vec u} f(1,0,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{21}}, 0, \frac{1}{\sqrt{21}}\right) = \frac{1}{\sqrt{21}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}$

مثال ۹۳/۱۰/۱۹: مشتق سوئی تابع $f(x,y,z) = y^2 + \ln(x^2+z^2)$ را در جهت کرل میدان برداری $\vec F = x^2y\,\vec i - 3xy\,\vec j + (z-2)\vec K$ در نقطه $(1,2,1)$ بیابید $(\overrightarrow{\text{Curl}\,F} = \vec\nabla \times \vec F)$

$$\overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{2x}{x^2+z^2}, 2y, \frac{2z}{x^2+z^2}\right)$$

$$= \Big|_{(1,2,1)} = \left(\frac{2}{2}, 4, \frac{2}{2}\right) = (1,4,1) \quad ①$$

$$\overrightarrow{\text{Curl}\,F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(x^2y, -3xy, (z-2)\right)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -3xy & z-2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(z-2)}{\partial y} - \frac{\partial(-3xy)}{\partial z}\right)i - \left(\frac{\partial(z-2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y)}{\partial z}\right)j$$

$$+ \left(\frac{\partial(-3xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\right)k = (0, 0, -3y-x^2)\Big|_{(1,2,1)}$$

$$(0, 0, -7)$$

PAPCO

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\text{Curl } F}}{\|\text{curl } F\|} = \frac{(0,0,-7)}{7} = (0,0,-1) \quad ②$$

①,②

$$D_{\vec{u}} f = (0,0,1) \cdot (0,0,-1) \cdot (1,4,1) = 0+0-1 = -1$$

تمرین : (۹۳,۳,۲۸)

۱- (۹۳,۳,۲۸) : مشتق سوئی تابع $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را در جهت عمود بر

سطح $1 = x^2 - y^2 + z^2$ و در نقطه‌ای به مختصات $(3,4,0)$ بیابید

۲- (۹۶,۶,۶) : از تابع $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ در جهت عمود بر منحنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ در

نقطه $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ مشتق بگیرید

---

۱. مشتق سوئی تابع $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را در جهت عمود بر سطح $1 = x^2 - y^2 + z^2$

و در نقطه‌ای به مختصات $(3,4,0)$ بیابید.

$$\vec{\nabla f} = \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\Big|_{(3,4,0)} = \left(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}, 0\right)$$

چون عمود را می‌خواهیم گرادیان g را محاسبه می‌کنیم

$$\vec{\nabla} g=(2x,-2y,2z)\Big|_{(3,4,0)}=(6,-8,0)$$

$$\vec{u}=\frac{\vec{\nabla} g}{\|\vec{\nabla} g\|}=\frac{(6,-8,0)}{\sqrt{(6)^2+(-8)^2+0^2}}=\left(\frac{6}{10},-\frac{8}{10},0\right)$$

$$D_{\vec{u}}f=\left(\frac{6}{10},\frac{8}{10},0\right)\cdot\left(\frac{6}{10},-\frac{8}{10},0\right)=\frac{36}{100}-\frac{64}{100}+0=-\frac{28}{100}$$

۲- از تابع $z=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ در جهت عمود بر منحنی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ در نقطه $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ مشتق بگیرید.

$$\vec{\nabla} z=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(-\frac{2x}{a^2},-\frac{2y}{b^2}\right)\Big|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},\frac{-\sqrt{2}}{b}\right)$$

برای جهت عمود بر منحنی گرادیان محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{\nabla} g=\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y}\right)=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2}\right)\Big|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=\left(\frac{\sqrt{2}}{a},\frac{\sqrt{2}}{b}\right)$$

$$\vec{u}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{a},\frac{\sqrt{2}}{b}\right)}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}}$$

$$D_{\vec{u}}f=\vec{\nabla} f\cdot u=\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{b}\right)\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{a},\frac{\sqrt{2}}{b}}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}}\right)=\frac{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}$$

صفحه ی مماس و خط قائم بر یک رویه:

فرض کنید تابع $f(x,y,z)=0$ یک رویه در فضای سه بعدی باشد. گرادیان f بردار عمود بر رویه می باشد. پس صفحه ی مماس بر این رویه در نقطه (x_0,y_0,z_0) دارای بردار نرمالی برابر با بردار گرادیان f است و خط قائم بر رویه در نقطه ای به x_0,y_0,z_0 دارای بردار هادی مساوی با بردار گرادیان f است.

معادله صفحه مماس

$$\vec{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z-z_0)=0$$

معادله خط قائم:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}}$$

تمرین:

۱- معادله صفحه ی مماس، خط قائم بر رویه $\sqrt{x^2}+e^x\cos y=1+ze^x$ در نقطه $(1,\pi,-1)$ را بنویسید.

۲ـ معادلات صفحه مماس و خط قائم بر سطح $\cos(\pi x) - x^2y + e^{xz} + yz = 4$

در نقطه (۰،۱،۲) بیابید.

۱ـ معادله صفحه‌ی مماس و خط قائم بر رویه‌ی $\sqrt{x} + e^x\cos y = 1 + ze^x$ در نقطه‌ی (۱،π،۱-)، را بنویسید.

$f: \sqrt{x} + e^x\cos y - ze^x - 1 = 0$

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x\cos y - ze^x , -e^x\sin y , -e^x\right)\Bigg|_{(1,\pi,-1)}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - e + e , 0 , -e\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, -e\right)$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس:

$$\frac{1}{2}(x-1) + 0(y-\pi) - e(z+1) = 0$$

معادله خط قائم:

$$\frac{x-1}{1/2} = \frac{z+1}{-e}$$

۲ـ معادلات صفحه مماس و خط قائم بر سطح $\cos(\pi x) - x^2y + e^{xz} + yz = 4$ در نقطه (۰،۱،۲) بیابید.

$f: \cos(\pi x) - x^2y + e^{xz} + yz - 4 = 0$

$$\vec{\nabla} f = \left(-\pi\sin(\pi x) - 2xy + ze^{xz} , -x^2 + z , xe^{xz} + y\right)\Bigg|_{(0,1,2)}$$

$$= (0 - 0 + 2 , 2 , 1) = (2,2,1)$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس

$$2(x-0)+2(y-1)+1(z-2)=0$$

معادله خط قائم:

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$$

مثال: معادلات صفحه مماس و خط قائم بر رویه $z = \sin(xy)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{3}$ ، $y = -1$

$z - \sin(xy) = 0$

و z را بنویسید. $z = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

معادله صفحه $\rightarrow \left(\frac{\pi}{3}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\vec{\nabla f} = (y\cos xy, -x\cos xy, 1)\Big|_{\left(\frac{\pi}{3}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{6}, 1\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \left(-\frac{\pi}{6}(y+1)\right) + \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

معادله خط:

$$\frac{x - \frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{y+1}{-\frac{\pi}{6}} = \frac{z + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1}$$

معادله‌ی صفحه‌ی قائم و خط مماس بر تقاطع دو سطح:

فرض کنیم دو سطح به معادلات $f(x,y,z) = 0$ و $g(x,y,z) = 0$ داده شده باشد. بردار مماس بر تقاطع دو سطح به معادلات f و g در راستای برداری است که بر بردارهای $\vec{\nabla f}$ و $\vec{\nabla g}$ عمود است. پس بنابر تعریف ضرب خارجی می‌توان بردار $\vec{V} = \vec{\nabla f} \times \vec{\nabla g}$

در مثال صفحه قائم و خط مماس در فصل مشترک دو سطح را بدست آورید.

مثال: معادله صفحه قائم و خط مماس بر منحنی فصل مشترک دو سطح

$$\begin{cases} f: 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 49 \\ g: x^2 + y^2 - 2z^2 = 10 \end{cases}$$

در نقطه $(3,-3,2)$ به دست آورید.

$$\vec{\nabla} g = (2x, 2y, -4z)\Big|_{(3,-3,2)} = (6,-6,-8)$$

$$\vec{\nabla} f = (6x, 4y, 2z)\Big|_{(3,-3,2)} = (18,-12,4)$$

$$\vec{V} = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 18 & -12 & 4 \\ 6 & -6 & -8 \end{vmatrix} = (96+24, -(-144-24), -108+72)$$

$$\vec{V} = (120, -120, -36)$$

صفحه‌ی قائم: $120(x-3) - 120(y+3) - 36(z-2) = 0$

خط مماس: $\dfrac{x-3}{120} = \dfrac{y+3}{-120} = \dfrac{z-2}{-36}$

مثال: معادله صفحه قائم و خط مماس بر منحنی $\begin{cases} f: & xy + xz = 3 \\ g: & x^2 + yz + z^2 = 4 \end{cases}$ در نقطه‌ی $(1,2,1)$

$$\vec{\nabla} g = (2x, z, 2z+y)\Big|_{(1,2,1)} = (2,1,4)$$

$$\vec{\nabla} f = (y+z, x, x)\Big|_{(1,2,1)} = (3,1,1)$$

$$\vec{V}=\vec{\nabla} f\times\vec{\nabla} g=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\left(1-4\,,\,-(2-12)\,,\,2-3\right)$$

$$=(-3,10,-1)$$

صفحه قائم ، $-3(x-1)+10(y-2)-1(z-1)=0$

خط مماس ، $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{10}=\dfrac{z-1}{-1}$

تمرین ۱: معادله صفحه قائم، خط مماس بر خم فصل مشترک $\begin{cases} x+z-4=0 \\ x^2+y^2-2=0 \end{cases}$ در نقطه

(۳و۱و۱) را بیابید.

تمرین ۲: معادله صفحه قائم و خط مماس بر خم فصل مشترک $\begin{cases} z=x^2+y^2 \text{ :مخروط} \\ x^2+y^2=4 \text{ :استوانه} \end{cases}$

در نقطه (4 و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$) را بیابید.

تمرین ۳: معادله خط مماس بر فصل مشترک سطح $x^2+y^2+z^2=9$ با صفحه $y=2$

را در نقطه (۲و۲و۱) بیابید. $y=2 \rightarrow \vec{\nabla} g=(0,1,0)$

تمرین ۱: معادله صفحه قائم و خط مماس بر خم فصل مشترک $\begin{cases} f: x+z-4=0 \\ g: x^2+y^2-2=0 \end{cases}$ در نقطه ی

(۳و۱و۱) بیابید.

$\vec{\nabla f} = (1, 0, 1)$ $\qquad \vec{\nabla g} = (2x, 2y, 0)\Big|_{(1,1,2)} = (2, 2, 0)$

$$\vec{V} = \vec{\nabla f} \times \vec{\nabla g} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \left((0-2)i, -(2-0)j, (0-2)k\right)$$

$= (-2i, -2j, -2k)$

صفحه قائم: $-2(x-1) + (-2(y-1)) + (-2(z-2)) = 0$

خط عامل: $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{-2}$

تمرین ۲: معادله صفحه‌ی قائم و خط مماس بر خم فصل مشترک $\begin{cases} f: z = x^2 + y^2 \\ g: x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$ بیابید.

$\vec{\nabla f} = (-2x, -2y, 1)\Big|_{(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)} = (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 1)$

$\vec{\nabla g} = (2x, 2y, 0)\Big|_{(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$

$$\vec{V} = \vec{\nabla f} \times \vec{\nabla g} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{vmatrix} -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 1 \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \left((0-2\sqrt{2})i, -(0-2\sqrt{2})j + \right.$$

$(-8+8)k) = (-2\sqrt{2}\,i, +2\sqrt{2}\,j, 0k)$

معادله صفحه قائم: $-2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+2\sqrt{2}(y-\sqrt{2})+0(z-4)=0$

معادله خط مماس: $\dfrac{x-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}=\dfrac{y-\sqrt{2}}{+2\sqrt{2}}$

تمرین: معادله خط مماس بر فصل مشترک سطح $f: x^2+y^2+z^2=9$ با صفحه $g: y=2$ را در نقطه $(1,2,2)$ بیابید.

$$\vec{\nabla} f=(2x,2y,2z)\Big|_{(1,2,2)}=(2,4,4)$$

$$\vec{\nabla} g=(0,1,0)$$

$$\vec{V}=\vec{\nabla} f\times\vec{\nabla} g=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\big((0-4)i-(0-0)j+(2-0)k\big)$$

$$(-4i,0j,2k)$$

معادله صفحه قائم: $-4(x-1)+0(y-2)+2(z-2)$ –

معادله خط مماس: $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{z-2}{2}$

مثال: معادلات صفحه های مماس بر رویه $x^2+2y^2+3z^2=11$ را طوری بیابید که موازی صفحه $x+y+z=1$ باشد:

$f: x^2+2y^2+3z^2=11$

بردار نرمال صفحه های مماس $\vec{\nabla f}=(2x,4y,6z)$

چون صفحات موازی اند پس بردار نرمال آنها نیز موازی اند.

$x+y+z=1$ بردار نرمال : $(1,1,1)$

از موازی بودن بردارهای $(6z, 4y, 2x)$ و بردار $(1,1,1)$ داریم:

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{1}=\frac{6z}{1} \rightarrow \boxed{x=2y=3z}$$

برای پیدا کردن یک نقطه از صفحه مماس بر سطح ، نقطه بالا را در سطح داده شده جایگذاری می کنیم.

$x^2+2y^2+3z^2=11$

$$(2y)^2+2y^2+3\left(\frac{2}{3}y\right)^2=11 \Rightarrow 4y^2+2y^2+\frac{4}{3}y^2=11$$

$$\frac{22}{3}y^2=11 \rightarrow y^2=\frac{33}{22}=\frac{3}{2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x=2y=3z \begin{cases} \rightarrow y=\sqrt{\frac{3}{2}},\ x=2\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6},\ z=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & (1) \\ \rightarrow y=-\sqrt{\frac{3}{2}},\ x=-\sqrt{6},\ z=-\sqrt{\frac{2}{3}} & (2) \end{cases}$$

① → $\left(\sqrt{6}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$\vec{\nabla} f \ (2x, 4y, 6z) \longrightarrow \left(2\sqrt{6}, 4\sqrt{\frac{3}{2}}, 6\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

بردار نرمال صفحه

معادله صفحه: $2\sqrt{6}(x-\sqrt{6}) + 4\sqrt{\frac{3}{2}}\left(y-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 6\sqrt{\frac{2}{3}}\left(z-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 0$

② → $\left(-\sqrt{6}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$-2\sqrt{6}(x+\sqrt{6}) - 4\sqrt{\frac{3}{2}}\left(y+\sqrt{\frac{3}{2}}\right) - 6\sqrt{\frac{2}{3}}\left(z+\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 0$

تمرین: معادله صفحه مماس بر رویه $x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ را موازی صفحه $x+y-z=0$ به دست آورید.

$\vec{\nabla} f = (2x, y, 2z)$

چون دو صفحه مماس اند پس بردار نرمال یکسان دارند

دو صفحه موازی اند پس بردار نرمال آنها هم موازی است

$x+y-z=0$ ، بردار نرمال $(1, 1, -1)$

پس:

$\frac{2x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{2z}{-1} \longrightarrow 2x = y = -2z$

$x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1 \longrightarrow \frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1 \longrightarrow \frac{5y^2}{4} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{5}$

$\longrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{\sqrt{5}}, \ x = \frac{1}{\sqrt{5}}, \ z = \frac{-1}{\sqrt{5}} & ① \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \ x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \ z = \frac{1}{\sqrt{5}} & ① \end{cases}$

① $\rightarrow \vec{\nabla} f = (2x, y, 2z)\Big|_{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

معادله صفحه مماس: $\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{2}{\sqrt{5}}\left(y-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\frac{2}{\sqrt{5}}\left(z+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

معادله خط مماس: $\dfrac{x-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \dfrac{y-\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \dfrac{z+\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}}$

② $\rightarrow \vec{\nabla} f\, (2x, y, 2z)\Big|_{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

معادله صفحه مماس: $-\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\frac{2}{\sqrt{5}}\left(y+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{2}{\sqrt{5}}\left(z-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

معادله خط مماس: $\dfrac{x+\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = \dfrac{y+\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = \dfrac{z-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}$

ماکزیمم و می نیموم نسبی :

گوییم تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0, y_0) دارای ماکزیمم نسبی است هرگاه:

$f(x_0, y_0) \geqslant f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

و به طور مشابه (x_0, y_0) را می نیموم نسبی تابع $f(x,y)$ گوییم هرگاه داشته باشیم

$$f(x_0, y_0) \leq f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$$

شرط لازم برای وجود اکسترمم های نسبی :
max, min

شرط لازم برای آن که تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0, y_0) دارای اکسترمم های نسبی

باشد آن است که $f_x(x_0, y_0)=0$ مشتق f نسبت به x

$f_y(x_0, y_0)=0$ مشتق f نسبت به y

به نقطه‌ی (x_0, y_0) نقطه‌ی بحرانی می گوییم .

قضیه (آزمون مشتق دوم) :

$f_{xy} = f_{yx}$

فرض کنید تابع $f(x,y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد در این

صورت قرار می دهیم

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

۱- اگر $\Delta > 0$ داشته باشیم $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ و $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ آن گاه نقطه‌ی

(x_0, y_0) را می نیموم نسبی گوییم و در صورتی که داشته باشیم $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$

و $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ آنگاه نقطه (x_0,y_0) را ماکزیمم نسبی گوییم.

۲- اگر $\Delta<0$ باشد نقطه (x_0,y_0) نقطه زینی گفته می‌شود.

۳- اگر $\Delta=0$ باشد از این آزمون برای پیدا کردن اکسترمم های نسبی نمی‌توان استفاده کرد.

تعریف نقطه زینی: نقطه‌ی زینی به نقطه‌ای گفته می‌شود که اگر از این نقطه یک صفحه مماس بر سطح داده شده رسم کنیم بخشی از سطح مورد نظر بالای صفحه مماس و بخشی از آن پایین صفحه مماس قرار گیرد.

مثال: اکسترمم و نقاط زینی توابع داده شده را در صورت وجود بیابید.

1- $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

مرحله اول: پیدا کردن نقاط بحرانی

$f_x=0 \to 3x^2-3=0 \to x^2=1 \to x=\pm 1$

۴ عدد نقطه بحرانی

$f_y=0 \to 3y^2-12=0 \to y^2=4 \to y=\pm 2$

نقاط بحرانی عبارتند از: $(1,2)$ ، $(-1,2)$ و $(1,-2)$ و $(-1,-2)$

مرحله دوم: استفاده از آزمون مشتق دوم.

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx}=6x \\ f_{yy}=6y \\ f_{xy}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$$

مرحله سوم: تعیین اکسترمم نسبی از روی علامت Δ در نقاط بحرانی:

$$\xrightarrow{(1,2)} \Delta = 36\times1\times2>0 \begin{cases} \rightarrow f_{xx}(1,2)=6>0 \\ \rightarrow f_{yy}(1,2)=12>0 \end{cases} \rightarrow (1,2)$$ مینیمم نسبی

$$\xrightarrow{(1,-2)} \Delta = 36\times1\times(-2)<0 \longrightarrow$$ $(1,-2)$ نقطه زینی

$$\xrightarrow{(-1,2)} \Delta = 36\times(-1)\times2<0 \longrightarrow$$ $(-1,2)$ نقطه زینی

$$\xrightarrow{(-1,-2)} \Delta = 36(-1)(-2)>0 \begin{cases} \rightarrow f_{xx}(-1,-2)=-6 \\ \rightarrow f_{yy}(-1,-2)=-12 \end{cases} \rightarrow$$ $(-1,-2)$ ماکزیمم نسبی

۲- $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$

مرحله اول: تعیین نقاط بحرانی

$$f_x=0 \rightarrow 4x^3-4y=0 \rightarrow 4x^3=4y \Rightarrow \boxed{y=x^3}$$

$$f_y=0 \rightarrow 4y^3-4x=0 \xrightarrow{y=x^3} 4x^9-4x=0 \Rightarrow 4x(x^8-1)=0$$

$$\rightarrow 4x=0 \rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}$$ یا $$x^8-1=0 \Rightarrow x^8=1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=\pm1 \\ y=\pm1 \end{array}$$

نقاط بحرانی $(0,0)$ ، $(1,1)$ ، $(-1,-1)$

مرحله دوم: آزمون مشتق مرتبه دوم

$$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= 12x^2 \\ f_{yy} &= 12y^2 \\ f_{xy} &= -4 \end{aligned}\right\} \to \Delta = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16$$

$(0,0) \to \Delta = -16 < 0 \to$ (۰,۰) نقطه زینی

$(1,1) \to \Delta = 128 > 0 \to \begin{cases} f_{xx}(1,1) = 12 > 0 \\ f_{yy}(1,1) = 12 > 0 \end{cases} \to$ (۱,۱) می‌نیموم نسبی

$(-1,-1) \to \Delta = 128 > 0 \to \begin{cases} f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0 \\ f_{yy}(-1,-1) = 12 > 0 \end{cases} \to$ (۱-,۱-) می‌نیموم نسبی

۳۳، ۱۰، ۲۹ : $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

مرحله اول:

$f_x = 0 \to 2x - 4y = 0 \to \underline{x = 2y}$

$f_y = 0 \to -4x + 3y^2 + 4 = 0 \xrightarrow{x=2y} -8y + 3y^2 + 4 = 0$

$\Delta = 64 - 48 = 16 \qquad y = \dfrac{8 \pm 4}{6} \to \begin{cases} y_1 = 2 \to x = 4 \\ y_2 = \dfrac{2}{3} \to x = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

مرحله دوم:

$$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= 2 \\ f_{yy} &= 6y \\ f_{xy} &= -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y \end{vmatrix} = 12y - 16$$

$(۴,۲) \rightarrow \Delta = ۲۴ - ۱۶ > ۰ \rightarrow f_{xx}(۴,۲) = ۲ > ۰$

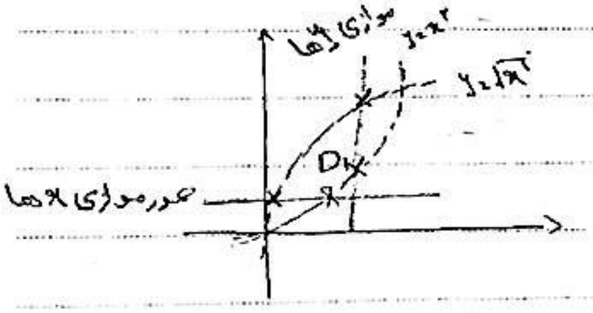
$\rightarrow f_{yy}(۴,۲) = ۱۲ > ۰ \rightarrow$ min

$(\frac{۴}{۳}, \frac{۲}{۳}) \rightarrow \Delta = ۸ - ۱۶ < ۰ \rightarrow$ زینی

فصل دوم: انتگرال دوگانه

در این فصل قصد داریم انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dA$ را محاسبه کنیم که $f(x,y)$ تابعی پیوسته روی ناحیه D، و D ناحیه‌ای منظم نسبت به محور xها یا yها باشد.

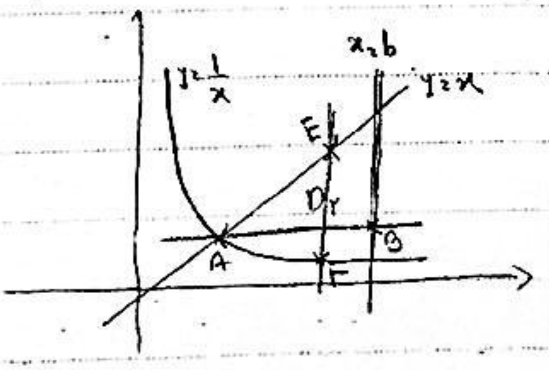
تعریف ناحیه منظم: ناحیه D را نسبت به محور xها منظم گوییم هرگاه هر خطی به موازات محور xها رسم کنیم به طوری که از درون ناحیه بگذرد، مرز ناحیه D را حداکثر در دو نقطه قطع کند (دو نقطه مربوط به دو تابع باشد نه بیشتر)



به طور مثال ناحیه D_1 در شکل

نسبت به محور xها و yها منظم می‌باشد.

به طور مثال ناحیه D_2 در شکل زیر،



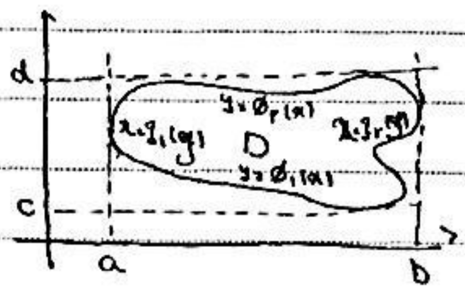
نسبت به محور xها نامنظم و yها منظم می‌باشد:

زیرا نقاط A و B مربوط به سه تابع می‌باشند
دو تابع.

زیرا دو نقطه E و F مربوط به دو تابع هستند.

انتگرال مکرر دوگانه: فرض کنید تابع $f(x,y)$ روی D پیوسته باشد و ناحیه D منظم

نسبت به محور xها و yها فرض شود، در این صورت می‌توان نوشت:



$$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ \phi_1(x)\leqslant y\leqslant \phi_2(x)\}$$

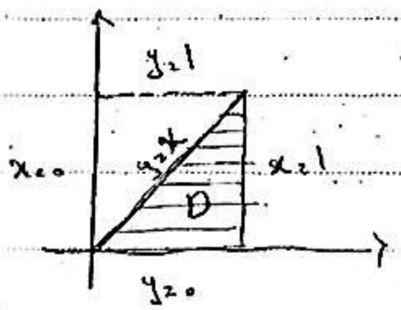
$$I_D=\int_{x=a}^{b}\int_{y=\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

یا می‌توان قرار داد

$$D=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d,\ g_1(y)\leqslant x\leqslant g_2(y)\}$$

$$I_D=\int_{y=c}^{d}\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال: فرض کنید تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ و ناحیه D طبق شکل مشخص شده باشد، مطلوب است محاسبه‌ی I_D.



ناحیه‌ی D نسبت به محور xها و yها منتظم است

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x\}$$

$$I_D=\int_0^1\boxed{\int_{y=0}^{y=x}(x^2+y^2)\,dy}\,dx=\int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{y=x}dx$$

$$=\int_0^1\Big(\underbrace{x^3+\frac{x^3}{3}}_{\frac{4}{3}x^3}\Big)dx=\frac{4}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{3}(1^4-0^4)$$

یا:

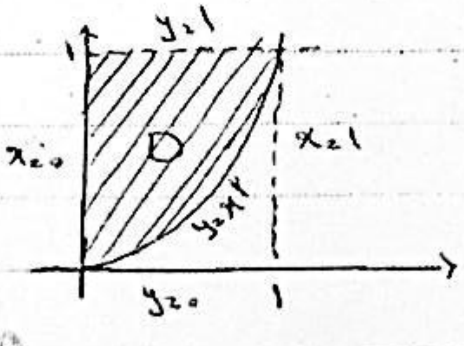
$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,\ y\leqslant x\leqslant 1\}$$

$$I_D=\int_0^1\boxed{\int_{x=y}^{x=1}(x^2+y^2)\,dx}\,dy=\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{x=y}^{1}dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}+y^2\right)-\Big(\underbrace{\frac{y^3}{3}+y^3}_{\frac{4}{3}y^3}\Big)\,dy$$

$$\Rightarrow I_D=\left[\frac{1}{3}y+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

مثال ۱۰: ناحیه D را در شکل مشخص کنید.

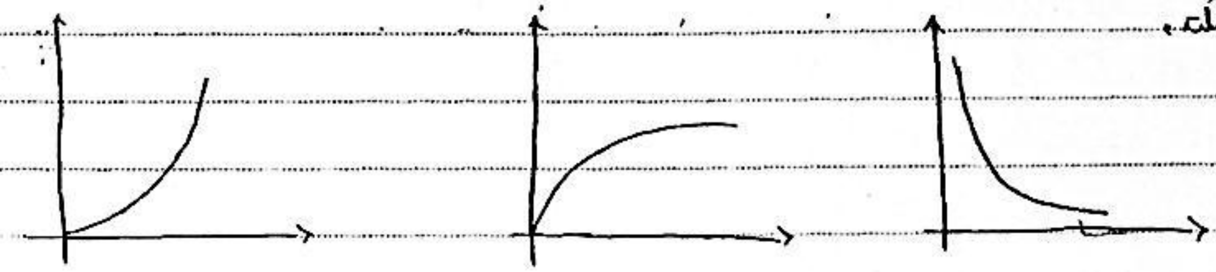


ناحیه D نسبت به محور xها و yها منتظم می باشد.

$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \,,\, x^2 \le y \le 1\}$

نکته: در محاسبه‌ی انتگرال دوگانه کران های انتگرال بیرونی همیشه باید عدد باشد.

نکته:



$y = x^{n \ge 1}$ $\qquad$ $y = x^{n<1}$ $\qquad$ $y = \frac{1}{x}$

مثال: انتگرال $\int_2^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy$ را محاسبه کنید.

$$\int_2^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy = \int_2^4 \left[\frac{-1}{x+y}\right]_1^2 dy =$$

$$\int_2^4 \left(\frac{-1}{2+y}\right) - \left(\frac{-1}{1+y}\right) dy = \Big[-\ln(2+y) + \ln(1+y)\Big]_2^4$$

$$= -\ln 6 + \ln 5 + \ln 4 - \ln 3 = -\ln 18 + \ln 20 = \ln\frac{20}{18} = \ln\frac{10}{9}$$

مثال: حاصل انتگرال زیر را به دست آورید.

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \int_0^y 2x(x^2+y^2)^{1/2}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^y dy$$

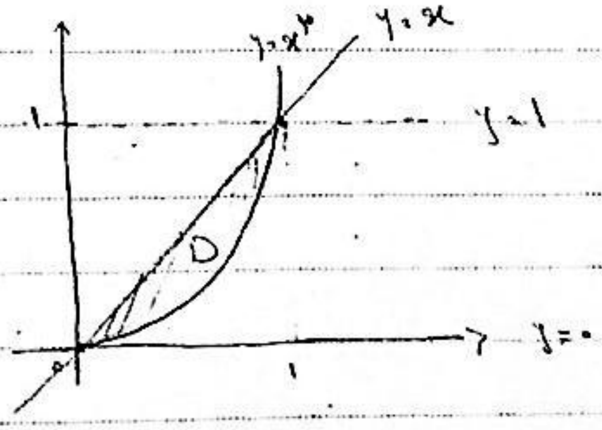
$$= \int_0^1 \left(\frac{(2y^2)^{3/2}}{3} \right) - \left(\frac{(y^2)^{3/2}}{3} \right) dy$$

$$= \left[\frac{2^{3/2}}{3} \frac{y^4}{4} - \frac{1}{3} \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{12}$$

مثال: انتگرال های زیر را با تعویض ترتیب انتگرال گیری حل کنید.

$$\int_0^1 \int_{x=\sqrt{y}}^{x=y} \frac{x}{y \ln x} \, dx \, dy$$

$x=\sqrt{y} \Rightarrow y=x^2$



$$D = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \,,\, x^2 \leq y \leq x \}$$

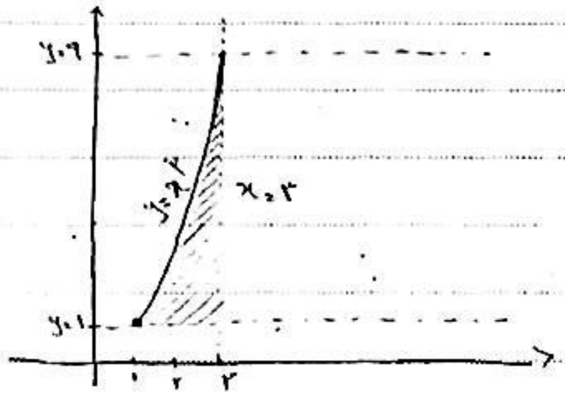
$$I_D = \int_0^1 \int_{y=x^2}^{y=x} \frac{x}{y \ln x} \, dy \, dx$$

$$\int_0^1 \left[\frac{x}{\ln x}\ln y\right]_{x^3}^{x} dx = \int_0^1 x - \frac{x}{\cancel{\ln x}}\cancel{\ln x^3}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 3\,\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

مثال . انتگرال دوگانه زیر را محاسبه کنید .

$$\int_1^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\, dx\, dy$$



$$D = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 3,\ 1 \leqslant y \leqslant x^2\}$$

$$I_D = \int_1^3 \int_1^{x^2} \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\, dy\, dx$$

$$= \int_1^3 \left[\frac{e^{x^2-2x}}{x+1} \times y\right]_1^{x^2} dx = \int_1^3 \frac{x^2 e^{x^2-2x}}{x+1} - \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\, dx$$

$$\int_1^3 \frac{\overset{(x-1)(x+1)}{(x^2-1)}\, e^{x^2-2x}}{x+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^3 (2x-2)\, e^{x^2-2x}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{x^2-2x}\right]_0^3 = \frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{2}$$

تمرین:

۱) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 y^2 \sin(xy)\, dy\, dx$

۲) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)\, dy\, dx$

۳) $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\, dx}{y^4+1}$

۴) $\displaystyle\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 y\, e^{(x-1)^2}\, dx\, dy$

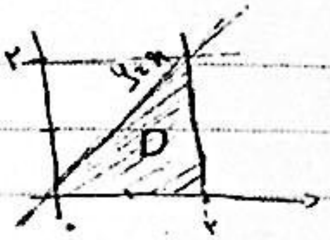
۵- حاصل انتگرال $\displaystyle\iint_R e^{x^3+y^3}\, dA$ را که در آن R ناحیه محدود به منحنی های $x = 3y^2$

، $x = y^2$ ، $x^2 = y$ ، $x^2 = 2y$ را بدست آورید.

۶) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{9-x^2} \frac{x^3 e^y}{9-y}\, dy\, dx$

۷) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$

1) $\int_0^2 \int_x^2 y^2 \sin(xy)\, dy\, dx$



$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 2 ,\ 0 \le x \le y\}$

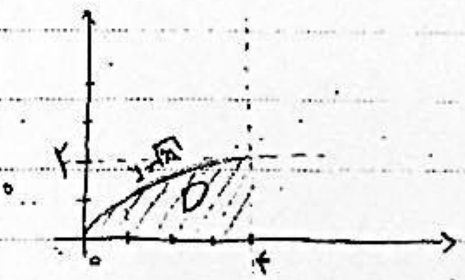
$I_D = \int_0^2 \int_0^y y^2 \sin(xy)\, dx\, dy$

$\int_0^2 \left[-y\cos(xy)\right]_0^y dy = \int_0^2 \left(-y\cos y^2 + y\right) dy$

$-\frac{1}{2}\int_0^2 2y\cos y^2\, dy + \int_0^2 y\, dy = \left[-\frac{1}{2}\sin y^2 + \frac{y^2}{2}\right]_0^2$

$-\frac{1}{2}\sin 4 + 2 + 0 - 0 = -\frac{1}{2}\sin 4 + 2$

2) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)\, dy\, dx =$



$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 2 ,\ 0 \le x \le y^2\}$

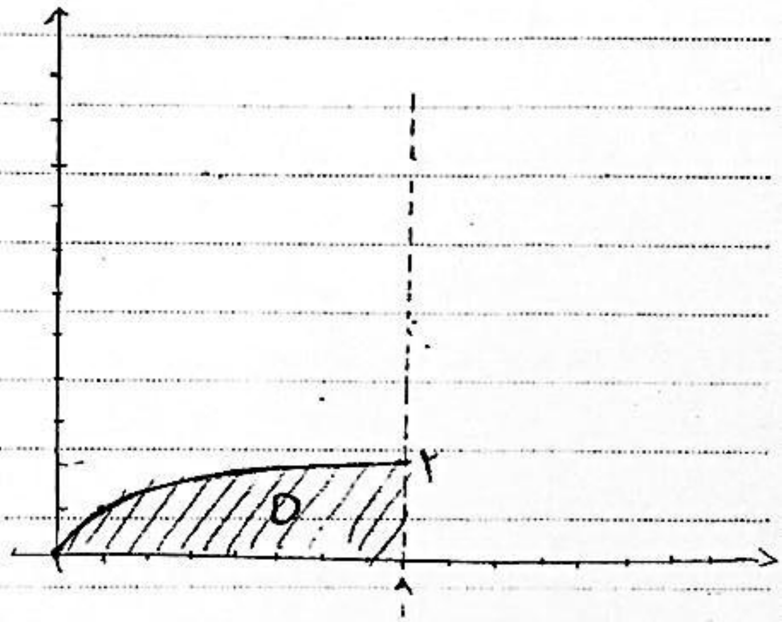
$I_D = \int_0^2 \int_0^{y^2} \cos y^2\, dx\, dy$

$$\int_0^2 \int_0^{y^2} \cos y^3 \, dx\, dy \longrightarrow \int_0^2 \left[x \cos y^3\right]_0^{y^2} dy$$

$$\frac{1}{3}\int_0^2 3y^2 \cos y^3 \, dy = \frac{1}{3}\left[\sin y^3\right]_0^2 = \frac{1}{3}\sin 8 - 0$$

$$= \frac{1}{3}\sin 8$$

۳) $$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dy\, dx}{y^4+1}$$



$$D = \left\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq y^3\right\}$$

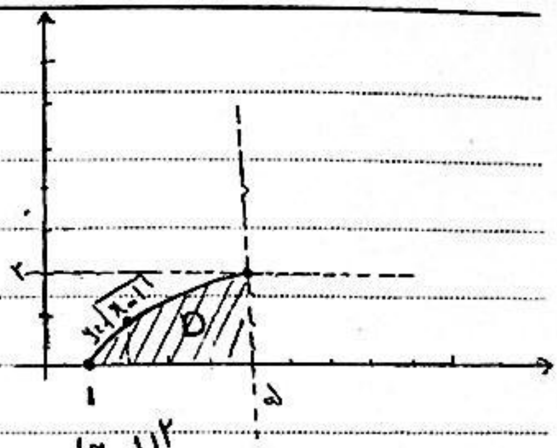
$$\int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dx\, dy$$

$$\longrightarrow \int_0^2 \left[\frac{x}{y^4+1}\right]_0^{y^3} dx\, dy = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{4y^3}{y^4+1}\, dy = \frac{1}{4}\left[\ln(y^4+1)\right]_0^2$$

$$\frac{1}{4}\left[\ln 17 - \cancel{\ln 1}\right] = \frac{1}{4}\ln 17$$

۴) $$\int_0^2 \int_{1+y^2}^{5} y\, e^{(x-1)^2}\, dx\, dy$$

$$D = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 5 ,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x-1}\}$$



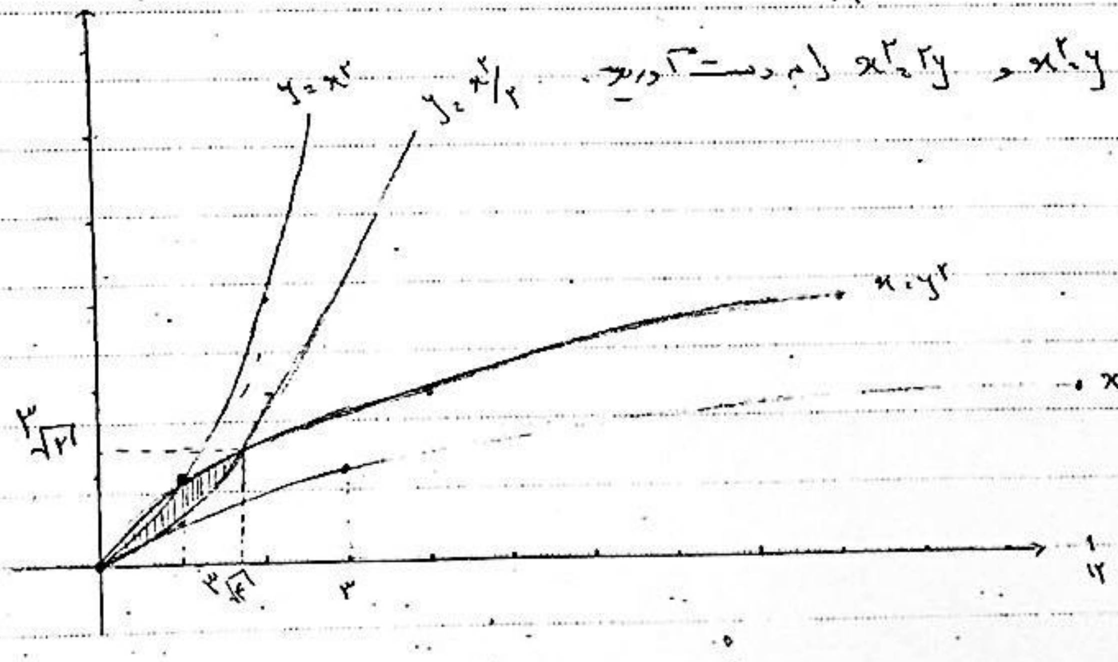
$$I_D = \int_1^5 \int_0^{\sqrt{x-1}} y e^{(x-1)^2}\, dy\, dx$$

$$\int_1^5 \left[\tfrac{1}{2} \cdot y^2 \cdot e^{(x-1)^2}\right]_0^{\sqrt{x-1}} dx = \tfrac{1}{4}\int_1^5 2(x-1)\, e^{(x-1)^2}\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{4} e^{(x-1)^2}\right]_1^5 = \tfrac{1}{4} e^{16} - \tfrac{1}{4}$$

۵ـ حاصل انتگرال $\iint_R e^{x^2/y^4}\, dA$ را که در آن R ناحیه‌ی محدود به منحنی های $x=3y^2$ و

$x=y^2$ و $x^2=y$ و $x^2=2y$ را بدست آورید.

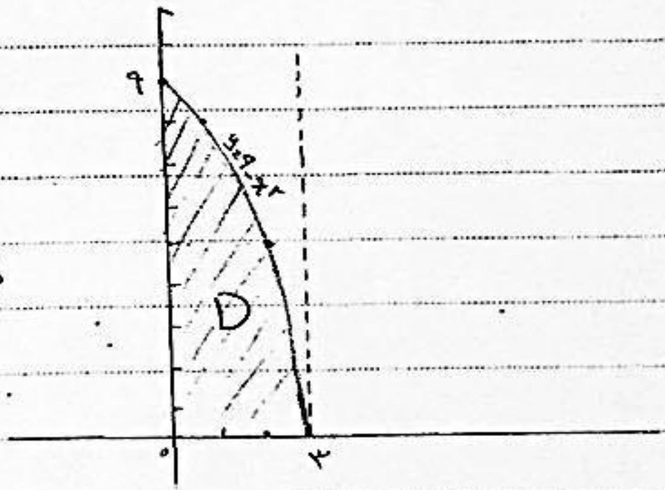


$$\frac{x^2}{2} = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^4 = 4x \Rightarrow x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

$$y = x^2/2 \xrightarrow{x=\sqrt[3]{4}} y = \frac{\sqrt[3]{16}}{2} = \sqrt[3]{2}$$

$\int_{0}^{3\sqrt{2}}$

۴۱) $$\int_{0}^{3}\int_{0}^{9-x^2} \frac{x^3 e^y}{9-y}\, dy\, dx$$



$$D = \left\{ (x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 9 \ , \ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{9-y} \right\}$$

$$I_D = \int_{0}^{9}\int_{0}^{\sqrt{9-y}} \frac{x^3 e^y}{9-y}\, dx\, dy$$

$$\int_{0}^{9} \left[\frac{1}{4} \frac{e^y}{9-y} x^4 \right]_{0}^{\sqrt{9-y}} dy = \int_{0}^{9} \frac{1}{4} \frac{e^y (9-y)^{\cancel{2}}}{\cancel{(9-y)}}\, dy$$

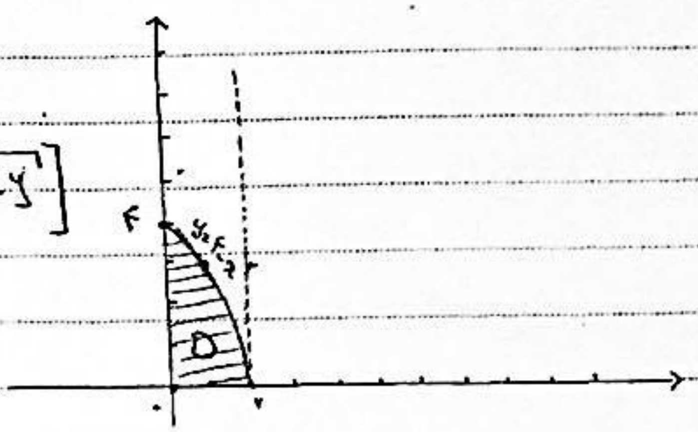
$$\int_{0}^{9} \frac{9}{4} e^y - \frac{1}{4} \underline{y e^y}\, dy = \left[\frac{9}{4} e^y - \frac{1}{4} y e^y + \frac{1}{4} e^y \right]_{0}^{9}$$

جزء به جزء یا جدولی

$$\frac{10}{4} e^9 - \frac{9}{4} e^9 - \frac{10}{4} e^0 + \frac{1}{4} \times 0 \times e^0 = \frac{1}{4} e^9 - \frac{10}{4}$$

PAPCO

$$V_1 \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$$



$$D = \left[(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4 \,,\, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y} \right]$$

$$I_D = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x e^{2y}}{4-y}\, dx\, dy$$

$$\int_0^4 \left[\frac{1}{2} \frac{e^{2y}}{4-y} x^2 \right]_0^{\sqrt{4-y}} dy = \int_0^4 \frac{1}{2} e^{2y}\, dy$$

$$= \left[\frac{1}{4} e^{2y} \right]_0^4 = \frac{1}{4} e^8 - \frac{1}{4}$$

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

اگر داشته باشیم $x = g(u,v)$ و $y = h(u,v)$ آن گاه انتگرال دوگانه تابع $f(x,y)$

نسبت به متغیرهای u و v به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$\underset{\substack{D \\ (x,y)\ \text{صفحه}}}{\iint} f(x,y)\, dA = \underset{\substack{D' \\ (u,v)\ \text{صفحه}}}{\iint} f(g(u,v), h(u,v)) \left| \overset{\text{ژاکوبین}}{J} \right| du\, dv$$

$$|J| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{|J|}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

مثال، د، ۱۱، ۸۸ – حاصل انتگرال $\iint_R e^{\frac{(x^3+y^3)}{xy}}\,dA$ که در آن R ناحیه‌ی محدود به منحنی های $x=3y^2$ ، $x=y^2$ ، $x^2=y$ ، $x^2=2y$ است محاسبه کنید.

$$\iint_R e^{\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}}\,dA \qquad \frac{1}{|J|}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix}=1-4=-3$$

$$\longrightarrow |J|=-\tfrac{1}{3}$$

$$x=3y^2 \longrightarrow \frac{y^2}{x}=\tfrac{1}{3}$$

$$\longrightarrow u=\frac{y^2}{x} \longrightarrow \tfrac{1}{3}\leq u\leq 1$$

$$x=y^2 \longrightarrow \frac{y^2}{x}=1$$

$$v=\frac{x^2}{y} \xrightarrow{1\leq x^2/y\leq 2} 1\leq v\leq 2$$

$$\int_{u=1/3}^{1}\int_{v=1}^{2} -\tfrac{1}{3}e^{v+u}\,dv\,du=-\tfrac{1}{3}\int_{1/3}^{1} e^u\left[e^v\right]_1^2 du=-\tfrac{1}{3}\int_{1/3}^{1} e^u\overbrace{(e^2-e^1)}^{\text{عدد}}\,du$$

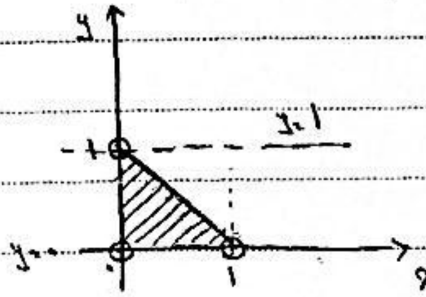
$$-\tfrac{1}{3}(e^2-e)\left[e^u\right]_{1/3}^{1}=(e^2-e)(e-e^{1/3})\times -\tfrac{1}{3}$$

مثال، ۲۹، ۱۰، ۹۳، انتگرال زیر را حل کنید

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=1-y} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\,dy$$

نسبت به x حل می‌شود و بعد y بین تغییر می‌کند

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$



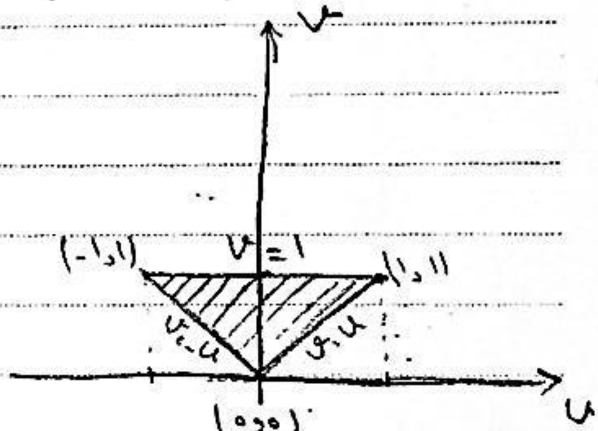
برای بردن به دستگاه u.v سه رأس مثلث را انتقال می‌دهیم.

(x,y) $\qquad$ (u,v)

$(0,0) \longrightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases} \longrightarrow (0,0)$

$(1,0) \longrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases} \longrightarrow (1,1)$

$(0,1) \longrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=1 \end{cases} \longrightarrow (-1,1)$



$$\frac{1}{|J|} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$\int_{v=0}^{1}\int_{u=-v}^{u=v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \frac{1}{2}\, du\, dv$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 v\int_{-v}^{v} \frac{1}{v}\cos\left(\frac{u}{v}\right) du\, dv = \frac{1}{2}\int_0^1 v\left[\sin\frac{u}{v}\right]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(v \left(\overset{\sin 1}{\sin\left(\frac{v}{v}\right)} - \overset{\sin -1}{\sin\left(\frac{-v}{v}\right)} \right) \right) dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 v\,(2\sin 1)\,dv = \sin 1 \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\sin 1$$

مثال: $\int_0^2 \int_{y/2}^{\frac{y+4}{2}} y^3 (2x-y)\, e^{(2x-y)^2}\, dx\, dy$ را پس از تغییر متغیر مناسب حل کنید.

$v = y$

$u = 2x - y$

$$\frac{1}{|J|} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$0 \leq y \leq 2 \longrightarrow 0 \leq v \leq 2$

$\frac{y}{2} \leq x \leq \frac{y+4}{2}$

$\xrightarrow{\times 2} y \leq 2x \leq y+4 \xrightarrow{-y} 0 \leq 2x-y \leq 4 \longrightarrow 0 \leq u \leq 4$

$$\int_{u=0}^{u=4}\int_{v=0}^{v=2} v^3\, u\, e^{u^2}\, \frac{1}{2}\, dv\, du =$$

در اینجا انتگرال داخلی ربطی به انتگرال بیرونی

در هر دو حالت $dv\,du$, $du\,dv$ ندارد بنابراین می‌توان انتگرال‌ها

ندارد (چون جواب انتگرال درونی عدد می‌شود و تأثیری در بیرونی ندارد)

از آنجا که کران های انتگرال دوگانه بر حسب u و v عدد هستند و توابع بر حسب u و v جزای باشند پس می توان انتگرال دوگانه را به دو انتگرال یگانه در حال ضرب تبدیل کرد.

$$\frac{1}{2}\int_{u=0}^{u=4} u e^{u^2}\,du \int_{v=0}^{2} v^3\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{u^2}\right]_0^4 \left[\frac{v^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{16}(e^{16}-e^{0})(16-0) = e^{16}-1$$

تمرین:

۱ـ انتگرال زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

$$\iint_D (x^2+y^2)\, e^{x^2-y^2+xy}\, dx\,dy$$

$$D = \left\{(x,y) \,\middle|\, 1 \leqslant x^2-y^2 \leqslant 9 \,,\, 2 \leqslant xy \leqslant 4 \,,\, x,y \geqslant 0\right\}$$

۲ـ مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_D \sqrt{\frac{y}{x^5}} + \sqrt{xy}$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به منحنی های $xy=9$ ، $xy=1$ ، $y=x$ ، $y=4x$ در ربع اول است.

تمرین ۱: انتگرال دوگانه‌ی زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

$$\iint_D (x^2+y^2)\, e^{x^2-y^2+xy} \qquad D=\{(x,y) \mid 1\le \overbrace{x^2-y^2}^{u} \le 9,\ 2\le \overbrace{xy}^{v} \le 4,\ x,y>0\}$$

$$\left|\frac{1}{J}\right| = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} \Rightarrow J = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

$$\iint_D \frac{1}{2} e^{u+v} = \int_1^9\int_2^4 \frac{1}{2} e^{u+v}\, dv\, du = \int_1^9\int_2^4 \frac{1}{2} e^{u} \times e^{v}\, dv\, du$$

$$= \int_1^9 \frac{1}{2} e^{u} \int_2^4 e^{v}\, dv = \int_1^9 \frac{1}{2} e^{u} \Big[e^{v}\Big]_2^4 du = \int_1^9 \frac{1}{2}(e^4-e^2)\, e^{u}\, du$$

$$\frac{1}{2}(e^4-e^2)\Big[e^{u}\Big]_1^9 = \frac{1}{2}(e^4-e^2)(e^9-e)$$

تمرین ۲. مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_D \underbrace{\sqrt{\frac{y}{x}}}_{u} + \underbrace{\sqrt{xy}}_{v}$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $xy=9$ ، $xy=1$ ، $\underset{y/x=1}{y=x}$ ، $\underset{y/x=4}{y=4x}$ در ربع اول است.

$$\left|\frac{1}{J}\right| = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x} \longrightarrow |J| = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2u}$$

$$D=\{(u,v) \mid 1\le u\le 4,\ 1\le v\le 9\}$$

$$\iint_D \left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right) \times \frac{1}{2u} \, dA$$

$$\int_1^4 \frac{1}{2u} \int_1^9 \left(\sqrt{u}+\sqrt{v}\right) dv\, du = \int_1^4 \frac{1}{2u} \left[v\sqrt{u} + \frac{v^{3/2}}{3/2} \right]_1^9 du$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{2u} \left(9\sqrt{u} + \frac{\cancel{27}^{\,9} \times 2}{\cancel{3}} - \sqrt{u} - \frac{2}{3} \right) du$$

$$\int_1^4 \left(\frac{8\sqrt{u}}{2u} + \frac{52}{6u} \right) du = \int_1^4 4u^{-1/2} + \frac{52}{6} u^{-1} \, du$$

$$= 4\int_1^4 u^{-1/2} + \frac{52}{6} \int_1^4 u^{-1} \, du$$

$$= 4\left[\frac{u^{1/2}}{1/2} \right]_1^4 + \frac{52}{6} \left[\ln u \right]_1^4 = 16 - 8 + \frac{52}{6} \ln 4 - 0$$

$$= \boxed{\frac{52}{6} \ln 4 + 8}$$

تغییر متغیر در مختصات قطبی:

با تغییر متغیر $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dA$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

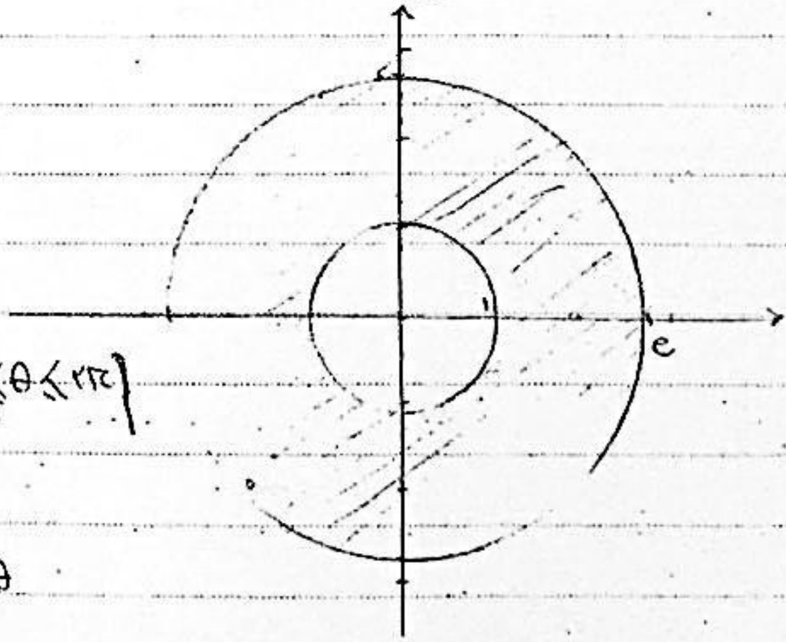
$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|J|\,dr\,d\theta$$

$$|J|=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$|J|=r\cos^2\theta-(-r\sin^2\theta)=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r$$

مثال: اگر ناحیه‌ی D ناحیه‌ی بین $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=e^2$ باشد مطلوب است محاسبه‌ی

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$



$$D':\{(r,\theta)\,|\,1\leqslant r\leqslant e\ ,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{e}\frac{2\ln r}{r^2}\,\overset{|J|}{r}\,dr\,d\theta$$

$$\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} dA\right)\left(\int_{r=1}^{e} 2\,\underbrace{\frac{1}{r}}_{u'}\,\underbrace{\ln r}_{u}\, dr\right)$$

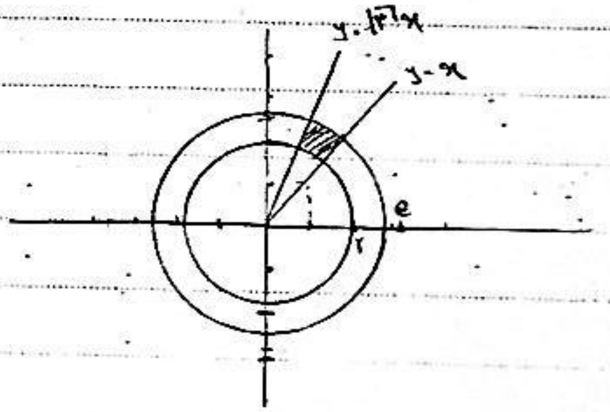
$$= \left[\theta\right]_{0}^{2\pi}\ 2\left[\frac{(\ln r)^2}{2}\right]_{r=1}^{e} = (2\pi-0)\left((\underbrace{\ln e}_{1})^2-(\underbrace{\ln 1}_{0})^2\right) = 2\pi$$

مثال ۲،۱،۴،۹۴: $\iint_D \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\, dA$ را حل کنید که D ناحیه محصور بین دایره‌های $x^2+y^2=4$ ، $x^2+y^2=e^2$ و خطوط $y=x$ ، $y=\sqrt{3}x$ در ربع اول است.

$x=r\cos\theta$

$\longrightarrow \frac{y}{x}=\tan\theta$

$y=r\sin\theta$



$\longrightarrow \frac{y}{x}=1 \longrightarrow \tan\theta=1 \longrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

$\longrightarrow \frac{y}{x}=\sqrt{3} \longrightarrow \tan\theta=\sqrt{3} \longrightarrow \theta=\pi/3$

$$\int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/3}\int_{r=2}^{r=e} \frac{\ln\sqrt{r^2}}{r^{\cancel{2}}}\,\cancel{r}\ dr\,d\theta$$

$$\left(\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\right)\left(\int_{2}^{e} \frac{1}{r}\ln r\, dr\right) = \left[\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/3}\ \left[\frac{(\ln r)^2}{2}\right]_{2}^{e}$$

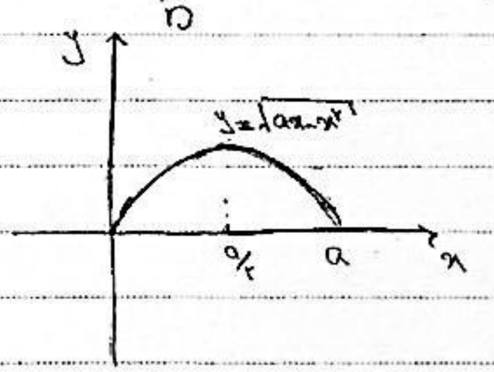
$$\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 2)^2}{2}\right)=\frac{\pi}{24}\left(1-(\ln 2)^2\right)$$

تمرین:

۱- $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\; dy\, dx$ را روی دامنه حل کنید.

$$\begin{cases} 0\leq y\leq \sqrt{a^2-x^2} \rightarrow y^2=a^2-x^2 \rightarrow x^2+y^2=a^2 \\ 0\leq x\leq a \end{cases}$$

۲- $\iint_D y\; dx\, dy$ را روی دامنه $y=\sqrt{ax-x^2}$ به دست آورید.



$$y^2=ax-x^2 \longrightarrow y^2+x^2-ax=0$$

$$y^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$$ دایره به مرکز $(a/2,0)$

$0\leq\theta\leq \pi/2$ در ربع اول

$$y^2=ax-x^2 \longrightarrow x^2+y^2=ax \longrightarrow r^2=ar\cos\theta$$

$$r(r-a\cos\theta)=0 \begin{cases} \rightarrow r=0 \\ \rightarrow r=a\cos\theta \end{cases}$$

$$D=\{(r,\theta)\mid 0\leq r\leq a\cos\theta,\; 0\leq\theta\leq \pi/2\}$$

$$\iint y\, dx\, dy=\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a\cos\theta} r\sin\theta\; \overset{|J|}{r}\; dr\, d\theta$$

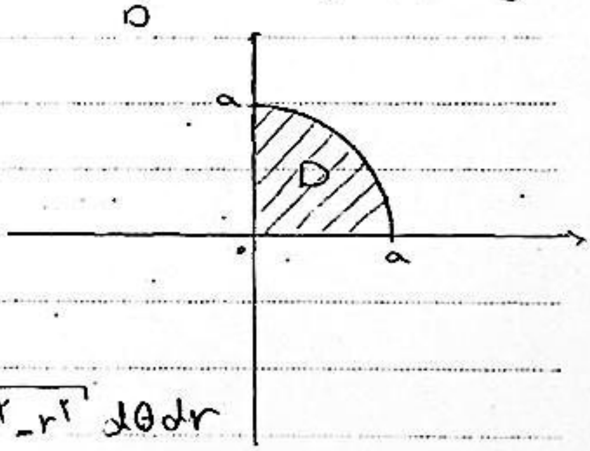
$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{a\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\sin\theta\,(a^3\cos^3\theta)\,d\theta = -\tfrac{1}{3}a^3\int_0^{\pi/2} \underbrace{-\sin\theta}_{u'}\,\underbrace{(\cos\theta)^3}_{u}\,d\theta$$

$$= \frac{-1}{3}a^3\left[\frac{(\cos\theta)^4}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{-1}{3}a^3\left(0-\frac{1}{4}\right) = \frac{a^3}{12}$$

مختصات قطبی
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}$$

تمرین ۱۰: $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx$ را روی ناحیه $\begin{cases} 0\le y\le \sqrt{a^2-x^2} \\ 0\le x\le a \end{cases}$ بیابید



$$y^2 = a^2-x^2 \Rightarrow y^2+x^2=a^2$$

$$D=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le a,\ 0\le\theta\le \pi/2\}$$

$$\iint_D \sqrt{a^2-r^2}\,\cancel{|J|}^{\,r}\,dA = \int_0^a\int_0^{\pi/2} r\sqrt{a^2-r^2}\,d\theta\,dr$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_0^a -2r\sqrt{a^2-r^2}\,\left(\tfrac{\pi}{2}\right)dr = -\tfrac{\pi}{4}\int_0^a \underbrace{-2r}_{u'}\,\underbrace{(a^2-r^2)^{1/2}}_{u}\,dr$$

$$= -\tfrac{\pi}{4}\left[\frac{(a^2-r^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^a = -\tfrac{\pi}{4}\left[0-\frac{2a^3}{3}\right]$$

$$= \frac{32\pi a^4}{12} = \frac{\pi a^4}{4}$$

مثال: مساحت ناحیه‌ی محدود به خم های $\underbrace{xy}_{u}=4$ و $xy=8$ ، $\underbrace{xy^3}_{v}=1$ ، $xy^3=10$

را به دست آورید.

نکته: از کاربرد های انتگرال دوگانه محاسبه‌ی مساحت یک ناحیه در صفحه xoy می باشد که

با فرمول $S=\iint dA$ محاسبه می گردد.

حل مثال:

$$S=\iint dx\,dy = \int_u\int_v |J|\,dv\,du$$

$$u=xy \longrightarrow 4\leqslant u\leqslant 8$$

$$v=xy^3 \longrightarrow 1\leqslant v\leqslant 10$$

$$|J| = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ y^3 & 3xy^2 \end{vmatrix}}$$

$$|J| = \frac{1}{3xy^3 - xy^3} = \frac{1}{2xy^3} = \frac{1}{2v}$$

$$S = \int_{u=4}^{8}\int_{v=1}^{10} \frac{1}{2v}\,dv\,du = \left(\int_{u=4}^{8} du\right)\left(\int_{v=1}^{10} \frac{1}{2v}\,dv\right)$$

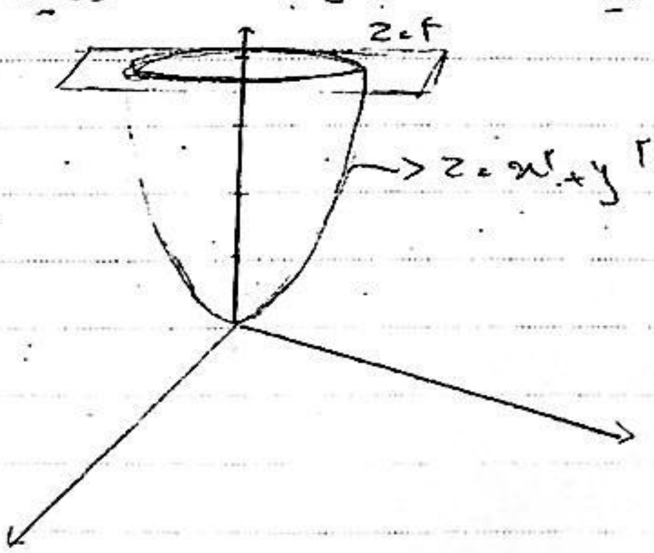
$$[u]_4^8 \left[\frac{1}{2}\ln v\right]_1^{10} = (\cancel{8-4})\,\frac{1}{\cancel{2}}(\ln 10 - \ln 1) = 2\ln 10$$

کاربرد انتگرال دوگانه (مساحت سطح یک ناحیه‌ی غیرمسطح) سطح یا رویه ← فضای سه‌بعدی

سطح S به معادله $z=f(x,y)$ را با حوزه‌ی تعریف D در نظر می‌گیریم. مساحت این سطح را می‌توان روی دامنه D طبق فرمول زیر محاسبه کرد.

$$\text{مساحت} = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA$$

مثال: مساحت سطح $z=x^2+y^2$ واقع در زیر صفحه‌ی $z=4$ را به دست آورید.



$$z = x^2 + y^2 \longrightarrow z_x = 2x$$
$$\searrow z_y = 2y$$

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA$$

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{array}\right\} \longrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

با حذف z از دو طرف دایره‌ها، رابطه‌ی بین x و y را پیدا کردیم.

$$\iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \sqrt{1 + 4r^2}\, \overset{\text{ژاکوبین}}{r}\, dr\, d\theta$$

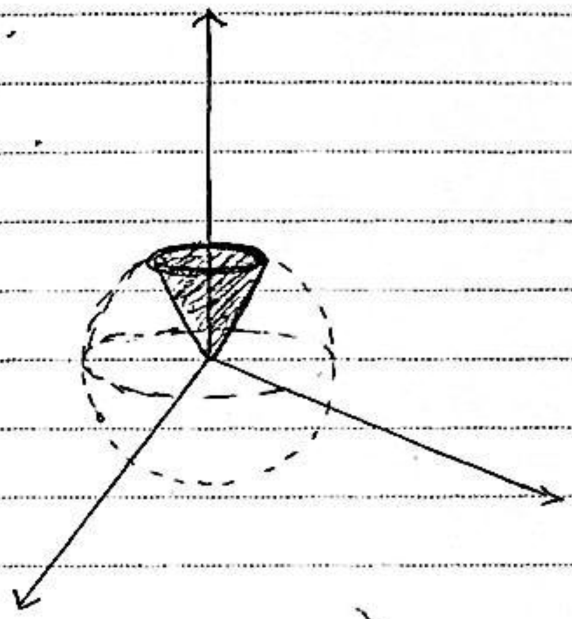
$$\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right)\left(\frac{1}{8}\int_{r=0}^{2} \underbrace{8r}_{u'} \underbrace{(1 + 4r^2)}_{u}^{1/2} dr\right)$$

$$\frac{1}{8}\left[\theta\right]_0^{2\pi}\left[(1 + 4r^2)^{3/2} \times \frac{2}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{8} \times 2\pi \times \frac{2}{3} \times \left(17^{3/2} - 1\right)$$

مثال: مساحتی قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ را بیابید که توسط مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ جدا می‌شود.

$x^2+y^2+z^2=2a^2$



$z^2=2a^2-x^2-y^2$

$z=\pm\sqrt{2a^2-x^2-y^2}$

$z_x=\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{2a^2-x^2-y^2}}$ ①

$z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{2a^2-x^2-y^2}}$ ②

$①,② \longrightarrow 1+z_x^2+z_y^2=1+\dfrac{x^2+y^2}{2a^2-x^2-y^2}=\dfrac{2a^2}{2a^2-x^2-y^2}$

$\text{مساحت}=\iint_D\sqrt{\dfrac{2a^2}{2a^2-(x^2+y^2)}}\,dA$

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2a^2\\ z^2=x^2+y^2\end{cases}\xrightarrow[\text{دو رابطه}]{\text{حذف } z \text{ توسط}} x^2+y^2+x^2+y^2=2a^2 \xrightarrow{\text{دایره}} \boxed{x^2+y^2=a^2}$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\sqrt{2a^2}\times(2a^2-r^2)^{-1/2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(-\frac{\sqrt{2a^2}}{2}\int_0^{a} -2r\left(2a^2-r^2\right)^{-1/2} dr\right)$$

$$= [\theta]_0^{2\pi} \cdot -\frac{\sqrt{2a^2}}{\cancel{2}}\left[\left(2a^2-r^2\right)^{1/2}\times \cancel{2}\right]_0^{a}$$

$$-2\pi\sqrt{2a^2}\,(\overbrace{a-\sqrt{2a^2}}^{(1-\sqrt{2})a}) = -2\sqrt{2}\,(1-\sqrt{2})\,\pi a^2$$

تمرین:

۱- مساحت قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ که به وسیله‌ی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2a^2$ محدود می‌شود.

۲- مساحت قسمتی از کره‌ی $x^2+y^2+z^2=36$ را که در استوانه‌ی $x^2+y^2=9$ واقع است را بیابید.

۳- مخروط $z^2=x^2+y^2$ را با صفحه‌ی $x+y=4$ قطع می‌کنیم. مساحت آن قسمت از رویه‌ی حاصل را که در یک هشتم اول قرار دارد.

$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$

۱- مساحت قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ که به وسیله‌ی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2a^2$ محدود می‌شود را به دست آورید:

$$z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \quad ① \qquad z_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \quad ②$$

$$①,② \rightarrow 1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = \boxed{2}$$

$$\begin{cases} z^2 = 2a^2 - x^2 - y^2 \\ z^2 = x^2+y^2 \end{cases} \rightarrow x^2+y^2 = 2a^2 - x^2 - y^2 \rightarrow \underline{x^2+y^2 = a^2} \rightarrow \text{ناحیه}$$

$$\iint_D \sqrt{2}\, dA \rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} [r^2]_0^a\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2\, d\theta = 2\pi a^2$$

۳_ مساحت قسمتی از کره‌ی $x^2+y^2+z^2=36$ را که در استوانه‌ی $x^2+y^2=9$ واقع است را بیابید.

$$z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$$

$$z_x = \frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2-y^2}} \quad ① \qquad z_y = \frac{-2y}{2\sqrt{36-x^2-y^2}} \quad ②$$

$$①,② \rightarrow 1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + \frac{x^2}{36-x^2-y^2} + \frac{y^2}{36-x^2-y^2}$$

$$= \frac{36}{36-(x^2+y^2)}$$

$x^2+y^2=9=3^2$

$$\iint_D \sqrt{\frac{36}{36-(x^2+y^2)}}\, dA = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{36}{36-9}}\, r\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^3 \sqrt{\frac{4}{3}}\, 2\pi\, r\, dr = \sqrt{4/3}\, 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3 = \sqrt{4/3} \times 9/2 \times 2\pi$$

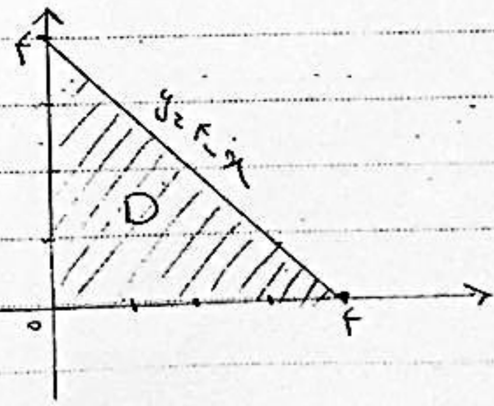
۳ـ مخروط $z^2 = x^2+y^2$ را با صفحه‌ی $x+y=4$ قطع می‌کنیم مساحت آن قسمت از رویه‌ی حاصل را که در یک هشتم اول قرار دارد بیابید.

$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$ جا

$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$

$z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ ① $z_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ ②

①, ② $\rightarrow 1 + z_x^2 + z_y^2 = 1+1 = 2 \rightarrow \sqrt{2}$



$$\iint_D \sqrt{2}\, dA$$

$$\int_{\circ}^{۴}\int_{\circ}^{۴-x} ۲\, dy\, dx = \int_{\circ}^{۴} \left[۲y\right]_{\circ}^{۴-x} dx$$

$$= \int_{\circ}^{۴} \left(۲(۴-x) - \circ\right) dx = \int_{\circ}^{۴} (۸ - ۲x)\, dx$$

$$= \left[۸x\right]_{\circ}^{۴} - \left[x^{۲}\right]_{\circ}^{۴} = ۳۲ - ۱۶ = \underline{۱۶}$$

انتگرال سه گانه:

فرض کنیم S یک ناحیه سه بعدی محدود بین دو صفحه $x=a$ و $x=b$ و دو منحنی $y=\phi_1(x)$ و $y=\phi_2(x)$ و دو رویه ی $z=f_1(x,y)$ و $z=f_2(x,y)$ باشد در این صورت انتگرال سه گانه تابع $f(x,y,z)$ را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$I=\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} dz\,dy\,dx$$

ترتیب انتگرال گیری تابع در رابطه بالا (I) نشان می دهد که S نسبت به محور z ها منظم می باشد.

تعریف: ناحیه S را نسبت به محور z ها منظم گوییم هرگاه خطی به موازات محور z ها را رسم کنید به طوری که از درون ناحیه بگذرد مرز آن را در دو نقطه قطع کند به بیان دیگر ناحیه S را نسبت به محور z ها منظم گوییم هرگاه از بین معادلات محصور کننده که فقط در رابطه از z نسبت به x و y داشته باشیم نه بیشتر. مشابه تعریف داده شده می توان منظم بودن ناحیه نسبت به محور x ها و y ها

را تعریف کرد.

یکی از کاربردهای انتگرال سه گانه محاسبه حجم سطح محصور شده توسط معادلاتی که در مسئله داده می شود.

$$حجم = V = \iiint dV$$

مثال: حجم محصور بین سطح $x = y^2$ و صفحات $z = 0$ و $x + z = 1$ را به کمک انتگرال سه گانه محاسبه کنید.

گام اول: مشخص این که ناحیه بدست آمده نسبت به کدام یک از محورها منظم است.

ناحیه مشخص شده نسبت به محور z ها منظم است زیرا از z نسبت به x و y فقط دو رابطه وجود دارد. $z = 0$ و $z = 1 - x$

ناحیه نسبت به محور x ها و y ها نیز منظم است.

$x = 1 - z$ و $x = y^2$ ها $y = \pm\sqrt{x}$

اگر ناحیه را نسبت به محور z ها منظم بگیریم ترتیب انتگرال گیری به صورت زیر می شود

$$\iint_D \int_{z_1}^{z_2} dz\, dA$$

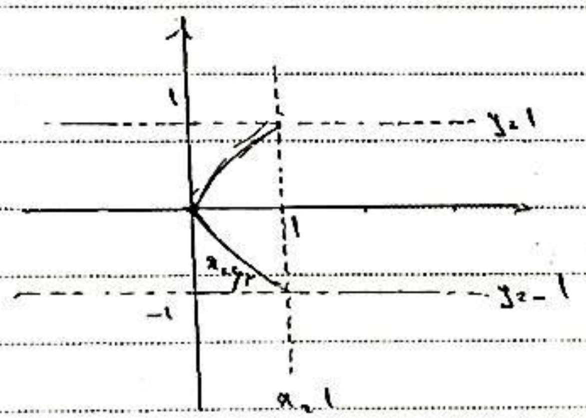
$$\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ z = 1 - x \end{array}\right\} \to 0 \leqslant z \leqslant 1 - x$$

برای پیدا کردن کران های مربوط به x و y باید z را از روابط داده شده حذف کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ x+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1 \xrightarrow{x=y^2} y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$$

نکته: کران های انتگرال بیرونی باید عدد باشد.

ادامه مثال:



$$R=\{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq 1-x \,,\, y^2 \leq x \leq 1 \,,\, -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\int_{y=-1}^{1}\int_{x=y^2}^{1}\int_{z=0}^{1-x} dz\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} \Big[z\Big]_0^{1-x} dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} (1-x)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{1} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(y^2-\frac{y^4}{2}\right) dy = \left[\frac{1}{2}y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{10}\right]_{-1}^{1}$$

$1-\frac{2}{3}+\frac{2}{10}=\frac{14}{30}$

مثال ۴/۶/۱۹۹: حجم ناحیه‌ی ایجاد شده به وسیله‌ی سطوح $y=1-z^2$ ، $y=1-x^2$ و $y=0$ را بیابید.

ناحیه ایجاد شده نسبت به محور z ها منظم است زیرا $z=\pm\sqrt{1-y}$ نقطه‌ی ورود و خروج دارد

$$\iiint_{z_1}^{z_2} dz\,dA$$

یا

ناحیه ایجاد شده نسبت به محور x ها منظم است زیرا $x=\pm\sqrt{1-y}$ نقطه‌ی ورود و خروج دارد یعنی:

$$\iiint_{x_1=-\sqrt{1-y}}^{x_2=\sqrt{1-y}} dx\,dA$$

ناحیه ایجاد شده نسبت به محور y ها نامنظم است زیرا سه معادله از y داریم

$$y=1-x^2 \xrightarrow{y=0} x^2=1 \to x=\pm 1$$

$$R=\{(x,y,z)\mid -\sqrt{1-y}\leq z\leq \sqrt{1-y},\ 0\leq y\leq 1-x^2,\ -1\leq x\leq 1\}$$

$$V=\int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=0}^{1-x^2}\int_{z=-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\Big[z\Big]_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dy\,dx=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} 2\sqrt{1-y}\,dy\,dx$$

$$-2\int_{-1}^{1}\left[(1-y)^{3/2}\times\frac{2}{3}\right]_{0}^{1-x^2}dx=-\frac{4}{3}\int_{-1}^{1}\left((x^2)^{3/2}-1\right)dx$$

$$-\frac{4}{3}\left[\frac{x^4}{4}-x\right]_{-1}^{1}=-\frac{4}{3}\left(\left(\frac{1}{4}-1\right)-\left(\frac{1}{4}+1\right)\right)=\frac{8}{3}$$

تغییر متغیر استوانه‌ای:

اگر قرار دهیم $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ آنگاه می‌توان نوشت.

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2}\int_{z_1}^{z_2}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,\underbrace{r}_{\text{ژاکوبین}}\,dz\,dr\,d\theta$$

انتگرال مقابل $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$ را محاسبه کنید.

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\left[z\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy\,dx$$

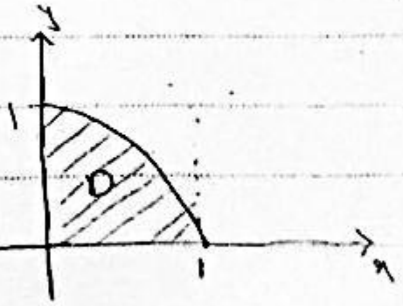
$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\left(\sqrt{1-(x^2+y^2)}-0\right)dy\,dx$$

$y=\sqrt{1-x^2}\to y^2=1-x^2\to y^2+x^2=1$

$x=0\to 1$ ، $x=1\to 0$

$0\le r\le 1$

$0\le\theta\le\pi/2$



$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\, r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{r^2}_{u}\underbrace{-2r(1-r^2)^{1/2}dr}_{dv}\right)$$

$$\begin{cases} u = r^2 \longrightarrow du = 2r\,dr \\ dv = -2r(1-r^2)^{1/2} \longrightarrow v = (1-r^2)^{3/2}\times \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}r^2(1-r^2)^{3/2} - \frac{2}{3}\int \underbrace{2r}_{u'}(\underbrace{1-r^2}_{u})^{3/2}dr\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}r^2(1-r^2)^{3/2} + \frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}+1}\times\frac{2}{5}\right]_0^1$$

$$\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(0+0-0-\frac{4}{15}\right) = \frac{\pi}{15}$$

تغییر متغیر کروی: (بسیار بسیار مهم)

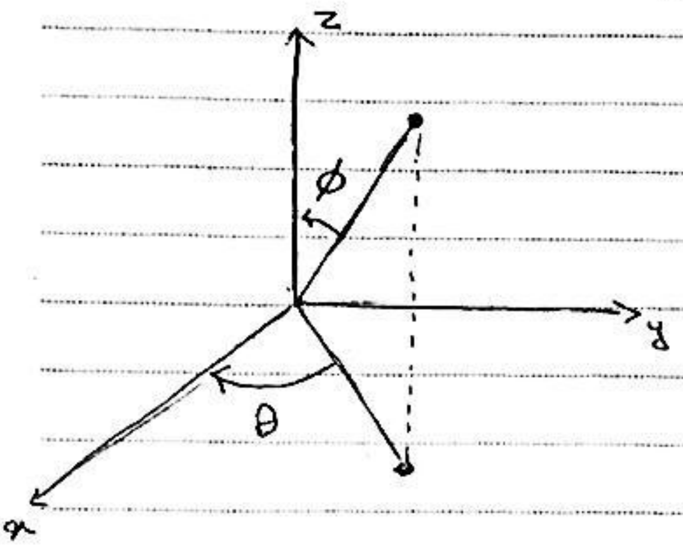
اگر قرار دهیم
$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$
در این صورت داریم:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\sin\phi$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta\sin\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\phi)\,\underbrace{r^2\sin\phi}_{J}\,dr\,d\phi\,d\theta$$

در حالت کلی r و θ و ϕ در محدوده های زیر تعیین می شوند: $0 \leqslant r \leqslant \infty$ و $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ و

$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$



نکته: یکی از کاربردهای انتگرال سه گانه محاسبه‌ی حجم می باشد.

مثال: مطلوب محاسبه‌ی حجم ناحیه ایجاد شده توسط دو کره به شعاع های ۱ و ۲.

$x^2+y^2+z^2=1$ $\qquad$ $x^2+y^2+z^2=4$

$$V=\iiint dV \longrightarrow V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{r=1}^{2} r^2\sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta$$

$$\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{\phi=0}^{\pi}\sin\phi\, d\phi\right)\left(\int_{1}^{2} r^2 dr\right)$$

$$=2\pi\times\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi}\times\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2=2\pi\times(1+1)\times\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{28\pi}{3}$$

حجم ناحیه‌ی بین دو کره

مثال/ ۹۲،۳،۷: مطلوب است محاسبه‌ی $\iiint_R \frac{x}{x^2+y^2}\, dV$ که در آن R ناحیه‌ی محصور بین دو کره به مرکز مبدا و شعاع های ۱ و ۲ می باشد را بیابید.

$$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{1}^{2} \frac{r\cos\theta\sin\phi}{r^2\sin^2\phi}\,\overbrace{r^2\sin\phi}^{J}\, dr\, d\phi\, d\theta$$

$$\left(\int_{0}^{2\pi}\cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_{\phi=0}^{\pi} d\phi\right)\left(\int_{1}^{2} r\, dr\right) =$$

در اینجا $\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta$ صفر می شود برای اینکه این اتفاق نیافتد چون $\cos\theta$ تابع زوج است آن را به صورت $4\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta$ می نویسیم،

$$\left(4\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta\right)\left[\phi\right]_0^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{2} = 4\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)(\pi)$$

$$\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) = 6\pi$$

مثال/ ۹۳،۱۰،۲۹، حجم جسم محدود به کره‌ی $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ مخروط

$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ را به دست آورید.

در مخروط $0\le\phi\le\pi$

$$z^2=4-x^2-y^2 \longrightarrow x^2+y^2+z^2=4 \longrightarrow 0\le r\le 2$$

$$z^2 = 3(x^2+y^2) \longrightarrow r^2\cos^2\phi = 3(r^2\sin^2\phi)$$

تعیین بازه ϕ

$$\tan^2\phi = 1/3 \longrightarrow \tan\phi = \frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow \boxed{0 \leq \phi \leq \pi/6}$$

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/6}\int_{r=0}^{2} r^2\sin\phi \, dr\, d\phi\, d\theta$$

$$\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/6} \sin\phi \, d\phi\right)\left(\int_0^{2} r^2 dr\right)$$

$$= [\theta]_0^{2\pi}\,[-\cos\phi]_0^{\pi/6}\,\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2}$$

$$(2\pi)\left(-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\right)\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{-16}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$$

مثال / تیر ۹۳: مطلوب است محاسبه‌ی $\iiint_R x e^{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV$ که R محدود به کره‌های به شعاع ۱ و ۲، و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است.

$$z^2 = x^2+y^2 \longrightarrow r^2\cos^2\phi = r^2\sin^2\phi \longrightarrow \tan^2\phi = 1 \longrightarrow \tan\phi = 1$$

$$\longrightarrow \phi = \pi/4 \longrightarrow \boxed{0 \leq \phi \leq \pi/4}$$

$$R = \{(r,\theta,\phi) \mid 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi/4\}$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{r=1}^{2}(r\cos\theta\sin\phi)\,e^{r^4}\,r^2\sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$$

زوج

$$\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/4}\sin^2\phi\,d\phi\right)\left(\frac{1}{4}\int_1^2 \underbrace{4r^3}_{u'}\underbrace{e^{r^4}}_{e^u}\,dr\right) \qquad \sin^2\phi=\frac{1-\cos 2\phi}{2}$$

$$4\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta$$

$$4\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}\phi-\frac{1}{4}\sin 2\phi\right]_0^{\pi/4}\frac{1}{4}\left[e^{r^4}\right]_1^2$$

$$4(1)\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(e^{16}-e^{1}\right)$$

مثال/ ۲۸، خرداد ۹۳: حجم داخل مخروط $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ بین کره‌های $x^2+y^2+z^2=1$ و $z=4$ $x^2+y^2+z^2$ را بدست آورید.

$$z^2=\frac{x^2+y^2}{3}\longrightarrow \tan^2\phi=3\Rightarrow \tan\phi=\sqrt{3}$$

$$R=\left\{(r,\theta,\phi)\,\middle|\,1\leqslant r\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$\iiint \rho^2\sin\theta\,dr\,d\phi\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_1^{2}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}\sin\phi\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/3}\sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_1^2\rho^2\,d\rho\right)$$

مثال/ ۱۸/۱۰/۹۲ ، مطلوب است محاسبه‌ی $\iiint_R \frac{x}{9x^2+4y^2}\,dV$ که در آن R ناحیه ایجاد شده توسط بیضوی $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}+z^2=1$ می باشد.

بیضوی داده شده نسبت به سه محور z ها، x ها و y ها متقارن است. پس $\iiint dz\,dA$ را انتخاب می‌کنیم.

$$\iint_D \overbrace{\frac{x}{9x^2+4y^2}}^{\text{فرد}} \int_{z=-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}}^{z=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}} dz\,dA$$

$$\iint \frac{x}{9x^2+4y^2}\left[2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\right] dA$$

تصویر بیضوی داده شده روی صفحه xy بیضی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ می باشد.

* نکته در حالت کلی اگر بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را داشته باشیم تغییر متغیر بیضی عبارتند از:

$$\frac{x}{a}=r\cos\theta$$

$$\longrightarrow 0\leqslant r\leqslant 1 \quad , \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

$$\frac{y}{b}=r\sin\theta$$

$$|J|=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=rab$$

ادامه حل مثال ۱

در مسئله داده شده قرار می دهیم:

$$\frac{x}{2} = r\cos\theta$$

$$\longrightarrow 0 \leqslant r \leqslant 1 \;,\; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$\frac{y}{3} = r\sin\theta$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \frac{2r\cos\theta}{9\times 4r^2\cos^2\theta + 4\times 9r^2\sin^2\theta} \times 2\sqrt{1-r^2}\,\overbrace{|6r|}^{J}\,dr\,d\theta$$

$$\frac{2}{3}\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{1}\sqrt{1-r^2}\,dr\right)$$

انتگرال خط توابع برداری:

فرض کنید F یک تابع برداری در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد. همچنین فرض کنید C یک مسیر در بازه $[a, b]$ با معادلات پارامتری به صورت زیر داده شده باشد.

$$\overrightarrow{r(t)} = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$$

بردار موقعیت

در این صورت انتگرال خط تابع برداری F روی مسیر C در بازه $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\int_C F.dr = \int_a^b F\left(\overrightarrow{r(t)}\right) . \overrightarrow{r'(t)}\, dt$$

ضرب داخلی

مثال: انتگرال خط تابع برداری $\vec{F} = 4x^2y\,\vec{i} + 10xy^2\,\vec{j}$ را در طول سهمی $y = x^3$ از نقطه $(1, 1)$ تا $(2, 8)$ محاسبه کنید.

$$x = t \longrightarrow y = t^3$$

$$\overrightarrow{r(t)} = (t, t^3) \qquad 1 \leq t \leq 2$$

$$F\left(\overrightarrow{r(t)}\right) = \left(4t^2 t^3, 10t(t^3)^2\right) = \left(4t^5, 10t^7\right) \quad (1)$$

$$\overrightarrow{r'(t)} = (1, 3t^2) \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \int_C F.dr = \int_1^2 F(r(t)) . r'(t)\, dt$$

$$\int_1^2 (6t^5, 1, t^7)\cdot(1, 3t^2)\,dt = \int_1^2 (6t^5 + 3t^9)\,dt$$

$$= \left[t^6 + 3t^{10}\right]_1^2 = \left[2^6 + 3\times 2^{10} - 1 - 3\right] =$$

مثال: انتگرال خط $\int_C 3x\,dx + 2xy\,dy + z\,dz$ را در طول مارپیچ C با معادلات پارامتری زیر محاسبه کنید.

$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\vec{r(t)} = (\overbrace{\cos t}^{x}, \overbrace{\sin t}^{y}, \overbrace{t}^{z})$$

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{3\cos t}_{x}\underbrace{(-\sin t)dt}_{dx} + 2\cos t\,\sin t\,\underbrace{(\cos t\,dt)}_{dy} + t\,\underbrace{dt}_{dz}$$

$$\int_0^{2\pi} \Big(-3\,\overset{\frac{1}{2}\sin 2t}{\sin t\cos t} + 2\underbrace{\sin t}_{u'}\,\underbrace{\cos^2 t}_{u^n} + t\Big)\,dt$$

$$= \left[+\frac{3}{4}\cos 2t - 2\,\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{4\pi^2}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = 2\pi^2$$

تمرین: انتگرال خط $\int (x^3 - y^3)\,dy$ را در طول منحنی C شامل نیم دایره فوقانی

$x = \cos t \quad y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \pi$ در جهت مثلثاتی محاسبه کنید.

$$\vec{r(t)} = (\cos t, \sin t)$$

$$\int_0^\pi (\cos^3 t - \sin^3 t)\cos t\,dt = \int_0^\pi \cos^4 t\,dt - \int_0^\pi 4\cos t \sin^3 t\,dt$$

$$= \int_0^\pi \cos^4 t\,dt - \left[\tfrac{1}{4}\sin^4 t\right]_0^\pi = \left[\tfrac{3}{4}t + \tfrac{1}{8}\sin 4t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_0^\pi - \left[\tfrac{1}{4}\sin^4 t\right]_0^\pi$$

$$\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos^2 2t + 2\cos 2t}{4}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos^2 2t + \cos 2t = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\cos 4t + \cos 2t$$

$$\frac{\cos^2 2t}{2} = \frac{1+\cos 4t}{4} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\cos 4t$$

یکی از کاربردهای انتگرال خط محاسبه‌ی کار انجام شده توسط نیروی برداری F روی مسیر C در بازه $[a,b]$ می‌باشد.

انتگرال خط

مثال: کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (xy, yz, xz)$ را در طول منحنی C با معادلات پارامتری زیر محاسبه کنید. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3 \quad 0 \le t \le 1$

$$\vec{F}(r(t)) = (t^3, t^5, t^4)$$

$$r(t) = (t, t^2, t^3) \longrightarrow r'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^1 (t^3, t^5, t^4)\cdot(1, 2t, 3t^2)\,dt$$

$$\int_0^1 t^3 + 2t^6 + 3t^6\,dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{2t^7}{7} + 3\frac{t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7}$$

تعریف میدان پایستار:

فرض کنید میدان برداری $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ یک میدان پایستار باشد

بنابراین نظیر این میدان برداری تابع اسکالری مانند $f(x,y,z)$ وجود دارد بطوری

که $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ یعنی:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = X \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = Y \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = Z \end{cases}$$

به تابع اسکالر $f(x,y,z)$ تابع پتانسیل گوییم.

نکته: شرط لازم برای آن که میدان برداری $\vec{F}$ پایستار باشد آن است که

$\text{curl}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ باشد.

مثال: تابع پتانسیل میدان برداری $\vec{F} = (2xy^3+2)\vec{i} + (3x^2y^2 + z^2)\vec{j} + (2yz+1)\vec{k}$

را در صورت وجود بیابید.

$$\text{curl}\,F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^3+2 & 3x^2y^2+z^2 & 2yz+1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(2z - 2z, -(0-0), 6xy^2 - 6xy^2\right) \longrightarrow \text{curl}\,\vec{F} = \vec{0}$$

پا بدان F پایستار است یعنی تابع پتانسیل دارد.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3+2 \longrightarrow f=\int 2xy^3+2\,dx \rightarrow f=x^2y^3+2x \quad ①$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2+z^2 \longrightarrow f=\int 3x^2y^2+z^2\,dy \rightarrow f=x^2y^3+z^2y \quad ②$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2yz+1 \longrightarrow f=\int 2yz+1\,dz \rightarrow f=yz^2+z \quad ③$$

* برای به دست آوردن تابع پتانسیل f سه رابطه ① و ② و ③ را با هم جمع کرده جمله ها مشترک را یک بار می‌نویسیم *

$$f=x^2y^3+2x+z^2y+z$$

تابع پتانسیل ← ما

نکته: اگر تابع برداری F پایستار باشد انتگرال خط این تابع برداری روی هر مسیر بسته صفر است.

انتگرال خط مستقل از مسیر:

فرض کنید تابع برداری $\vec{F}$ پایستار با تابع پتانسیل f داده شده باشد. همچنین فرض کنید مسیر C با معادلات پارامتری $\vec{r(t)}=(x(t),y(t),z(t))$ $(a\leq t\leq b)$ داده شده باشد در این صورت از آن جا که انتگرال خط یک میدان پایستار مستقل از مسیر است می‌توان قرارداد.

$$\int_C \vec{F}\cdot dr = f(\text{انتهای مسیر}) - f(\text{ابتدای مسیر}) = f(r(b)) - f(r(a))$$

مثال: کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec{F}(x,y)=(3+2xy)\vec{i}+(x^2-3y^2)\vec{j}$

روی مسیر C با معادلات پارامتری زیر محاسبه کنید.

$$\vec{r}(t)=e^t\sin t\,\vec{i}+e^t\cos t\,\vec{j} \qquad 0\le t\le \pi$$

برای اثبات پایستاری تابع F دترمینان زیر را محاسبه می‌کنیم.

$$\operatorname{Curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 3+2xy & x^2-3y^2 \end{vmatrix} = \frac{\partial(3+2xy)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2-3y^2)}{\partial x} = 2x-2x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3+2xy \longrightarrow f=\int(3+2xy)\,dx = 3x+x^2y \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2+3y^2 \longrightarrow f=\int(x^2-3y^2)\,dy = x^2y-y^3 \quad (2)$$

(1), (2) را (مشترک‌ها یک بار) $\longrightarrow f(x,y)=3x+x^2y-y^3 \quad (3)$

انتهای مسیر $= r(\pi) = (e^\pi\sin\pi,\ e^\pi\cos\pi) = (0,\ -e^\pi)$

ابتدای مسیر $= r(0) = (e^0\sin 0,\ e^0\cos 0) = (0,1)$

$$\int_C \vec{F}\cdot dr = f(r(\pi)) - f(r(0)) = f(0,-e^\pi) - f(0,1)$$

③ $-(-e^{\pi})^3 - (-1) = e^{3\pi} + 1$

نکته: اگر در این مثال $0 \le t \le 2\pi$ تعریف شده باشد یعنی ابتدا و انتهای مسیر روی هم باشد چون تابع برداری F پایستار است: $\oint F \cdot dr = 0$

مثال / ۲۸ خرداد ۹۳: کار انجام شده توسط میدان برداری $(y^2\cos x + z^3,\ 2y\sin x - 4,\ 3xz^2 + 2)$ روی منحنی $C: \vec{R}(t) = \sin^{-1} t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$ ، $0 \le t \le 1$ را حساب کنید.

$$\operatorname{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2\cos x + z^3 & 2y\sin x - 4 & 3xz^2 + 2 \end{vmatrix}$$

$$= \big((0-0),\ -(3z^2 - 3z^2),\ (2y\cos x - 2y\cos x)\big) = (0,0,0) = \vec{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\cos x + z^3 \rightarrow f = \int y^2\cos x + z^3\, dx$$

$$= y^2\sin x + xz^3 \quad ①$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\sin x - 4 \rightarrow f = \int 2y\sin x - 4\, dy$$

$$= y^2\sin x - 4y \quad ②$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2 + 2 \rightarrow f = \int 3xz^2 + 2\, dz$$

$$= xz^3 + 2z \quad ③$$

①, ②, ③ $\rightarrow f(x,y,z) = y^2 \sin x + xz^3 + 2z - 4y$ ④

انتهای مسیر $= R(1) = (\sin^{-1} 1 , 1 , 1)$ ، $\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$

ابتدای مسیر $= R(0) = (\sin^{-1} 0 , 0 , 0)$

$$\int_C \vec{F} \cdot dr = f(R(1)) - f(R(0)) = f(\sin^{-1} 1, 1, 1) - f(\sin^{-1} 0, 0, 0)$$

④ $1 + \frac{\pi}{2} + 2 - 4 - (0) = \frac{\pi}{2} - 1$

مثال: کار انجام شده توسط میدان برداری $F = (x - z \,,\, x^3 + yz \,,\, -3xy^2)$ روی منحنی محل تلاقی $z = 4 - \sqrt{3x^2 + 2y^2}$ با $z = 2$ را بیابید.

$$2 = 4 - \sqrt{3x^2 + 2y^2} \rightarrow \sqrt{3x^2 + 2y^2} = 2 \rightarrow 3x^2 + 2y^2 = 4$$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{3x^2}{4}}_{\cos^2 t} + \underbrace{\frac{y^2}{2}}_{\sin^2 t} = 1 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} x = \cos t \rightarrow x = \frac{2\cos t}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = \sin t \rightarrow y = \sqrt{2} \sin t$$

$$r(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cos t , \sqrt{2} \sin t \right)$$

مثال: کار انجام شده توسط میدان برداری $F=(x^2-yz, y^2-zx, z^2-xy)$ روی

مارپیچ $x=2\cos t$ ، $y=2\sin t$ ، $z=\frac{t}{2\pi}$ را بیابید : $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

$$\operatorname{curl} F=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2-yz & y^2-zx & z^2-xy \end{vmatrix}=\left((\cancel{-x+x}), -(\cancel{-y+y}), (\cancel{-z-z})\right)$$

پایستار است.

$$f=\int (x^2-yz)\,dx=\frac{x^3}{3}-yzx$$

$$f=\int (y^2-zx)\,dy=\frac{y^3}{3}-zxy \longrightarrow f(x,y,z)=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-xyz$$

$$f=\int (z^2-xy)\,dz=\frac{z^3}{3}-xyz$$

$$R(2\pi)=(2,0,1) \qquad R(0)=(2,0,0)$$

$$\oint F\cdot dr=f(2,0,1)-f(2,0,0)=\frac{8}{3}-0+\frac{1}{3}-\frac{8}{3}+0$$

تعمیم گرین: فرض می‌کنیم C یک منحنی بسته و جهت‌دار در جهت مثلثاتی باشد و تابع

برداری $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ روی ناحیه D تعریف شده باشد.

در این صورت انتگرال خط تابع برداری F روی منحنی C را می‌توان به صورت

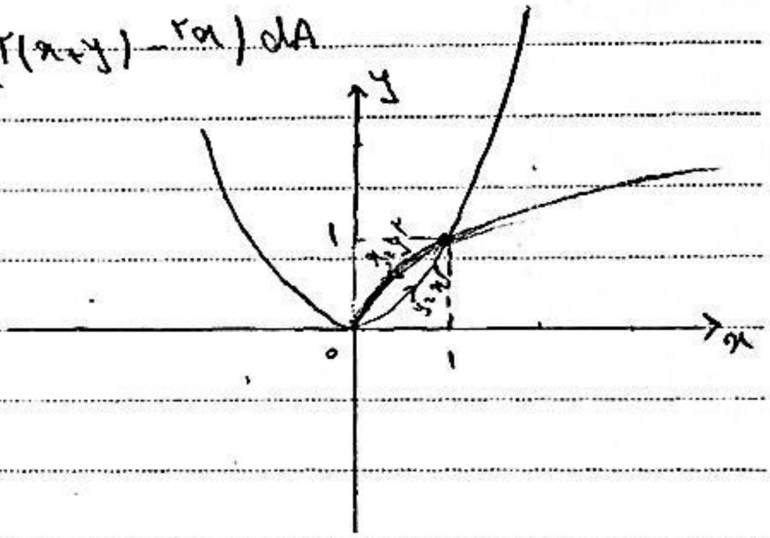
زیر محاسبه کرد.

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dr$$

مثال / ۱/۲/۴/۹۳، با استفاده از قضیه گرین انتگرال $\oint_C \overbrace{(2xy - x^2)}^{P}dx + \overbrace{(x+y)^2}^{Q}dy$

را روی منحنی مرز ناحیه محدود به منحنی های $y=x^2$ و $x=y^2$ محاسبه کنید.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D \left(2(x+y) - 2x\right) dA$$



$$= \iint_D 2y \, dA$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} 2y \, dy \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x - x^4 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 1/2 - 1/5 = 3/10$$

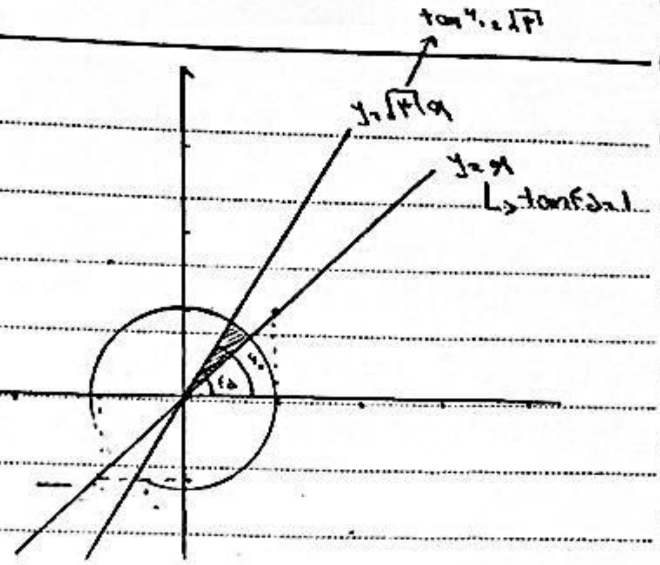
مثال / تیر ۹۳، حاصل انتگرال $\oint_C \overbrace{(x^3 - y^3)}^{P}dx + \overbrace{(e^{y^2} + x^2)}^{Q}dy$ را که در آن

C مسیر بسته متشکل از $y=x$ ، $y=\sqrt{3}x$ و $y=\sqrt{1-x^2}$ است که در جهت مثلثاتی
$y^2+x^2=1$

طی می شود را با کمک قضیه گرین بیابید.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D \left(2x^2 + 3y^2\right) dA$$

$$\iint_D 3(x^2+y^2)\,dA$$



$$\begin{cases} 0\leqslant r\leqslant 1 \\ \pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/3\end{cases}$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_0^1 3r^2\cdot \overset{|J|}{r}\,dr\,d\theta$$

$$=\left[\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/3}\left[3\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{16}$$

مثال / تیر ۹۳: کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec F=\overbrace{(x-z)}^{P}\vec i+\overbrace{(x^3+yz)}^{Q}\vec j-3xy^2\vec k$ روی منحنی محل تلاقی رویه $z=4-\sqrt{3x^2+2y^2}$ با $\underline{z=2}$ را بیابید.

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_D 3x^2\,dA$$

$$z=4-\sqrt{3x^2+2y^2}=2$$

$$\sqrt{3x^2+2y^2}=2\longrightarrow 3x^2+2y^2=4\longrightarrow\frac{x^2}{\frac{4}{3}}+\frac{y^2}{\frac{4}{2}}=1$$

$$a=\frac{2}{\sqrt3}\longleftarrow a^2=\frac43\qquad\qquad \frac42\to b^2\longrightarrow b=\sqrt2$$

تغییر متغیر بیضی:

$$\begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt3}r\cos\theta \\ y=\sqrt2\, r\sin\theta\end{cases}\longrightarrow 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

$$|J|=rab=\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}r$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \cancel{3}\times\frac{4}{\cancel{3}}\, r^2\cos^2\theta \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, r\right) dr\, d\theta$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\right)\times\left(\int_0^1 \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, r^3\, dr\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\left[8\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{3}{2}\times 2\pi\times\sqrt{\frac{2}{3}}$$

راه دوم: حل مسئله توسط فرمول: $\int F(r(t))\cdot r'(t)\,dt$

پیدا کردن $r(t)$:

$$f=\sqrt{3x^2+2y^2}=2 \longrightarrow \frac{x^2}{4/3}+\frac{y^2}{2}=1$$

$$\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\cos t \longrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t$$

$$\frac{y}{\sqrt{2}}=\sin t \longrightarrow y=\sqrt{2}\sin t$$

$$\vec{r}(t)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t,\ \sqrt{2}\sin t,\ 2\right) \longrightarrow 0\leq t\leq 2\pi$$ یعنی

$$\vec{F}(r(t))=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t-2,\ \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\right)^3+2\sqrt{2}\sin t,\ -\frac{12}{\sqrt{3}}\cos t\sin^2 t\right)$$

$$r'(t)=\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\sin t,\ \sqrt{2}\cos t,\ 0\right)$$

$$\oint_C F(r(t))\cdot r'(t)\,dt=\int\left(-\frac{4}{3}\sin t\cos t+\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t+\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\cos^4 t\right)d$$

$$\int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}\sin 2t+\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t+\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 \, dt$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{4}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(t + \sin 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\sin 4t\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos 4\pi - \cos 0\right) - \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\cos 2\pi - \cos 0\right) + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{3}{2} \times 2\pi = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\pi$$

مثال ۸۰، ۱۸، ۹۲، درستی قضیه گرین را برای تابع برداری $\vec{F} = \underbrace{(x-y)}_{P} i + \underbrace{(x+y)}_{Q} j$ و دایره $x^2+y^2=4$ بررسی کنید.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_D \left(1-(-1)\right) dA = \iint_D 2\, dA = 2\iint_D dA$$

* مساحت است چون $x^2+y^2=4$ است پس مساحت دایره ای 4π است *

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\, dr\, d\theta = 2\left[\theta\right]_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2} = 2 \times 2\pi \times \frac{4}{2} = 8\pi$$

بررسی $\int F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$

پارامتری کردن دایره $x^2+y^2=4$

$x = 2\cos t$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$y = 2\sin t$

$$r(t) = (2\cos t, 2\sin t) \longrightarrow r'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

$$F(\vec{r(t)}) = \left(2\cos t - 2\sin t,\ 2\cos t + 2\sin t\right)$$

$$F(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}'(t)) = -2\sin t\,(2\cos t - 2\sin t) + 2\cos t\,(2\cos t + 2\sin t)$$

$$= -\cancel{4\sin t\cos t} + 4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \cancel{4\sin t\cos t} = 4$$

$$\int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 4\,dt = 4t\Big]_0^{2\pi} = 8\pi$$

تمرین:

۱- درستی یا عدم درستی قضیه گرین را برای میدان برداری $\vec{F}(x,y) = \overbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}^{P}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}$ بر ناحیه‌ی D بین دو دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ تحقیق کنید.

۲- کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}(x,y) = (\sin x - y)\,\vec{i} + (e^y - x^2)\,\vec{j}$ در طول دایره $x^2+y^2=9$ محاسبه کنید.

۳- مطلوب است محاسبه $\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy$ که در آن C منحنی بسته شامل قسمتی از سهمی $y=x^2$ از نقطه $(0,0)$ تا $(2,4)$ و پاره خط واصل این دو نقطه.

۴- با استفاده از قضیه گرین انتگرال $I = \int_C (y^2-x)\,\underline{\underline{dy}} + (x^2+2xy)\,\underline{\underline{dx}}$ را محاسبه کنید که در آن C منحنی حاصل از تلاقی $z = -x^2-y^2+4$ با صفحه $\underset{z=0}{xoy}$ است.

تمرین ۱: درستی یا عدم درستی قضیه گرین را برای میدان برداری $\vec{v} = \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{P}\vec{i} + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{Q}\vec{j}$

بر ناحیه D بین دو دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ تحقیق کنید.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D \left(\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) dA$$

$$\iint_D \left(\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\right) dA \qquad 0<\theta<2\pi \qquad 1<r<2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 4r^3 \sin\theta\cos\theta \, dr\, dA = \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta \, dA\right)\left(\int_1^2 4r^3\, dr\right)$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}\cos^2\theta\right]_0^{2\pi} \times \left[r^4\right]_1^2 = 4(0+1/2)\times 15 = 30$$

بررسی ۱

$$\int F(r(t))\cdot r'(t)\,dt$$

۲- کار انجام شده توسط نیروی $F(x,y) = \underbrace{(\sin x - y)}_{P}\vec{i} + \underbrace{(e^y - x^2)}_{Q}\vec{j}$ را در طول دایره

$x^2+y^2=9$ حساب کنید.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D (-2x+1)\, dA$$

$0 \leqslant r \leqslant 3 \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

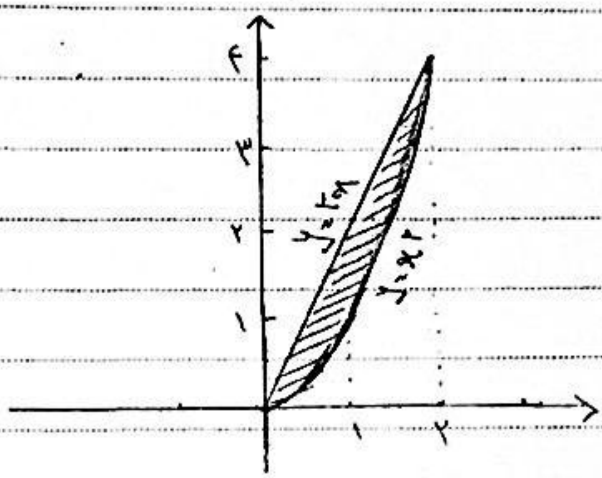
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{3} (-2r^2\cos\theta + r)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} (-18\cos\theta + 4)\, d\theta$$

$$= \left[-18\sin\theta\right]_0^{2\pi} + \left[\theta\right]_0^{2\pi} = 0 + 2\pi = 2\pi$$

۳- مطلوب است محاسبه‌ی $\oint_C \underbrace{y^2}_{P} dx + \underbrace{4xy}_{Q}\, dy$ که در آن C منحنی بسته شامل قسمتی

از سهمی $y = x^2$ از نقطه $(0,0)$ تا $(2,4)$ و پاره خط واصل این دو نقطه است.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA=\iint_D (4-2y)\, dA$$



$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x} (4-2y)\, dy\, dx$$

$$=\int_0^2 (8x-4x^2-4x^2+x^4)\, dx$$

$$\int_0^2 (x^4-8x^2+8x)\, dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+4x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+16$$

۴_ با استفاده از قضیه گرین انتگرال $I=\oint_C \underbrace{(y^2-x)}_{Q}\, dy+\underbrace{(x^2+2xy)}_{P}\, dx$ را محاسبه کنید

که در آن C منحنی حاصل از تلاقی $z=-x^2-y^2+5$ با صفحه $\underbrace{xoy}_{z=0}$ است.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA=\iint_D (-1-2x)\, dA$$

$-x^2-y^2+5=0 \longrightarrow x^2+y^2=5 \qquad 0\leq r\leq \sqrt{5} \qquad 0\leq \theta\leq 2\pi$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}} (-r-2r^2\cos\theta)\, dr\, d\theta=\int \left[-\frac{r^2}{2}-\frac{2}{3}r^3\cos\theta\right]_0^{\sqrt{5}} d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left[-\frac{5}{2}-\frac{10}{3}\sqrt{5}\cos\theta\right]d\theta=\left[-\frac{5}{2}\theta-\frac{10\sqrt{5}}{3}\sin\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$=-5\pi-0=\boxed{-5\pi}$$

قضیه دیورژانس گاوس:

فرض کنید S یک سطح هموار و به طور تکه‌ای پیوسته باشد که روی ناحیه‌ی R تعریف شده است و تابع برداری $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ را در نظر می‌گیریم.

$$\iint F \cdot N \, ds = \iiint_R \operatorname{div} \vec{F} \, dv$$

$$\operatorname{div} F = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

کاربرد انتگرال سطح توابع برداری:

یکی از کاربردهای انتگرال سطح توابع برداری محاسبه‌ی شار عبوری از میان یک رویه می‌باشد که با قضیه دیورژانس محاسبه می‌گردد.

مثال: تابع برداری $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ داده شده است و S محدود به سهمی‌گون $z = 1 - x^2 - y^2$ و صفحه $z = 0$ می‌باشد. درستی قضیه دیورژانس را بررسی کنید.

$$\iiint_R \operatorname{div} F \, dv = \iiint_R \Big(\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(z)}^{\operatorname{div} F} \Big) dv = \iiint_R dv$$

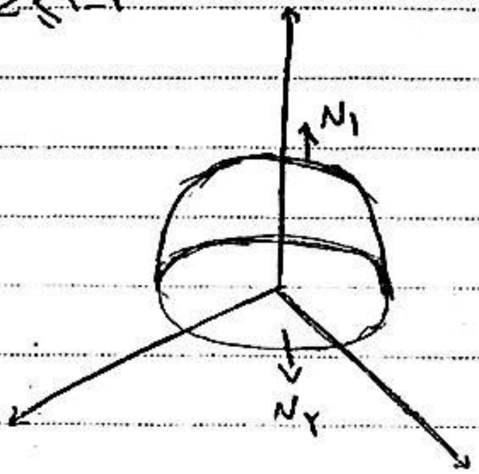
$$\begin{cases} z = 0 \\ z = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} \longrightarrow 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$$

$0 = 1 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$

تصویر سطح کل روی صفحه xy دایره است

$$x^2 + y^2 = 1 \begin{cases} \rightarrow 0 \leq r \leq 1 \\ \rightarrow 0 \leq z \leq 1 - r^2 \\ \rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{0}^{1-r^2} dz\,(r\,dr\,d\theta)$$



$$\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 r[z]_0^{1-r^2}\,dr\right)$$

$$(2\pi)\int_0^1 r(1-r^2)\,dr = 2\pi\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

محاسبه‌ی $\iint F \cdot N\,dS$

بردار عمود بر سطح $\vec{N_1}$ را از روی معادله $z = 1 - x^2 - y^2$ تعیین می‌کنیم.

$g(x, y, z) = z - 1 + x^2 + y^2$

$$\vec{N_1} = \pm \frac{\vec{\nabla g}}{\|\vec{\nabla g}\|} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\|\vec{\nabla g}\|}$$

+ برای N های رو به بالا

− برای N های رو به پایین

$$\iint F \cdot N_1\,dS = \iint_D (y, x, z) \cdot \frac{(2x, 2y, 1)}{\|\vec{\nabla g}\|}\underbrace{\|\vec{\nabla g}\|\,dA}_{dS}$$

$$= \iint_D 2xy + 2xy + z \, dA = \iint_D 4xy + \underbrace{1 - x^2 - y^2}_{z} \, dA$$

تصویر $z = 1 - x^2 - y^2$ روی صفحه xy دایره $x^2 + y^2 = 1$ می باشد.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r^2 \cos\theta \sin\theta + 1 - r^2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(2\sin 2\theta - 1) \, r^4/4 + r^2/2 \right]_0^1 d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{2\sin 2\theta - 1}{4} + 1/2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2} + 1/4 \, d\theta$$

$$\left[-1/4 \cos 2\theta + 1/4 \, \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$$

N_2 بردار عمود بر سطح تخت $z = 0$ می باشد.

$g(x, y, z) = z$

$$N_2 = -\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{-(0, 0, 1)}{\|\nabla g\|}$$

که رو به بیرون باشد

$$\iint F \cdot N_2 \, dS = \iint (y, x, z) \cdot (0, 0, -1) \, dA = \iint -z \, dA = 0$$

مثال: شار میدان برداری $F(x, y, z) = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ گذرنده از

سطح بسته $x^2+y^2+z^2=2z$ را بیابید.

$$\operatorname{div} F = 3x^2+3y^2+3z^2 = 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$x^2+y^2+z^2-2z=0 \longrightarrow x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

کره‌ای به مرکز $(0,0,1)$ و شعاع 1

می‌خواهیم با قضیه دیورژانس $\iiint_R \operatorname{div} F\, dV$ را روی مختصات کروی حل کنیم.

$$x^2+y^2+z^2-2z = r^2-2r\cos\phi=0 \begin{cases} r=0 \\ r=2\cos\phi \end{cases}$$

* در کره‌ای به مرکز $(0,0,1)$ است بایستی محدوده ϕ را از $\boxed{0 \text{ تا } \pi/2}$ بگیریم *

$$\iiint \operatorname{div} F\, dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\phi} 3r^2\, \overbrace{r^2\sin\phi}^{J}\, dr\, d\phi\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} 3\sin\phi\, \frac{r^5}{5}\Big]_0^{2\cos\phi} d\phi\right)$$

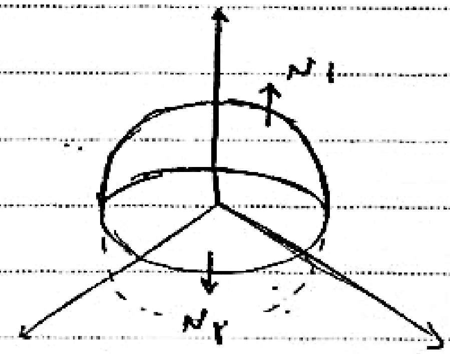
$$(2\pi)\ \frac{3}{5}\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin\phi}_{u'}\, \underbrace{(2\cos\phi)^5}_{u^5}\, d\phi$$

$$\frac{192\pi}{5}\left[\left(-\frac{\cos^6\phi}{6}\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{192}{5}\pi \times \frac{1}{6} = \frac{32}{5}\pi$$

مثال: همراه $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و S سطح بسته قسمت بالای کره (نیم کره) $x^2+y^2+z^2=4$ درستی قضیه دیورژانس را بررسی کنید

$\operatorname{div} F = 1+1+1 = 3$

$$\iiint_R \operatorname{div} F \, dV = \iiint_R 3\, dV = 3\,(\underset{\text{نیم کره}}{\text{حجم}}) = 3 \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{4}{3}\pi (2)^3 = 16\pi$$



$\iint F \cdot N \, dS$

$x^2+y^2+z^2=4$ N_1 مربوط به سطح می باشد

$z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ سمت بالای کره

$g(x,y,z) = z - \sqrt{4-x^2-y^2}$

$$N_1 = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{\left(\underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}}_{z}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right)}{\|\nabla g\|}$$

$$\iint F \cdot N_1 \, dS = \iint (x,y,z)\cdot\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) dA$$

$$= \iint_D \left(\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z} + z\right) dA = \iint_D \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right) dA$$

D تصویر کره $x^2+y^2+z^2=4$ است روی صفحه ی xy که دایره ای به

$x^2+y^2\leq 4$ می باشد ، $0\leq\theta\leq 2\pi$ و $0\leq r\leq 2$.

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{2} 4(4-r^2)^{-1/2}(2r)\,dr\,d\theta$$

$$\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(-2(4-r^2)^{1/2}\times 2\right]_0^2 = 2\pi\times(-4)(-2)=16\pi$$

قضیه استوکس (تعمیم قضیه‌ی گرین)

فرض کنید S یک سطح بطور تکه‌ای پیوسته و جهت دار باشد و مرز آن یک یا چند بسته در نظر گرفته شود. در این صورت داریم:

$$\oint_C F\cdot dr=\iint \mathrm{curl}\,F\cdot N\cdot ds$$

$$\mathrm{curl}\,F=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

$F=(P,Q,R)$

نکته: اگر در مسائل مربوط به قضیه استوکس متغیر z یک عدد ثابت داده شده باشد یا یک عدد ثابت در محاسبات بدست آید در این صورت می توان به جای محاسبه‌ی $\iint \mathrm{curl}\,F\cdot N\,ds$ قضیه گرین یعنی $\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$ را به کار برد.

مثال/ ۲۹، ۱۰، ۹۳، مقدار کار اعلام شده توسط متحرکی که بر منحنی بسته $x^2+y^2+z=1$ و $x^2+y^2=1$ حرکت می‌کند و تحت تأثیر میدان برداری $\vec{F}=(x^2y, -y^3, 3)$ قرار دارد را یکبار مستقیم و بار دیگر به کمک قضیه‌ی استوکس محاسبه کنید.

$$\oint_C F.dr = \iint \operatorname{curl} F . N \, ds$$

$x^2+y^2+z^2=1$

$x^2+y^2=1$ $\longrightarrow z=0 \longrightarrow \vec{r(t)}=(\cos t, \sin t, 0)$

$\vec{r'(t)}=(-\sin t, \cos t, 0)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$$\oint_C F.dr = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin t, -\sin^3 t, 3)(-\sin t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos^2 t \sin^2 t - \sin^3 t \cos t \; dt$$

$-\frac{1}{4}\sin^2 2t = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)$

$$= \left[-\frac{1}{8}t + \frac{1}{32}\sin 4t - \frac{\sin^4 t}{4}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{8}2\pi = -\frac{\pi}{4}$$

محاسبه‌ی $\iint \operatorname{curl} F . N \, ds$

پیدا کردن N از روی $x^2+y^2+z=1$ یعنی:

$g(x,y,z)=z$

$z=1-x^2-y^2=1-1=0 \xrightarrow{z=0} N=(0,0,1)$

$$\operatorname{curl}F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underbrace{x^2y}_{P} & \underbrace{-y^3}_{Q} & 3 \end{vmatrix}=\left(0,0,\frac{\partial}{\partial x}(-y^3)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right)$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} \longrightarrow$$ یعنی گرین

$$\iint \operatorname{curl}F\cdot N\,ds=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

$$=\iint_{D \to x^2+y^2=1} 0-x^2\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^2\cos^2\theta\, r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\int_0^1 -r^3\,dr$$

$$\left[\tfrac{1}{2}\theta+\tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\left[-\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\pi\times\left(-\tfrac{1}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

مثال: درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $F=(\overbrace{x+y}^{P},\overbrace{z}^{Q},y)$ و سطح S که قسمتی از سطح $x^2+y^2-z^2=-1$ محدود به صفحه $z=\sqrt{2}$ است تحقیق کنید.

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint -1\,dA=-\underbrace{\iint dA}_{\text{مساحت دایره}}=-\pi(4)=-4\pi$$

$x^2+y^2-z^2=-1 \xrightarrow{z=\sqrt{5}} x^2+y^2=4$

$\oint F\cdot dr = ?$

$x^2+y^2=4 \longrightarrow \vec{r(t)} = (2\cos t,\ 2\sin t,\ \sqrt{5}) \qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

$$\oint F\cdot dr = \int_0^{2\pi} (2\cos t + 2\sin t,\ \sqrt{5},\ 2\sin t)\cdot(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\overset{-2\sin 2t}{\cancel{-4\sin t\cos t}} - \boxed{\overset{-4\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)}{4\sin^2 t}} + 2\sqrt{5}\cos t\Big)\,dt$$

$$\Big[\cos 2t - 2t + \sin 2t + 2\sqrt{5}\sin t\Big]_0^{2\pi} = -2\times 2\pi = -4\pi$$