«تئوری الاستیسیته»

استاد : دکتر محمد امامی کوزنده

زمان و مکان کلاس : چهارشنبه ها از ۱۷ تا ۲۰ ، کلاس ۲۳۱۵

زمان امتحان پایان ترم : ۱۴۰۲/۱۰/۲۵

جیمیل استاد : emamiacademic@gmail.com

کانال تلگرام استاد : @Dremamidocuments

شماره تلگرام و واتساپ استاد : ۰۹۱۹۴۹۴۸۳۰۷

منابع : جزوه موجود در کانال استاد - تئوری الاستیسیته نوشته دکتر سعادت پور -
theory of Elosticity - SSAD

نحوه ارزشیابی :

امتحان پایان ترم : ۱۲ نمره «یک برگ پشت و رو برای نوشتن روابط مجاز»

امتحان میان ترم : ۵ نمره «بعد فصل ۲ - اواخر آبان ماه»

حل تمرین : ۳ نمره «ارسال از طریق جیمیل»

سرفصل ها :

۱- آنالیز بردارها و جبر ماتریسی.

۲- تنش و انواع آن (در حالت 3D).

۳- کرنش و انواع آن (در حالت 3D)
ناشی از تنش (هوک) و ناشی از تغییر مکان (گرین).

۴- روابط سازگاری (بین تنش و کرنش).

۵- تفاوت الاستیسیته و پلاستیسیته.

فصل ۱: آنالیز بردارها و جبر ماتریسی

اسکالر (عدد) : $a = 2$

بردار (عدد و جهت) : بردار $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

بردار $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

جمع برداری : $\vec{a} + \vec{b} = (2+1)\vec{i} + (-1-3)\vec{j} + (1+2)\vec{k}$

تفریق برداری : $\vec{a} - \vec{b} = (2-1)\vec{i} + (-1-(-3))\vec{j} + (1-2)\vec{k}$

ضرب داخلی برداری : $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2 \times 1)\cancel{\vec{i}} + (-1 \times -3)\cancel{\vec{j}} + (1 \times 2)\cancel{\vec{k}} = 7$

ضرب خارجی برداری : $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ «با ۲ روش قابل محاسبه است»

روش اول : تبدیل به دترمینان ۲×۲

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

دترمینان

سطر ۱ ستون ۱ حذف شوند — قطر اصلی — قطر فرعی

$$\left[(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i}\right] + \left[(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j}\right] +$$

سطر ۱ ستون ۲ حذف شوند

صفحه بعدی

ستون ۳ سطر ۱

حذف شوند $1+3=4$

$$\ldots \left[(-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \right]$$

$+1$

روش محاسبه :

$$\left[(-1)^{n+m} \cdot (\text{ضرب قطر اصلی} - \text{ضرب قطر فرعی}) \cdot \vec{i} \text{ or } \vec{j} \text{ or } \vec{k} \right]$$

$-2+3$

$$(1) \times (-2 - (-3)) \times \vec{i} = 1\vec{i}$$

$4-1$

$$(-1) \times (4 - (1)) \times \vec{j} = -3\vec{j}$$

$-6+1$

$$(1) \times (-6 - (-1)) \times \vec{k} = -5\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

روش دوم : روش ساروس

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right.$$

روش محاسبه :

$$[-2i + j - 6k] - [4j - 3i - k] =$$

$$-2i + 1j - 6k - 4j + 3i + 1k = \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

ماتریس معکوس «برای ماتریس های مربعی»

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2} \xrightarrow{\text{معکوس ماتریس } 2\times 2} [A]^{-1}_{2\times 2} = \frac{1}{\underbrace{|A|}_{\text{دترمینان} \; (ad-bc)}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس ۳x۳ : برای معکوس ماتریس ۳x۳ ابتدا دترمینان آن ماتریس را توسط یکی از روش های صفحه قبل محاسبه می کنیم $|A|$. سپس ماتریس کهاد $[A^*]$ یا همان الحاقی را با روش زیر به دست آورده و بعد از آن، ماتریس کهاد را به ماتریس ترانهاده $[A^*]^T$ تبدیل می کنیم.

ترانهاده : یعنی عوض کردن جای سطر و ستون ماتریس.

$$[A]^{-1}_{3\times 3} = \frac{1}{|A|} [A^*]^T$$

مثال) معکوس ماتریس مربعی ۳x۳ داده شده را به دست آورید.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

ابتدا به روش ساروس؛ دترمینان این ماتریس را محاسبه می کنیم:

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{array}$$

$$|A| = +(1\times 3\times 1) + (2\times 1\times 0) + (0\times -1\times 2) = 3$$

$$-(1\times -1\times 0) - (0\times 1\times 1) - (2\times 3\times 2) = -12$$

$$|A| = 3 - 12 = -9$$

در مرحله بعدی، ماتریس کهاد را به روش زیر به دست می آوریم:

تعیین + و - و حذف سطر و ستون مورد نظر

قطر فرعی قطر اصلی

$$[A^*] = \left[\begin{array}{ccc} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{array}\right]$$

((ضرب قطر اصلی) - (ضرب قطر فرعی))

روش محاسبه ← قطر

$$[A^*] = \begin{bmatrix} +1\times((3\times 1)-(1\times 0)) & -1\times((1\times -1)-(2\times 1)) & +1\times((0\times -1)-(2\times 3)) \\ -1\times((1\times 0)-(2\times 0)) & +1\times((1\times 1)-(2\times 2)) & -1\times((1\times 0)-(2\times 0)) \\ +1\times((1\times 0)-(2\times 3)) & -1\times((1\times 1)-(2\times -1)) & +1\times((1\times 3)-(0\times -1)) \end{bmatrix}$$

ایجاد ماتریس کهاد :

$$[A^*] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

حالا برای ایجاد ماتریس ترانهاده ، باید جای سطر و ستون ماتریس کهاد را عوض کنیم . یعنی سطر یک از چپ به راست می شود ستون یک از بالا به پایین و سطر دو از چپ به راست می شود ستون دو از بالا به پایین و سطر سه از چپ به راست می شود ستون سه از بالا به پایین و در نتیجه ماتریس ترانهاده $[A^*]^T$ به دست می آید :

ساخت ماتریس ترانهاده :

$$[A^*]^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 3 & -3 & -3 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

در مرحله ۴ آخر طبق رابطه معکوس ماتریس مربعی ۳×۳ خواهیم داشت:

در همه درایه‌ها اعمال می‌شود

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|}[A^*]^T \Longrightarrow \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 3 & -3 & -3 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{-9} & \frac{0}{-9} & \frac{-6}{-9} \\ \frac{3}{-9} & \frac{-3}{-9} & \frac{-3}{-9} \\ \frac{-6}{-9} & \frac{0}{-9} & \frac{3}{-9} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -0/33 & 0 & 0/67 \\ -0/33 & 0/33 & 0/33 \\ 0/67 & 0 & -0/33 \end{bmatrix}$$

۰۵۰۱۲۰

تمرین: معکوس ماتریس مربعی ۳×۳ زیر را به دست آورید.

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad \text{و} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

ستون ماتریس اول با سطر ماتریس دوم باید با هم برابر باشند تا بتوان در هم ضرب شوند.

ضرب ماتریس ها: $A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$

سطر ستون — سطر — ستون

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

روش محاسبه:

ضرب درایه های نظیر به نظیر سطر یک ماتریس اول با ستون یک ماتریس دوم و ستون دو ماتریس دوم: ایجاد سطر ۱ ماتریس جواب

$3\times 2 \quad 1\times 0 \quad 0\times 2 \Rightarrow 6+0+0 = 6$

$3\times -1 \quad 1\times 1 \quad 0\times 1 \Rightarrow -3+1+0 = -2$

سطر دوم ماتریس اول با ستون یک و دو ماتریس دوم و ایجاد سطر دوم ماتریس جواب:

$-2\times 2 \quad 1\times 0 \quad 3\times 2 \Rightarrow -4+0+6 = 2$

$-2\times -1 \quad 1\times 1 \quad 3\times 1 \Rightarrow 2+1+3 = 6$

سطر سوم ماتریس اول با ستون یک و دو ماتریس دوم و ایجاد سطر سوم ماتریس جواب:

$-1\times 2 \quad 0\times 0 \quad 1\times 2 \Rightarrow -2+0+2 = 0$

$-1\times -1 \quad 0\times 1 \quad 1\times 1 \Rightarrow 1+0+1 = 2$

یک نمونه دیگر از ضرب ماتریس ها :

$$[B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -13 & 4 & 15 \\ -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

روش محاسبه :

سطر اول در ستون اول : درایه a_{11} . سطر اول در ستون دوم : درایه a_{12} .

سطر اول در ستون سوم : درایه a_{13} . ایجاد سطر اول ماتریس جواب .

$2\times 3 \quad 0\times -2 \quad -1\times -1 \Rightarrow 6+0+1=7$

$2\times 1 \quad 0\times 1 \quad -1\times 0 \Rightarrow 2+0+0=2$

$2\times 0 \quad 0\times 3 \quad -1\times 1 \Rightarrow 0+0-1=-1$

سطر دوم در ستون اول : درایه a_{21} . سطر دوم در ستون دوم : درایه a_{22} .

سطر دوم در ستون سوم : درایه a_{23} . ایجاد سطر دوم ماتریس جواب .

$-1\times 3 \quad 5\times -2 \quad 0\times -1 \Rightarrow -3-10+0=-13$

$-1\times 1 \quad 5\times 1 \quad 0\times 0 \Rightarrow -1+5+0=4$

$-1\times 0 \quad 5\times 3 \quad 0\times 1 \Rightarrow 0+15+0=15$

سطر سوم در ستون اول : درایه a_{31} . سطر سوم در ستون دوم : درایه a_{32} .

سطر سوم در ستون سوم : درایه a_{33} . ایجاد سطر سوم ماتریس جواب .

$0\times 3 \quad 1\times -2 \quad 4\times -1 \Rightarrow 0-2-4=-6$

$0\times 1 \quad 1\times 1 \quad 4\times 0 \Rightarrow 0+1+0=1$

$0\times 0 \quad 1\times 3 \quad 4\times 1 \Rightarrow 0+3+4=7$

« حل دستگاه معادلات به روش ماتریس معکوس »

دستگاه معادلات زیر را می‌خواهیم به روش ماتریس معکوس حل کنیم.

چنانچه ماتریس ۱×۱ باشد، یعنی یک سطر و یک ستون، می‌توان به جای استفاده از [کروشه] از {آکولاد} استفاده نمود:

ماتریس مجهولات — ماتریس ضرایب

$$[A]\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A]^{-1}\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

ماتریس معکوس

$$\begin{cases} x + 2z = 5 \\ -x + 3y + z = 2 \\ 2x + z = -4 \end{cases} \Rightarrow [A] = \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{Bmatrix}$$

برای به دست آوردن ماتریس مجهولات کافی است که ابتدا [ماتریس معکوس] را به دست آورده و سپس در ماتریس ضرایب، ضرب کنیم.

اصل کار همین

$$[A]^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.33 & 0 & 0.6 \\ -0.33 & 0.33 & 0.33 \\ 0.67 & 0 & -0.33 \end{bmatrix}}_{3\times 3}\underbrace{\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{Bmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -4.05 \\ -2.31 \\ 4.67 \end{Bmatrix}}_{3\times 1}$$

تمرین: دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

$$\begin{cases} -x-2y+3z=-1 \\ y-2z=5 \\ 3x+2y-4z=10 \end{cases} \Rightarrow [A]=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$[A]=\left[\begin{array}{ccc} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{array}\right]\begin{array}{cc} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}$$

$$|A|=(4+12+0)-(0+4+9) \Rightarrow 4+12-4-9=3$$

$$[A^*]=\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[A^*] = \begin{bmatrix} +(-4-(-4)) & -(0-(-6)) & +(0-3) \\ -(8-6) & +(4-9) & -(-2-(-6)) \\ +(4-3) & -(2-0) & +(-1-0) \end{bmatrix}$$

$$[A^*] = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 \\ -2 & -5 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow [A^*]^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -6 & -5 & -2 \\ -3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|}[A^*]^T \Longrightarrow \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -6 & -5 & -2 \\ -3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

«ماتریس معکوس» $[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.67 & 0.33 \\ -2 & -1.67 & -0.67 \\ -1 & -1.33 & -0.33 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$[A]^{-۱} \begin{Bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \qquad ؛ \quad A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۰٫۴۷ & ۰٫۳۳ \\ -۲ & -۱٫۴۷ & -۰٫۴۷ \\ -۱ & -۱٫۳۳ & -۰٫۳۳ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \begin{Bmatrix} -۱ \\ ۵ \\ ۱۰ \end{Bmatrix}_{۳\times۱} = \begin{Bmatrix} -۰٫۰۵ \\ -۱۳٫۰۵ \\ -۸٫۹۵ \end{Bmatrix}_{۳\times۱}$$

$۰ \times -۱ \quad -۰٫۴۷ \times ۵ \quad ۰٫۳۳ \times ۱۰ \longrightarrow ۰ - ۳٫۳۵ + ۳٫۳ = -۰٫۰۵$

$-۲ \times -۱ \quad -۱٫۴۷ \times ۵ \quad -۰٫۴۷ \times ۱۰ \longrightarrow ۲ - ۸٫۳۵ - ۴٫۷ = -۱۳٫۰۵$

$-۱ \times -۱ \quad -۱٫۳۳ \times ۵ \quad -۰٫۳۳ \times ۱۰ \longrightarrow ۱ - ۶٫۶۵ - ۳٫۳ = -۸٫۹۵$

فصل ۲ : تنش و انواع آن

یادآوری از تنش :

چرا تنش پارامتر مهمی است؟ ولی نیرو پارامتر مهمی نیست در مهندسی عمران ؟!

به این دلیل که هرچه قدر نیرو به مقطع وارد شود ، توسط سطح مقطع موجود و ممان اینرسی آن سطح می توان نیرو را کنترل کرد. بنابراین مقدار نیرو برای ما مهم نیست. هرچه قدر نیرو بزرگ تر باشد ما مقطع بزرگ تری به آن اختصاص می دهیم تا جایی که تنش آن در حد تنش مجاز مصالح مصرفی ما باشد.

بنابراین تنش کمیت ثانویه بوده و نیرو کمیت اولیه می باشد. وظیفه ما کنترل تنش است. به همین علت تنش می شود یکی از مهم ترین پارامتر های مهندسی عمران که تمام طراحی ها براساس همین میزان تنش صورت می گیرد.

* تنش به علت اینکه ناشی از دو کمیت نیرو و خواص سطوح است $\left(\sigma = \frac{P}{A}\right)$ قابل کنترل بوده. بنابراین به عنوان پارامتر طراحی در مهندسی عمران در نظر گرفته شده.

* ما در یک مقطع ، ۲ نوع تنش داریم :

P : نیرو وارده

تنش محوری : $\sigma = \dfrac{P}{A}$

A : مساحت سطح مقطع

M : لنگر خمشی

تنش خمشی : $\sigma = \dfrac{MY}{I} = \dfrac{M}{S}$

Y : دورترین فاصله نسبت به تار خنثی

I : ممان اینرسی

V : نیروی برشی

Q : ممان استاتیک

b : عرض مقطع

T : گشتاور پیچشی

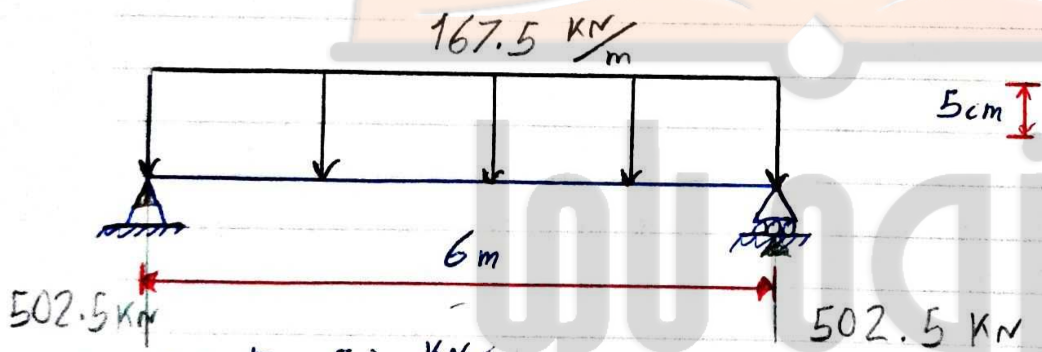
c : دورترین فاصله تا تار خنثی

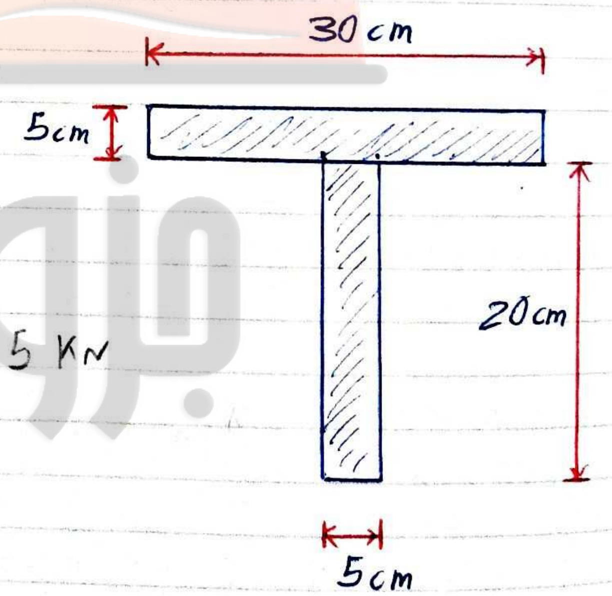
J : ممان اینرسی پیچشی

تنش برشی : $\tau = \dfrac{VQ}{Ib}$

تنش برشی ناشی از پیچش : $\tau = \dfrac{Tc}{J}$

مثال (یادآوری) : تیر دوسر مفصلی با طول ۶ متر دارای بار گسترده ای مطابق شکل وجود دارد. ماکزیمم تنش های خمشی و برشی را برای این تیر به دست آورید. این تیر دارای مقطع T شکل است.





$D = 50 \ \frac{KN}{m}$ (بار مرده)

$L = 70 \ \frac{KN}{m}$ (بار زنده)

* به واحدها و تبدیل واحدها توجه شود.

حل : تیر دوسر مفصل و بار یکنواخت گسترده مستطیلی به آن وارد شده که آسان ترین سوال به حساب می آید؛ ولی معمولاً بارگذاری ها به صورت پیچیده تری به تیر اعمال می شود که نیاز باشد حتماً دیاگرام گشتاور رسم شود و با توجه به دیاگرام گشتاور

لنگر ماکزیمم و برش ماکزیمم به دست آید. «تحلیل سازه»

در این مثال، لنگر و نیروی برشی به سهولت به دست می‌آید، با توجه به تحلیل سازه‌ها.

مرحله ① به دست آوردن مقدار بار گسترده.

بار مرده — بار زنده

«ترکیب بار مقدار بار گسترده ثقلی» $w_u = 1.25D + 1.5L$

$$w_u = 1.25(50) + 1.5(70) = 167.5 \ \frac{kN}{m}$$

مرحله ② یافتن ماکزیمم برش و خمش از تحلیل.

مقدار بار گسترده وارده به تیر $167.5 \frac{kN}{m}$ است؛ به هر تکیه‌گاه چه مقدار می‌رسد؟

* برش ماکزیمم یا همان حداکثر میزان برشی در محل تکیه‌گاه رخ می‌دهد.

مساحت بار گسترده مستطیلی

«حداکثر میزان برش» «برش ماکزیمم»

$$V_{max} = \frac{(167.5 \times 6)}{2} = 502.5 \ kN$$

در تیر دوسر ساده به همراه بار گسترده، لنگر ماکزیمم از رابطه زیر به دست می‌آید.

«حداکثر لنگر خمشی» «لنگر ماکزیمم»

$$M_{max} = \frac{w_u l^2}{8} = \frac{167.5 \times 6^2}{8} = 753.75 \ kN.m$$

مرحله ③ به دست آوردن خواص سطح.

ممان اینرسی، ممان استاتیک را برای استفاده از رابطه تنش خمشی و تنش برشی لازم داریم.

طبق خواسته صورت سؤال 8

«تنش خمشی» $\sigma = \frac{M Y}{I}$

«تنش برشی» $\tau = \frac{V Q}{I b}$

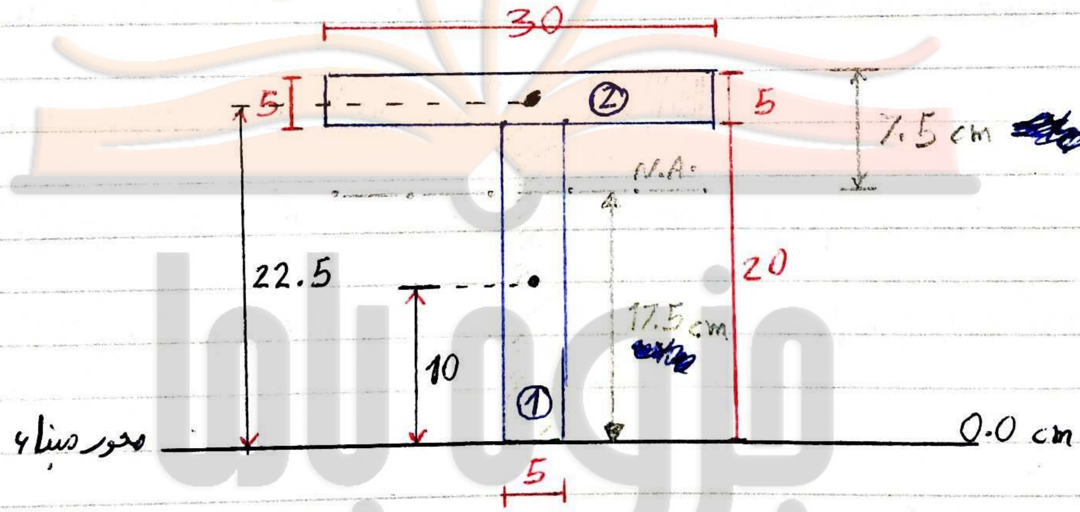
برای محاسبه ممان اینرسی (I) و ممان استاتیک (Q) ، نیاز داریم که مرکز سطح مقطع را به دست آوریم ($\bar{Y}$) و محل تار خنثی ، برای محاسبه ($\bar{Y}$) با مقطع مرکب از رابطه زیر باید استفاده کرد :

فاصله قائم مرکز سطح هر شکل تا محور مبنا ، مقطع   مساحت هر شکل

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}$$

برای محاسبه مرکز سطح ابتدا مقطع را مجزا فرض کرده و نام گذاری می کنیم (شکل ① و شکل ②).

سپس باید یک محور مبنا در نظر بگیریم که می توان دورترین تار مقطع در پایین یا بالای مقطع در نظر گرفت که در اینجا ما دورترین تار پایینی مقطع را به عنوان محور خط مبنا در نظر می گیریم. برای هر شکل به صورت جدا ، مساحت و مرکز سطح نسبت به محور مبنا را محاسبه می کنیم.



شکل ①
$$\begin{cases} A_1 = 5\,(cm) \times 20\,(cm) = 100\ cm^2 \\ \bar{y}_1 = 10\ cm \longrightarrow d_1 = 17.5 - 10 = 7.5\ cm \end{cases}$$

شکل ②
$$\begin{cases} A_2 = 5\,(cm) \times 30\,(cm) = 150\ cm^2 \\ \bar{y}_2 = 22.5\ cm \longrightarrow d_2 = 22.5 - 17.5 = 5\ cm \end{cases}$$

اعداد به دست آمده را در رابطه سطح مقطع ($\bar{y}$) وارد می کنیم. برای کنترل محاسبه باید دقت شود که مقدار ($\bar{y}$) از ارتفاع مقطع بیش تر نشود و با توجه به شکل مقطع و حس و مفهوم از یک مقدارم پایین تر نیاید. مثلاً در این مقطع، اندازه یا محل ~~مقطع~~ مرکز سطح نباید از 25cm بیش تر و حدوداً از 10cm کم تر هم نباشد. # به واحد ها توجه شود.

«محل مرکز سطح مقطع نسبت به محور مبنا» :

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A_i \bar{y}_i}{\Sigma A_i} = \frac{(100 \times 10) + (150 \times 22.5)}{(100 + 150)} = 17.5\ cm$$

تار خنثی (N.A.) : نچرال اکسیس، تار یا محوری است که هیچ گونه نیروی به آن وارد نمی شود. یعنی به عنوان نمونه نیروی کششی و نیروی فشاری یکدیگر را روی تار خنثی ما خنثی می کنند. بالا و پایین مقطع دارای ممان استاتیک یکسان و برابری است.

در مسائل تار خنثی را به شکل نقطه - خط نمایش می دهند ـــــ . ـــــ N.A. ـــــ . ـــــ

کاربرد تار خنثی در کجاست؟! ما قصد محاسبه ممان اینرسی (I) و ممان استاتیک (Q) را داریم «با توجه با فرمول». ممان استاتیک را با حرف (Q) نمایش داده که در محاسبه تنش برشی (τ) به آن نیاز داریم. ممان استاتیک، گشتاور اول سطح می باشد.

$$Q = A \cdot \bar{y} \quad \text{«ممان استاتیک»}$$

ممان اینرسی خمشی را با حرف (I) نشان داده که در واقع گشتاور دوم سطح می باشد.

$$I = \frac{1}{12} b h^3 \quad \text{«ممان اینرسی در مقاطع مستطیلی»}$$

«ممان اینرسی در مقاطع مرکب مستطیلی»

$$I = \frac{1}{12} b h^3 + A d^2$$

* d : فاصله تار خنثی هر شکل نسبت به تار خنثی شکل اصلی (کلی) ، با توجه به محور مبناء.

الان تار خنثی شکل ① هست : $\bar{y}_1 = 10cm$ و تار خنثی مقطع کلی هست : $\bar{y} = 17.5cm$

بنابراین : $d_1 = 17.5 - 10 = 7.5\ cm$

هم چنین تار خنثی شکل ② هست : $\bar{y}_2 = 22.5\ cm$ و تار خنثی شکل اصلی هست : $\bar{y} = 17.5cm$

بنابراین : $d_2 = 22.5 - 17.5 = 5\ cm$

این کار برای محاسبه ممان اینرسی لازم بود. حالا دو ممان اینرسی باید محاسبه کرد ،

یکی برای شکل ① و دیگری برای شکل ② : «محاسبه ممان اینرسی»

$$I_1 = \frac{1}{12}\overset{\text{عرض}}{b_1}\,\overset{\text{ارتفاع}}{h_1^3} + \overset{\text{مساحت}}{A_1}\,d_1^2 \Longrightarrow \frac{1}{12}(5cm)(20\,cm)^3 + (100\ cm^2)(7.5\ cm)^2$$

$$I_2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 d_2^2 \Longrightarrow \frac{1}{12}(30\ cm)(5\ cm)^3 + (150\ cm^2)(5cm)^2$$

«ممان اینرسی شکل ①» $I_1 = 8958\ \ cm^4$

«ممان اینرسی شکل ②» $I_2 = 4062\ \ cm^4$

طبق قضیه انتقال در ممان اینرسی محاسبات فوق را انجام دادیم. به عبارتی یعنی ممان اینرسی هر شکل را به تار خنثی اصلی مقطع کل انتقال دادیم. اگر ممان اینرسی ها را باهم جمع کنیم ، ممان اینرسی کل مقطع به دست می آید.

«ممان اینرسی کل مقطع» $I = 13020\ \ cm^4$: $cm^4 \xrightarrow{\times 10^{-8}} m^4$

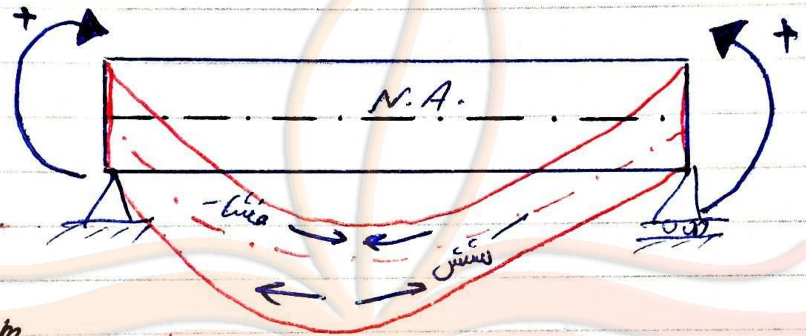
$cm \xrightarrow{\times 10^{-2}} m$: $(10^{-2})^4 = 0/00000001$

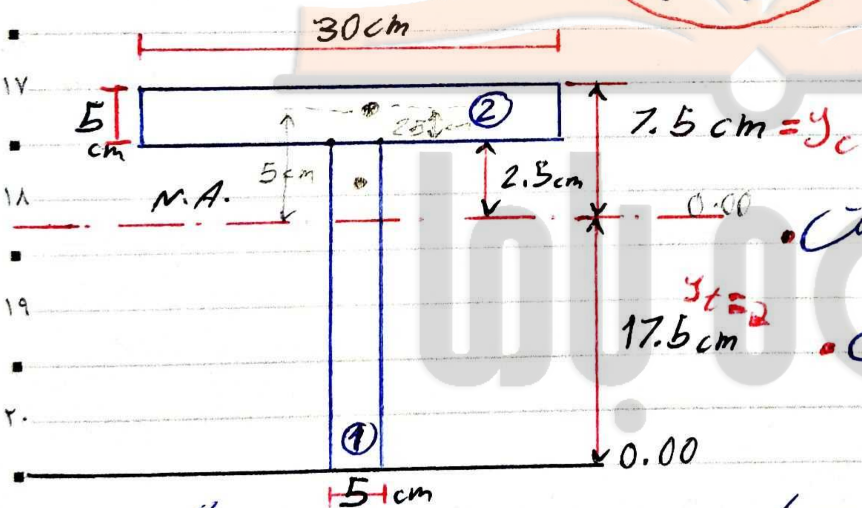
$Q = A \cdot \bar{Y}$

در ادامه باید ممان استاتیک را محاسبه کنیم:

ممان استاتیک بالا و پایین تار خنثی مقطع با هم برابر هستند، چون مثلاً اگر لنگر خمشی مثبت باشد، بالای مقطع تحت فشار قرار می‌گیرد و پایین مقطع تحت کشش.

بنابراین اگر تار خنثی بخواهد که در محل خودش ثابت باشد؛ باید حتماً ناحیه کششی و ناحیه فشاری یکدیگر را خنثی کنند. درصورتی هم دیگر را خنثی می‌کنند که ممان استاتیک بالا و ممان استاتیک پایین مقطع «تار خنثی» با یکدیگر برابر باشند.





بالا و پایین یعنی چه؟

* تیر دوسر ساده، دارای لنگر مثبت است.

* تیر گیردار، دارای لنگر منفی است.

برای محاسبه ممان استاتیک باید یک بار ممان استاتیک قسمت فشاری مقطع و بار دیگر ممان استاتیک قسمت کششی مقطع را حساب کرد. ممان استاتیک ناحیه فشاری و ناحیه کششی مقطع که طبق شکل مقطع فوق و نوع تکیه‌گاه‌های تیر (دوسر مفصل ساده)، شکل زیر پایین تار خنثی مقطع به کشش افتاده و بالای تار خنثی مقطع به فشار.

«ممان استاتیک شکل ①» $Q_1 = A_1 \bar{y}_1 \xrightarrow[\text{کششی}]{\text{ناحیه}} Q_1 = (5 \times 17.5) \times (\frac{17.5}{2}) = 765\ cm^3$

۲ شکل داریم

«ممان استاتیک شکل ②» $Q_2 = (A_2 \bar{y}_2)^2 \xrightarrow[\text{فشاری}]{\text{ناحیه}} Q_2 = (2.5 \times 5 \times \frac{2.5}{2}) + (5 \times 30 \times 5) = 765\ cm^3$

$cm^3 \xrightarrow{\times 10^{-6}} m^3$, 8 $(10^{-2})^3$

اگر برای محاسبات به ممان استاتیک نیاز بود می توان فقط ممان استاتیک شکل ① که راحت تر است

را محاسبه نمود. حالا که ماکزیمم برش و ماکزیمم خمش و ممان اینرسی و ممان استاتیک را داریم

می توانیم وارد به محاسبات تنش شویم.

ناحیه کششی

* فاصله محور تار خنثی تا تار پایینی مقطع (محور مبنا) که در ناحیه کششی قرار دارد: $y_t = 17.5\ cm$

* فاصله محور تار خنثی تا تار بالایی مقطع که در ناحیه فشاری قرار دارد: $y_c = 7.5\ cm$

ناحیه فشاری

مرحله ⑥ محاسبه انواع تنش های خواسته شده. به تبدیل واحدها توجه شود.

«تنش کششی» $\sigma_t = \frac{M\, y_t}{I} \Rightarrow \frac{753.75 \times 10^3 (N.m) \times 17.5 \times 10^{-2} (m)}{13020 \times 10^{-8} (m^4)} \xrightarrow{\text{ساده سازی}}$

$\sigma_t = \frac{753.75 \times 17.5}{13020} \times 10^9 = 1.013 \times 10^9 \ (\frac{N}{m^2}) = (Pa)$

$\xrightarrow{\times 10^{-3}}$ 1.013×10^6 (KPa)

$\xrightarrow{\times 10^{-6}}$ 1.013×10^3 (MPa)

«تنش فشاری» $\sigma_c = \frac{M\, y_c}{I} \Rightarrow \frac{753.75 \times 10^3 (N.m) \times 7.5 \times 10^{-2} (m)}{13020 \times 10^{-8} (m^4)} \xrightarrow{\text{ساده}}$

$\sigma_c = \frac{753.75 \times 7.5}{13020} \times 10^9 = 0.434 \times 10^9 \ (\frac{N}{m^2}) = (Pa)$

0.434×10^6 (KPa)

0.434×10^3 (MPa)

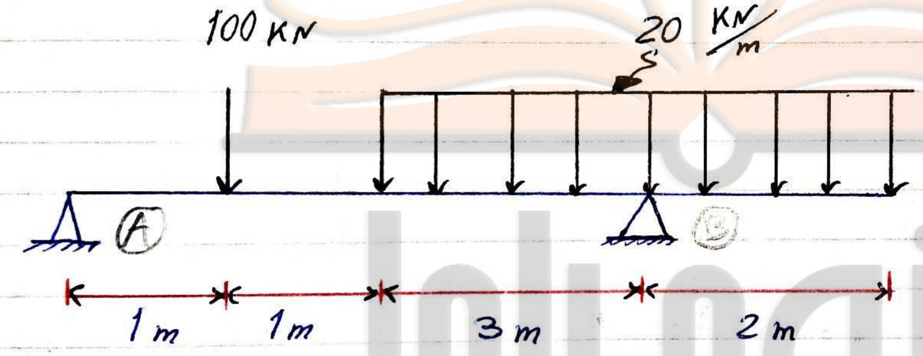
«تنش برشی» $\tau = \dfrac{VQ}{Ib} \Rightarrow \dfrac{502.5\times10^{3}(N)\times 765\times10^{-6}(m^3)}{13020\times10^{-8}(m^4)\times 5\times10^{-2}(m)} \xRightarrow{\text{ساده}}$

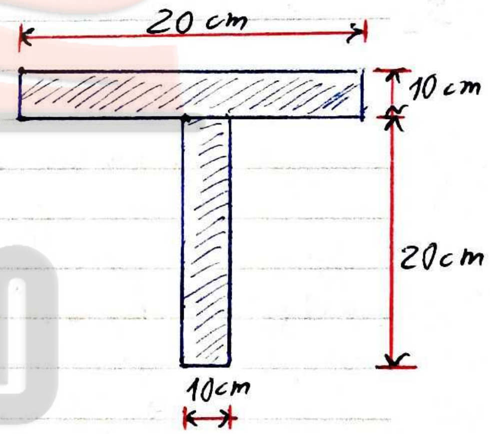
$\tau = \dfrac{502.5\times765}{13020\times5}\times10^{7} = 5.904\times10^{7}\left(\dfrac{N}{m^2}\right) = Pa$

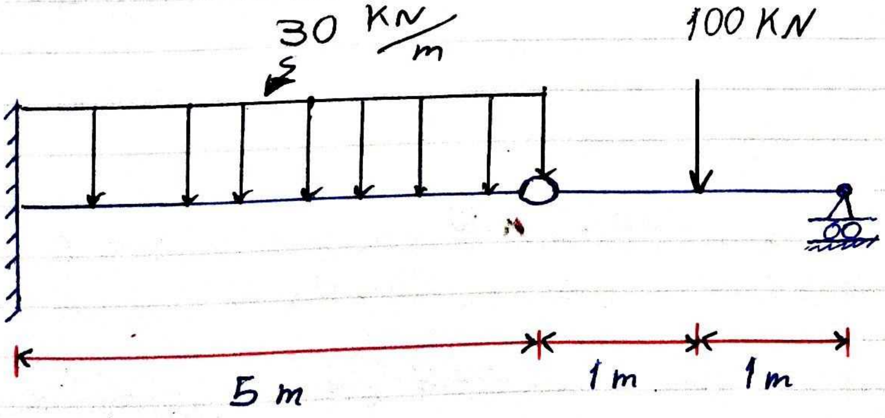
$5.904\times10^{4}\ (KPa)$ $\quad (\times10^{-3})$

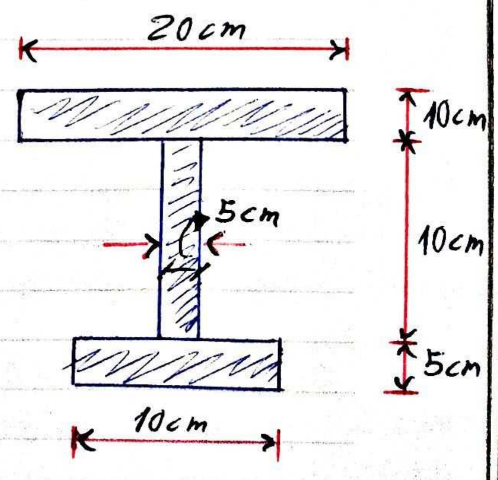
$5.904\times10\ (MPa)$ $\quad (\times10^{-6})$

تمرین) تنش های خمشی «تنش فشاری و تنش کششی» و برشی را برای تیر و مقطع زیر تعیین کنید









کرنش :

در مقابل تنش، پارامتری داریم به نام کرنش. کرنش واکنش مقطع در مقابل تنش است. یعنی وقتی به یک مقطع تنشی وارد می‌شود، آن مقطع دچار تغییر شکل شده و برای کنترل این تغییر شکل باید آن را با صورت کرنش تعریف کنیم.

کرنش یعنی تغییرات طول نسبت به طول اولیه، کمیت حجم به حجم اولیه، کمیت زاویه به زاویه اولیه. یا مثلاً کرنش طولی، کرنش حجمی، کرنش برشی و ...

اگر میله ای را در نظر بگیریم که تحت تأثیر نیروی کششی (P) قرار گرفته باشد، و طول میله (L) و به اندازه (ΔL) افزایش طول داشته باشد، کرنش طولی و تنش می شود:

(کرنش طولی) $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L}$

(تنش) $\sigma = \dfrac{P}{A}$

با توجه به قانون هوک: $\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$ اگر بخواهیم (ΔL) را به دست آوریم:

«کرنش طولی» $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \varepsilon L = \dfrac{\sigma L}{E} = \dfrac{P \cdot L}{E \cdot A}$

کرنش طولی: کرنشی است که در راستای اعمال بار اتفاق می افتد.

کرنش جانبی: این کرنش زمانی اتفاق می افتد که مثلاً شما یک اسفنج را در نظر بگیرید که از دو طرف آن را می کشیم، که با این حرکت افزایش طول داشته و کمر اسفنج باریک می شود. لاغر

این افزایش طول در راستای طولی باعث می شود که کمر این اسفنج لاغر شود. این می شود مثال کرنش جانبی.

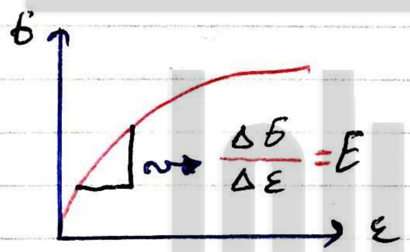
در واقع ما در راستای عرضی (جانبی)، نیرویی وارد نکردیم. در راستای طولی اسفنج را کشیدیم و عرض اسفنج کم شده، یعنی بر اثر بار طولی، در یک راستای دیگر (جانبی) کم شده که به آن کرنش جانبی می گویند و به صورت زیر می باشد: «ضریب پواسون»

«ضریب پواسون، نو» $\nu = -\dfrac{\varepsilon_{\text{جانبی}}}{\varepsilon_{\text{طولی}}}$

چرا منفی در رابطه بالا وجود دارد؟ چون وقتی کرنش طولی مثبت باشد، کرنش جانبی منفی خواهد بود و برعکس.

* به مدول الاستیسیته (E) و ضریب پواسون (ν)، پارامترهای ارتجاعی گفته می شود.

ضریب پواسون، عددی است که از آزمایش به دست می آید ولی مدول الاستیسیته عددی است که از شیب نمودار تنش - کرنش به دست می آید. آزمایش کشش میلگرد



در ادامه قانون هوک در فضای سه بعدی را شرح می دهیم که هم زمان کرنش طولی و کرنش جانبی خواهیم داشت. به شکل و روابط صفحه بعد توجه کنید.

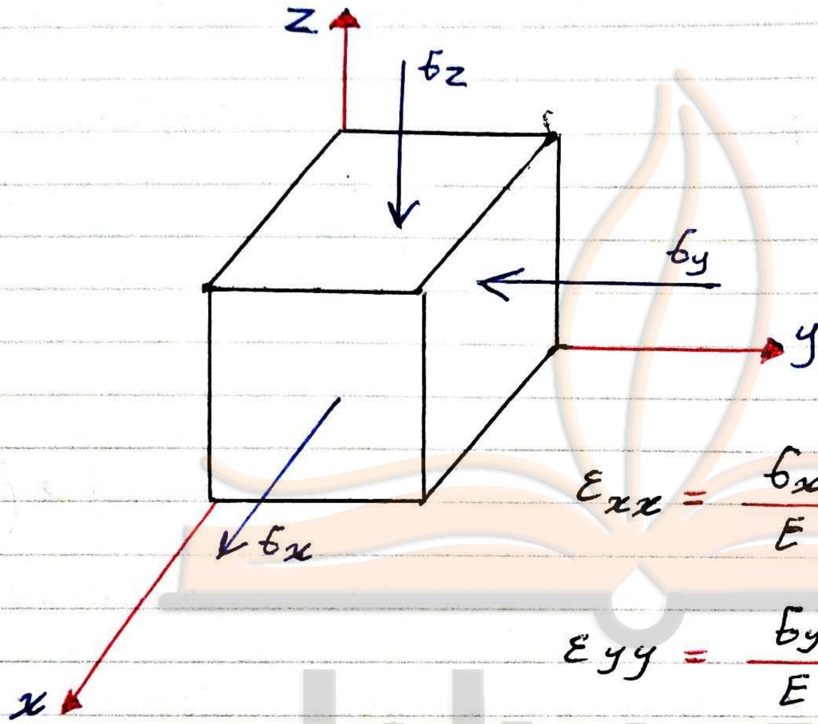
* نیروهای وارده کششی را با علامت مثبت (+) در نظر گرفته و نیروهای وارده فشاری را با علامت منفی (−) در نظر می گیریم. این قانون در تئوری الاستیسیته است.

کلاً در سازه جهت اعمال بار و علامت آن به صورت فوق که گفته شد می باشد.

قانون هوک در فضای ۳ بُعدی : در حالت سه بُعدی

در فضای ۳ بُعدی ما σ_x و σ_y و σ_z داریم که فشاری ها منفی و کششی ها مثبت هستند.

هرکدام از تنش های فوق در راستای خودشان تولید کرنش طولی کرده و در دو راستای دیگر تولید کرنش جانبی می کنند. فرمول قانون هوک در فضای سه بُعدی:

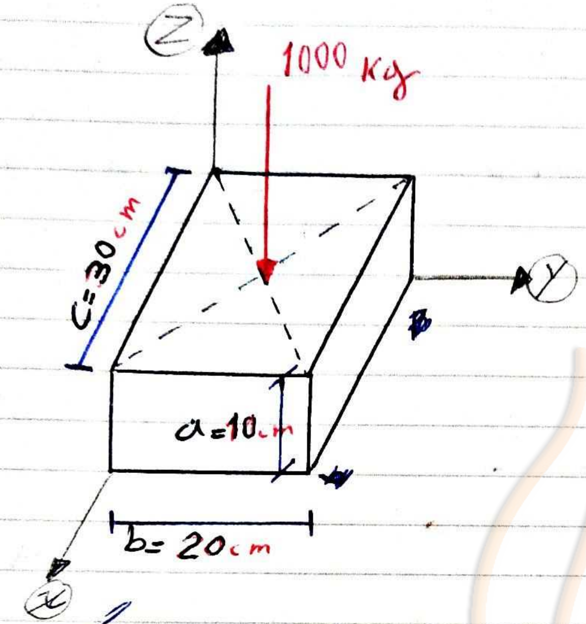


$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

مثال) حجم تغییر یافته مکعب زیر را با توجه به شکل و اطلاعات داده شده به دست آورید.



$E = 20 \ \frac{Kg}{cm^2}$

$\nu = 0.3$

حجم ثانویه این مکعب؟

حل) در این مثال بارگذاری فقط در یک راستا اعمال شده است. طبق بارگذاری انجام شده باید تشخیص دهیم که در کدام راستا کرنش طولی ایجاد شده و در کدام راستاها کرنش جانبی. با توجه به شکل و جهت بارگذاری فوق، در راستای a کرنش طولی خواهیم داشت و b و c می شوند کرنش های جانبی. جهت پیکان رو به پایین است و بار وارده از نوع فشاری می باشد که باید همراه با علامت منفی در محاسبات وارد گردد.

تنش طولی: $\sigma_a = \frac{P}{A} \Rightarrow \frac{-1000 \ Kg}{20 \ cm \times 30 \ cm} = \frac{-1000 \ Kg}{600 \ cm^2} = -1.67 \ \frac{Kg}{cm^2}$

کرنش طولی: $\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} \Rightarrow \frac{-1.67 \ \frac{Kg}{cm^2}}{20 \ \frac{Kg}{cm^2}} = -0.08$

حالا باید مقدار تغییر طول $a = 10cm$ را در راستای محور (Z) به دست آوریم.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow -0.08 = \frac{\Delta L_a}{\underbrace{L_a}_{10cm}} \Rightarrow \Delta L_a = -0.08 \times 10cm = -0.8cm$$

«ضلع a پس از تغییر شکل» $a' = l_a + \Delta l_a \Rightarrow a' = 10cm + (-0.8cm) = 9.2cm$

تا این جا کرنش طولی یا همان کرنش محوری را حساب کردیم ، در ادامه باید دو کرنش جانبی را با دست آوریم.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{جانبی}}}{\varepsilon_{\text{طولی}}} \Rightarrow 0.3 = \cancel{-}\frac{\varepsilon_{\text{جانبی}}}{\cancel{-}0.08} \Rightarrow \varepsilon_{\text{جانبی}} = \underbrace{\varepsilon_b = \varepsilon_c}_{\text{کرنش های جانبی}} = 0.024$$

حالا باید تغییر طول دو ضلع دیگر را با توجه به کرنش جانبی محاسبه شده را به دست آوریم.

$$\varepsilon_b = \frac{\Delta L_b}{L_b} \Rightarrow 0.024 = \frac{\Delta L_b}{20cm} \Rightarrow \Delta L_b = 0.024 \times 20cm = 0.48cm$$

«ضلع b پس از تغییر شکل» $b' = l_b + \Delta l_b \Rightarrow b' = 20cm + 0.48cm = 20.48cm$

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta L_c}{L_c} \Rightarrow 0.024 = \frac{\Delta L_c}{30cm} \Rightarrow \Delta L_c = 0.024 \times 30cm = 0.72cm$$

«ضلع c پس از تغییر شکل» $c' = l_c + \Delta L_c \Rightarrow c' = 30cm \times 0.72cm = 30.72cm$

در این مرحله به سراغ حجم اولیه و ثانویه این مکعب می رویم:

«حجم اولیه» $V = 10 \times 20 \times 30 = 6000\ cm^3$

«حجم ثانویه یا تغییر یافته» $V' = 9.2 \times 20.48 \times 30.72 = 5788\ cm^3$

«تغییرات حجم پس از کرنش» $\Delta V = 6000 - 5788 = 212\ cm^3$

«معادلات دیفرانسیل در حالت تعادل»

حالت تعادل وقتی است که برآیند نیروها صفر باشد.

سه محور داریم، بنابراین سه معادله تعادل خواهیم داشت. اینجا تانسور تنش هستند که نه تا می باشند. تنش ها نیروهای داخلی بوده و یک سری نیروهای حجمی نیز داریم.

رند (مشتق جزئی)

$$\text{①}\quad \underbrace{\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}}_{\text{نیروهای داخلی}} + \underbrace{f_{x_1}}_{\text{نیروی خارجی}} = 0$$

$$\text{②}\quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_{x_2} = 0$$

$$\text{③}\quad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_{x_3} = 0$$

تانسور یا همان ماتریس تنش متقارن بوده و درایه های قطر اصلی آش، مجموعشان ثابت است.

قطر اصلی

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

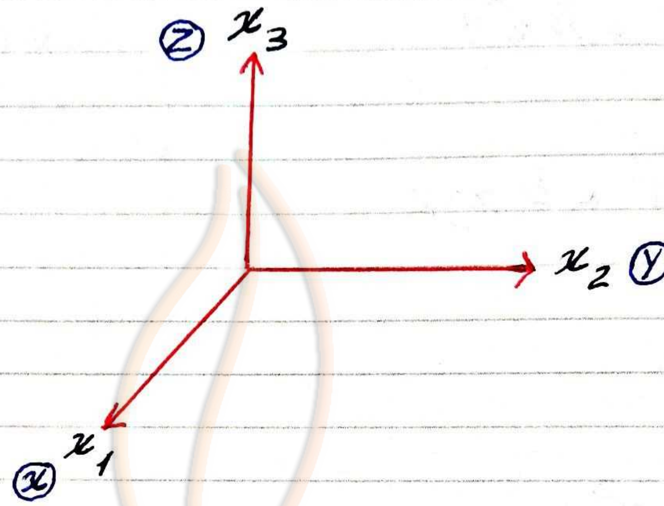
* این ماتریس نسبت به قطر اصلی متقارن است.

$$\text{trace}\,[\sigma] = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \theta \rightarrow \text{تنش حجمی}$$

زیگما تریس

* چون ماتریس تنش متقارن است، فرقی ندارد و مثلاً درایه 12 با درایه 21 برابر است.

* روابط صفحه قبل با توجه به ۳ محور x و y و z نوشته شده (در حالت سه بعدی)
که با حروف x_1 و x_2 و x_3 در روابط صفحه قبل نمایش داده شده است.



معادله دیفرانسیل در حالت تعادل، به این صورت هم نوشته می‌شود:

$$① \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$② \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$③ \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$f_{x_n} = ?$

مثال) وضعیت تنش در جسمی به صورت زیر است. مطلوب است تعیین نیروهای حجمی در این جسم. سپس تانسور تنش و نیروهای حجمی را در نقطه $(0, 1, -2)$ تعیین کنید.

$$\sigma_{xx} = xyz^2 - 2xy$$

$$\sigma_{xy} = x^2 z + 5x^3 y$$

$$\sigma_{yy} = 16y^2 + 5xyz$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zz} = 6z^3 y$$

$$\sigma_{xz} = 15x^2 z + 5y^2 x$$

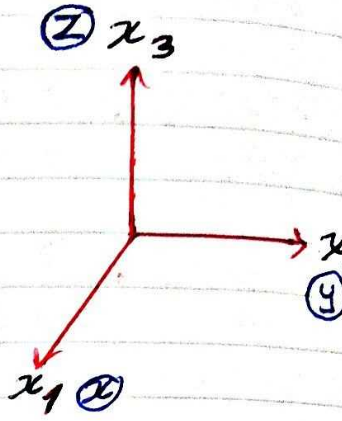
حل) ۶ مؤلفه مستقل را به ما داده و ۳ مؤلفه نیروهای خارجی یا همان نیروهای حجمی را از ما می‌خواهد.
ابتدا معادلات دیفرانسیل در حالت تعادل را می‌نویسیم، همان طور که مشاهده می‌کنید، تنش‌ها را به صورت پارامتری می‌دهد که بتوان از آنها مشتق گرفت و سپس در رابطه تعادل جایگذاری کرده و پارامترهای مجهولی که احتیاج داریم را به دست آوریم.

معادلات دیفرانسیل در حالت تعادل :

① $\dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_{x_1} = 0$

② $\dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_{x_2} = 0$

③ $\dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_{x_3} = 0$



مشتق گیری با توجه با رابطه فوق و تنش های داده شده :

معادله اول :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial (xyz^2-2xy)}{\partial x} = yz^2-2y$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \rightarrow \frac{\partial xy}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial (x^2z+5x^3y)}{\partial y} = 5x^3$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \rightarrow \frac{\partial xz}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial (15x^2z+5y^2x)}{\partial z} = 15x^2$$

در معادله ① دیفرانسیل حالت تعادل جایگذاری می کنیم :

① $yz^2-2y+5x^3+15x^2+f_{x_1}=0$ نیروی تعادل در راستای x :

$f_{x_1} = 2y - yz^2 - 5x^3 - 15x^2$

« نیروی حجمی در راستای x »

$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

معادله دوم 8

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial (x^2 z + 5x^3 y)}{\partial x} = 2xz + 15x^2 y$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial (16y^2 + 5xyz)}{\partial y} = 32y + 5xz$$

$$\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial (0)}{\partial z} = 0$$

در معادله ② حالت تعادل جایگذاری می کنیم:

نیروهای تعادل در راستای y:

$$② \quad 2xz + 15x^2y + 32y + 5xz + 0 + f_{x_2} = 0$$

نیروی حجمی در راستای y

$$f_{x_2} = -2xz - 15x^2y - 32y - 5xz$$

خاصیت تقارن ماتریس $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$

معادله سوم:

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial (15x^2 z + 5y^2 x)}{\partial x} = 30xz + 5y^2$$

$$\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial (0)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial (6z^3 y)}{\partial z} = 18z^2 y$$

در معادله ③ حالت تعادل جایگذاری می کنیم:

نیروهای تعادل در راستای z:

$$③ \quad 30xz + 5y^2 + 0 + 18z^2y + f_{x_3} = 0$$

$$f_{x_3} = -30xz - 5y^2 - 18z^2y$$

« نیروی حجمی در راستای z »

طبق خواسته سؤال ، نیروهای حجمی را بدست آوردیم:

$$f_{x_1} = f_x = 2y - yz^2 - 5x^3 - 15x^2$$

$$f_{x_2} = f_y = -7xz - 15x^2y - 32y$$

$$f_{x_3} = f_z = -30xz - 5y^2 - 18z^2y$$

تعیین کردن تانسور تنش و نیروهای حجمی در نقطه 0 و 1 و 2-:

(0 و 1 و 2-)

$x \quad y \quad z$

ضابطه

بدست آوردن یا تعیین کردن تانسور تنش یعنی مثلاً در همین مثال: در تنش های داده شده

$x=0$ ، $y=1$ ، $z=-2$ را جایگذاری کرده و به یک عدد می رسیم:

$$\sigma_{xx} = xyz^2 - 2xy \longrightarrow \sigma_{xx} = (0)(1)(-2)^2 - 2(0)(1) = 0$$

$$\sigma_{xy} = x^2z + 5x^3y \longrightarrow \sigma_{xy} = (0)^2(-2) + 5(0)^3(1) = 0$$

$$\sigma_{yy} = 16y^2 + 5xyz \longrightarrow \sigma_{yy} = 16(1)^2 + 5(0)(1)(-2) = 16$$

$$\sigma_{yz} = 0 \longrightarrow \sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zz} = 6z^3y \longrightarrow \sigma_{zz} = 6(-2)^3(1) = -48$$

$$\sigma_{xz} = 15x^2z + 5y^2x \longrightarrow \sigma_{xz} = 15(0)^2(-2) + 5(1)^2(0) = 0$$

تانسور تنش :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -48 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

نسبت به قطر اصلی درایه ها تقارن دارند پس درست محاسبه شده.

نقطه داده شده را در ضابطه نیروهای حجمی جایگذاری می کنیم : $(\underset{x}{0}\ ,\ \underset{y}{1}\ ,\ \underset{z}{-2})$

$$f_x = 2y - yz^2 - 5x^3 - 15x^2$$

$$f_x = 2(1) - (1)(-2)^2 - 5(0)^3 - 5(0)^2 = -2$$

$$f_y = -7xz - 15x^2y - 32y$$

$$f_y = -7(0)(-2) - 15(0)^2(1) - 32(1) = -32$$

$$f_z = -30xz - 5y^2 - 18z^2y$$

$$f_z = -30(0)(-2) - 5(1)^2 - 18(-2)^2(1) = -77$$

$$\begin{cases} f_x = -2 \\ f_y = -32 \\ f_z = -77 \end{cases}$$ نیوهای حجمی :

تمرین) در فضای تنشی زیر، نیروهای حجمی را تعیین کرده و تانسور تنش را در نقطه $(1,1,-1)$ تعیین کنید.

$$\sigma_{11} = 4x_1^2 x_2 x_3 - 5x_3^3$$

$$\sigma_{12} = 5x_1 x_2^2 - 6x_3$$

$$\sigma_{13} = 4x_1^3 - 5x_2$$

$$\sigma_{22} = 6x_1 x_2^3 - 5x_3$$

$$\sigma_{33} = 6x_3^3 x_2 x_1$$

$$\sigma_{23} = 0$$

مثال (دهم): فرض کنید وضعیت تنش در جسمی به صورت زیر است. اگر نیروهای حجمی را صفر در نظر بگیریم و جسم در حالت تعادل باشد، مطلوب است:

تعیین تنش σ_{xy} در حالتی که $\sigma_{xy}(0,0,0)=0$ باشد.

تانسور تنش را در نقطه $(-1,2,5)$ تعیین کنید.

$$\sigma_{xx} = y^2 + \nu(x^2 - y^2)$$

$$\sigma_{yy} = x^2 + \nu(y^2 - x^2)$$

$$\sigma_{zz} = x^2 + y^2$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{xy} = ?$$

$$\sigma_{xy}(0,0,0) = 0$$ (شرط مرزی)

حل) معادلات دیفرانسیل در حالت تعادل را می نویسیم: طبق صورت سؤال: $f_x = f_y = f_z = 0$

صفر (طبق مثال)

$$\begin{cases} ① & \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ ② & \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ ③ & \dfrac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

معادله اول:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial(\nu x^2 - \nu y^2)}{\partial x} = 2x\nu$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial (0)}{\partial z} = 0$$

جایگذاری در معادله اول:

$$2x\nu + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + 0 + 0 = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -2x\nu$$

* پس اگر از τ_{xy} نسبت به y مشتق گرفته شود، می شود $-2x\nu$. بنابراین خود τ_{xy} می شود انتگرال $\int -2x\nu\, dy$:

$$\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy = \int (-2x\nu)\, dy \Longrightarrow \tau_{xy} = \int (-2x\nu)\, dy = (-2x\nu)y + c$$

معادله دوم:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial(\nu y^2 - \nu x^2)}{\partial y} = 2y\nu$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial (0)}{\partial z} = 0$$

جایگذاری در معادله دوم:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + 2y\nu + 0 + 0 = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = -2y\nu$$

* نسبت به x باید انتگرال بگیریم.

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$$\int \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}\, dx = \int (-2y\nu)\, dx \Longrightarrow \tau_{yx} = \int (-2y\nu)\, dx = (-2y\nu)x + C$$

معادله سوم:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial (0)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial (0)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \longrightarrow \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial z} = 0$$

جایگذاری در معادله سوم:

$$0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

* از معادله اول و معادله دوم داریم که: $\tau_{yx} = \tau_{xy} = -2\nu xy + C$

حال قصد داریم (C) را که یک عدد ثابت است را حذف کنیم. برای این کار از شرایط مرزی که صورت سوال با ما داده باید استفاده کنیم: $\tau_{xy}(\overset{x}{0},\overset{y}{0},\overset{z}{0}) = 0$

$$\tau_{xy} = -2\nu(0)(0) + C \longrightarrow \tau_{xy} = 0 + C \longrightarrow 0 = 0 + C \qquad \boxed{C=0}$$

بنابراین τ_{xy} می‌شود:

$$\tau_{xy} = -2\nu xy$$

در ادامه سوال از ما خواسته شده که در نقطه $(\underset{x}{-1}, \underset{y}{2}, \underset{z}{5})$ تانسور تنش را به دست آوریم:

$$\overset{x}{-1},\ \overset{y}{2},\ \overset{z}{5}$$

$\sigma_{xx} = y^2 + \nu(x^2 - y^2) \longrightarrow (2)^2 + \nu((-1)^2 - (2)^2) = 4 - 3\nu$

$\sigma_{yy} = x^2 + \nu(y^2 - x^2) \longrightarrow (-1)^2 + \nu((2)^2 - (-1)^2) = 1 + 3\nu$

$\sigma_{zz} = x^2 + y^2 \longrightarrow (-1)^2 + (2)^2 = 5$

$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \longrightarrow 0$

$\sigma_{xy} = -2\nu xy \longrightarrow -2\nu(-1)(2) = 4\nu$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \longrightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} 4-3\nu & 4\nu & 0 \\ 4\nu & 1+3\nu & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس تنش متقارن است؛ بنابراین محاسبات صحیح است.

قرارداد تنش های محوری و برشی :

در ماتریس تنش، شش مولفه مستقل داریم که می توانیم در المان تنشی مکعبی در حالت سه بعدی به صورت زیر نمایش داد.

طبق قانون دست راست: چهار انگشت را از محور x به سمت y جمع کرده، شست جهت مثبت z است. جهت جایگذاری درست محور x و y و تشخیص علامت + و - از قاعده دست راست باید استفاده کرد.

جهت تنش اگر به صورت کششی باشد، مثبت در نظر می گیریم.

" " فشاری " ، منفی " " " .

در المان تنشی مکعبی: اگر جهت فلش ها به هم نزدیک شوند → ← مثبت است

و اگر جهت پیکان فلش ها از هم دور شوند ← → منفی است.

حالا طبق قرارداد، وقتی یک تنش برشی عمود بر صفحه y است که می شود σ_{yz}، جهت آن در راستای z مثبت است.

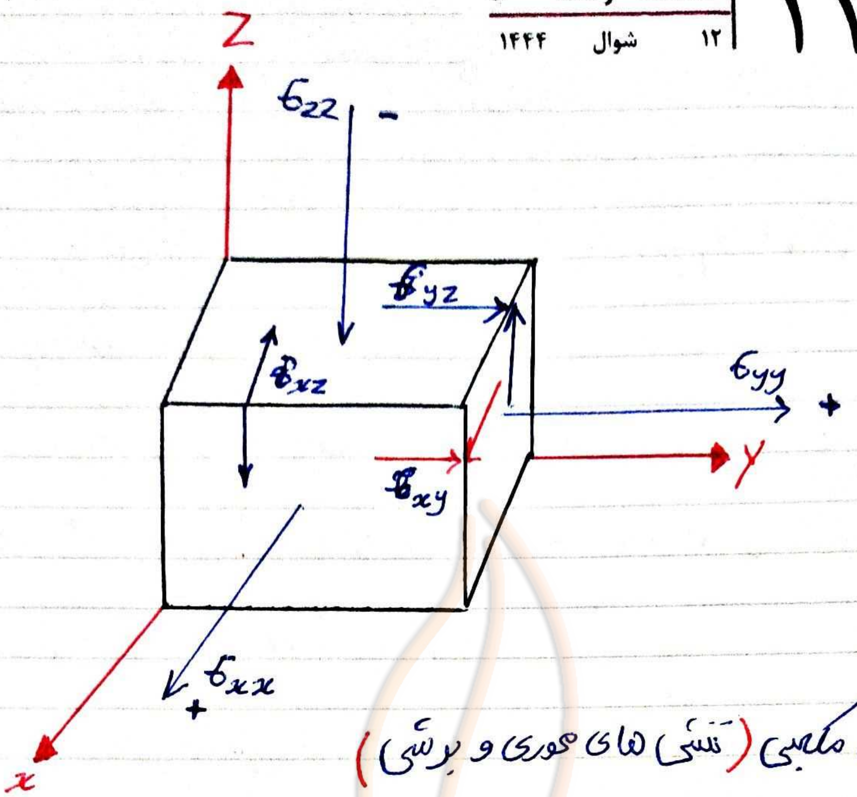
تنش های برشی مماس بر سطح هستند.

بنابراین (تنش های محوری) اگر کششی باشند مثبت و اگر فشاری باشند منفی هستند.

و (تنش های برشی) اگر پیکان فلش ها به هم نزدیک شوند، مثبت و اگر از هم دور شوند منفی در نظر گرفته می شوند.

اگر هم روی المان در هر جهتی، فلشی نباشد، صفر در نظر می گیریم.

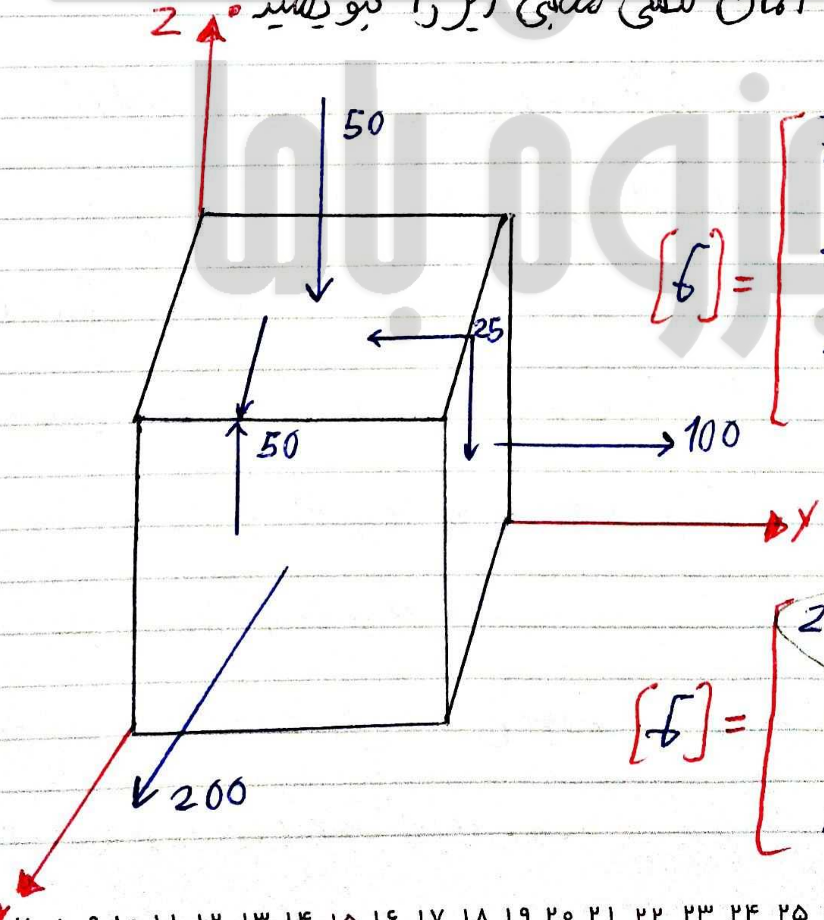
شکل این توضیحات در صفحه بعدی ...



المان تنش مکعبی (تنش های محوری و برشی)

$\tau_{yz}=\sigma_{yz}$ و $\tau_{xy}=\sigma_{xy}$ و $\tau_{xz}=\sigma_{xz}$: به جای τ با σ هم نمایش می‌دهند (در شکل)

مثال) تانسور تنش المان تنشی مکعبی زیر را بنویسید.



رابطه ماتریس:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}200 & 0 & 50\\ 0 & 100 & -25\\ 50 & -25 & -50\end{bmatrix}$$

ok
تقارن برقرار است

تمرین : المان مکعبی تانسور تنش زیر را ترسیم نمایید.

$$\tau = \begin{bmatrix} -50 & 25 & 50 \\ 25 & 100 & -75 \\ 50 & -75 & 300 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad \tau = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

* تنش های محوری : اگر کششی باشند مثبت و اگر فشاری باشند ، منفی هستند.

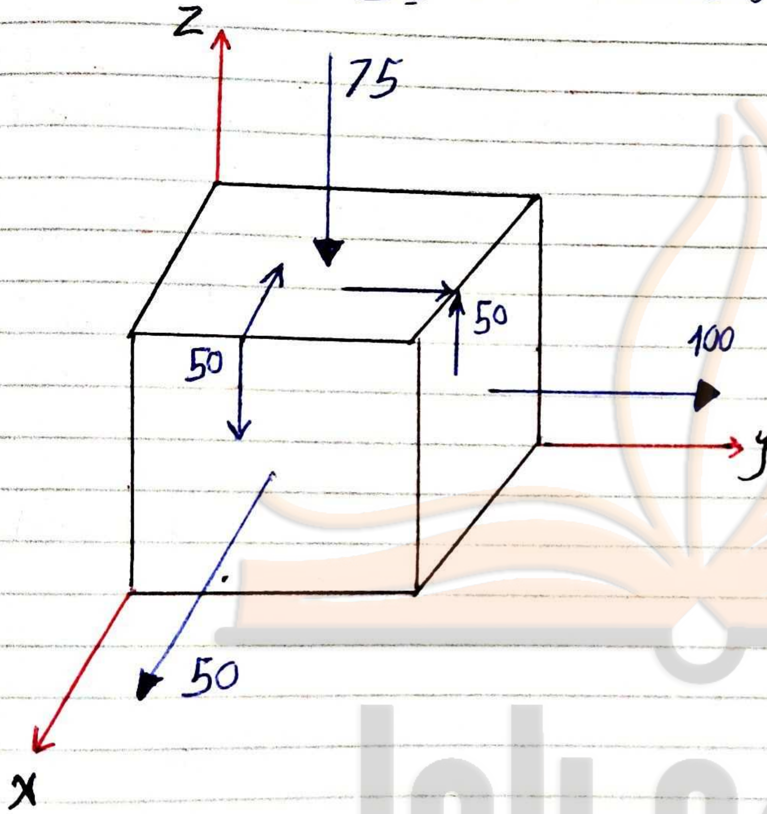
* تنش های برشی : مماس بر صفحه بوده که اگر جهت پیکان ها به هم نزدیک شوند مثبت و اگر از هم دور شوند ، منفی هستند.

مثال

الف) تانسور تنش را در المان تنشی زیر تعیین کنید.

ب) بردار تنش را در صفحه ای که بردار یکه آن به صورت زیر است را تعیین کنید.

ج) تنش های قائم و برشی را روی صفحه مذکور تعیین کنید.



بردار یکه و امتداد بردار n:

$$\begin{cases} n_1 = \frac{1}{4} \\ n_2 = \frac{1}{2} \\ n_3 > 0 \end{cases}$$

حل مثال)

حل الف: با توجه به مطلب المان تنش و توجه به جهت های + و - تانسور تنش را می نویسیم.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{المان تنشی}]{\text{با توجه به}} [\sigma] = \begin{bmatrix} 50 & 0 & -50 \\ 0 & 100 & 50 \\ -50 & 50 & -75 \end{bmatrix}$$

o.K

* قطر اصلی: تنش های قائم و قطرهای فرعی: تنش های برشی هستند.

در صفحه

حل ب: حالا باید تصویر تانسور تنش را روی امتداد بردار یکه داده شده به دست آوریم.

* اندازه یا مقدار بردار یکه: یک است:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1^2$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (n_3)^2 = 1^2 \Longrightarrow 0.06 + 0.25 + n_3^2 = 1$$

$$n_3^2 = 1 - 0.06 - 0.25 \longrightarrow n_3^2 = 0.69 \xrightarrow{\sqrt{\ }} n_3 = \pm\sqrt{0.69}$$

$$\xrightarrow{n_3 > 0} n_3 = +\sqrt{0.69} \longrightarrow n_3 = 0.83 \text{ or } +\frac{\sqrt{11}}{4}$$

تصویر تانسور تنش در امتداد مورد نیاز — تانسور تنش — تانسور بردار یکه — تصویر تانسور تنش روی آن صفحه در امتداد مورد نظر

$$[\sigma]_\lambda = \begin{bmatrix} 50 & 0 & -50 \\ 0 & 100 & 50 \\ -50 & 50 & -75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{11}}{4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 29 \\ 91.5 \\ -49.7 \end{Bmatrix}$$

تصویر تانسور تنش در امتداد λ — امتداد مورد نظر

$$[\sigma]_\lambda = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\lambda_1} \\ \sigma_{\lambda_2} \\ \sigma_{\lambda_3} \end{Bmatrix}$$

برای تنش روی صفحه، رابطه فوق موجود است؛ در یک المان تنشی مکعبی، صفحه ای است که می خواهد بداند تنش کل چه قدر روی آن صفحه است، که باید بردار یکه را در تانسور تنش ضرب کرده تا تانسور تنش در آن امتداد به دست آید.

$[\sigma]_\lambda$ τ_n σ_n

حل ج: تنش قائم ((محوری - نرمال)) و تنش برشی را برای تانسور تصویر تنش در امتداد مورد نظر را باید به دست آوریم. یا تنش مماسی

یعنی در واقع σ_λ را به دو مؤلفه عمود برهم σ_n و τ_n تجزیه می کنیم.

تنش برشی را برای برش و تنش محوری را برای محور استفاده می کنیم.

$$\sigma_{n_\lambda} = \sigma_{\lambda_1} n_1 + \sigma_{\lambda_2} n_2 + \sigma_{\lambda_3} n_3$$

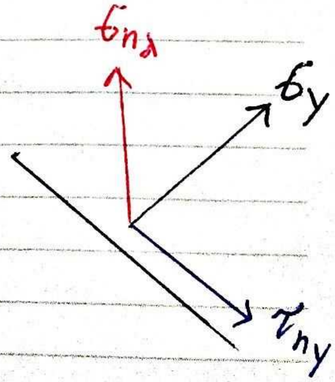
$$\sigma_{n_\lambda} = \left(29 \times \frac{1}{4}\right) + \left(91.5 \times \frac{1}{2}\right) + \left(-49.7 \times \frac{\sqrt{11}}{4}\right)$$

$$\sigma_{n_\lambda} = 11.8 \ \text{KPa}$$ ((کیلو پاسکال)) ((واحد ها کار شوند))

$$\tau_{n_\lambda} = \sqrt{\left(\sigma_{\lambda_1}^2 + \sigma_{\lambda_2}^2 + \sigma_{\lambda_3}^2\right) - \sigma_{n_\lambda}^2}$$

$$\tau_{n_\lambda} = \sqrt{\left(29^2 + 91.5^2 + -49.7^2\right) - 11.8^2}$$

$$\tau_{n_\lambda} = \sqrt{11544} = 107.4$$

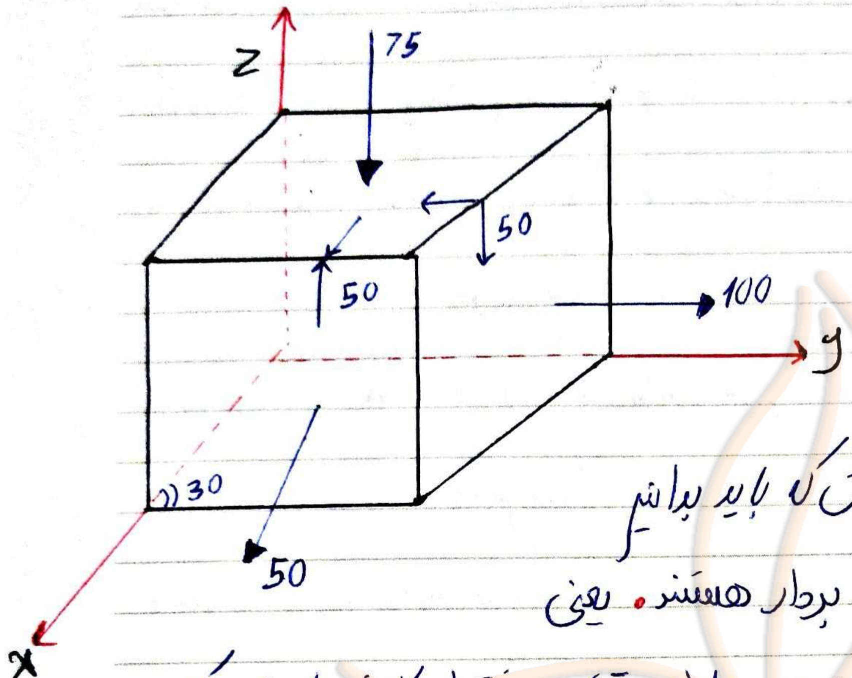


تیپ این مثال: تصویر تانسور تنش در یک امتداد صفحه.

یعنی محورهای مختصات ثابت بوده و تانسور تنش را روی یک امتداد بر روی آن محورها تصویر کردیم.

مثال قبلی در یک قالب دیگر:

اگر در مثال قبلی که امتداد بردار یکه داده شده بود، این بار زاویه بین صفحه و بردار را با محورها دادند:



$$\begin{cases} \theta_x = 30^\circ \\ \theta_y = 45^\circ \\ \theta_z = 90^\circ \end{cases}$$

نکته‌ای که باید به آن توجه شود آن است که باید بدانیم بردارهای یکه، cos های هادی بردار هستند. یعنی cos زاویه آن بردار با هرکدام از این محورها است. و فقط کافی است که این cos زوایا گفته شود. البته این یک مثال غیر استاندارد است که فقط مراحل حل آموزش داده شود.

$$\begin{cases} n_1 = \cos 30^\circ \\ n_2 = \cos 45^\circ \\ n_3 = \cos 90^\circ \end{cases}$$

مجموع n ها باید یک شود، چون بردار یکه می باشد. و معمولاً ۲ تا را با ما داده و سومی را باید خودمان بدست آوریم.

حالا یا امتداد بردار با ما داده می شود و یا زوایا که در نهایت ما یک بردار یکه ای داریم که در تانسور تنش ضرب کرده تا تنش در آن امتداد (در صفحه) به دست آید.

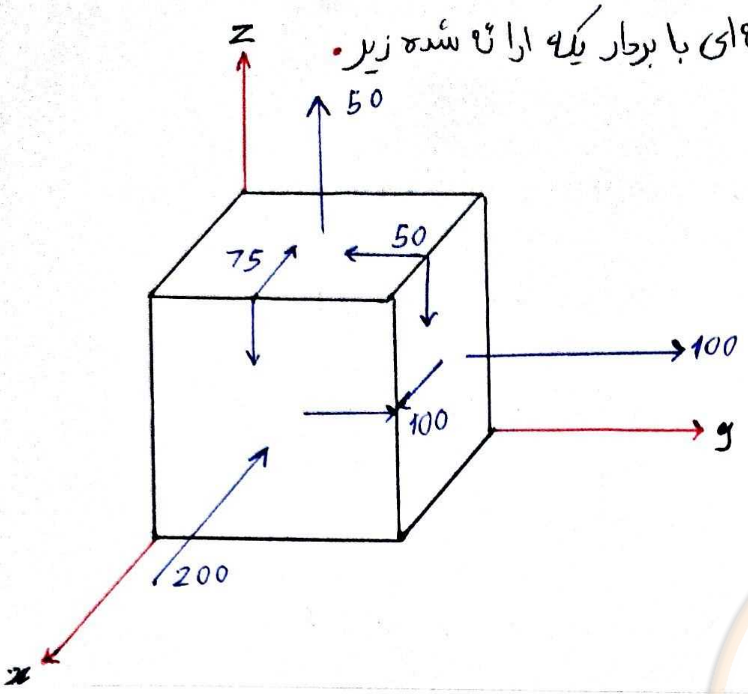
نکته این سوال: محور های مختصات ثابت بوده و تانسور تنش را روی یک امتداد تصویر می‌کنیم.

حالا اگر محور های مختصات ثابت نبوده و دوران کند در ادامه مثال می زنیم. یک محور را ثابت و دو محور دیگر را دوران یافته خواهیم داشت.

تمرین) الف) تانسور تنش را تشکیل دهید.

ب) مطلوب است تعیین میزان تنش ها در صفحه‌ای با بردار یکه ارائه شده زیر.

ج) تنش های نرمال و برشی زیر را تعیین کنید.



$$\begin{cases} n_1 = \frac{1}{2} \\ n_3 = \frac{1}{3} \\ n_2 = 0 \end{cases}$$

«تانسور تنش تحت دوران محورهای مختصاتی»

در این بخش ، محورهای مختصات دوران می کنند ، یعنی جابجا می شوند. در واقعیت و در تحلیل های نرم افزاری هر سه محور دوران می کنند ولی ما قادر به نمایش و تفهیم این بخش در فضای ۲ بعدی نیستیم. برای ملموس بودن این توضیح در درس تئوری الاستیسیته یک محور را ثابت و دو محور دیگر را دوران می دهند تا مسائل قابل حل باشند.

ولی اینجا ما می خواهیم یاد بگیریم که وقتی محورهای مختصات دوران می کنند چه اتفاقی برای تانسور تنش رخ می دهد. یعنی به عبارتی ماتریس تنش قبل از دوران و ماتریس تنش بعد از دوران را به دست می آوریم.

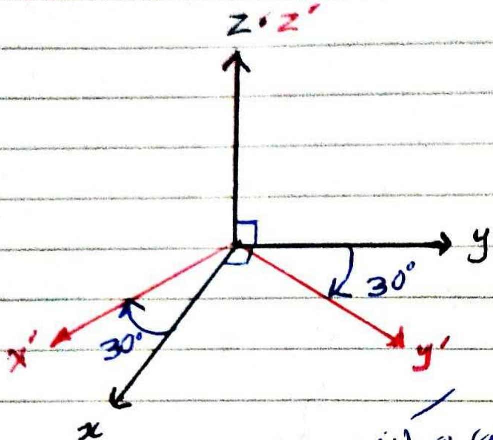
$$[\sigma'] = [n]\,[\sigma]\,[n]^T$$

- $[\sigma']$: تانسور تنش دوران یافته یا همان بعد از دوران
- $[n]$: تانسور دوران
- $[\sigma]$: تانسور تنش قبل از دوران
- $[n]^T$: ترانهاده تانسور دوران

ماتریس n (ماتریس دوران) به صورت زیر قابل به دست آوردن است:

$$[n] = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x' & y' & z' \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \cos_{xx'} & \cos_{xy'} & \cos_{xz'} \\ \cos_{yx'} & \cos_{yy'} & \cos_{yz'} \\ \cos_{zx'} & \cos_{zy'} & \cos_{zz'} \end{array}\right] \end{array}$$

در این درس دو محور را دوران می‌دهیم و فرض می‌شود z ثابت است و x و y به اندازه 30° دوران داده می‌شود؛ محور z با تمام محورها زاویه 90° دارد.



امکان دارد در برخی سؤالات جای محورهای اصلی x و y و z جابه‌جا باشد که باید به این موضوع توجه داشته باشیم. (طبق قانون دست راست)

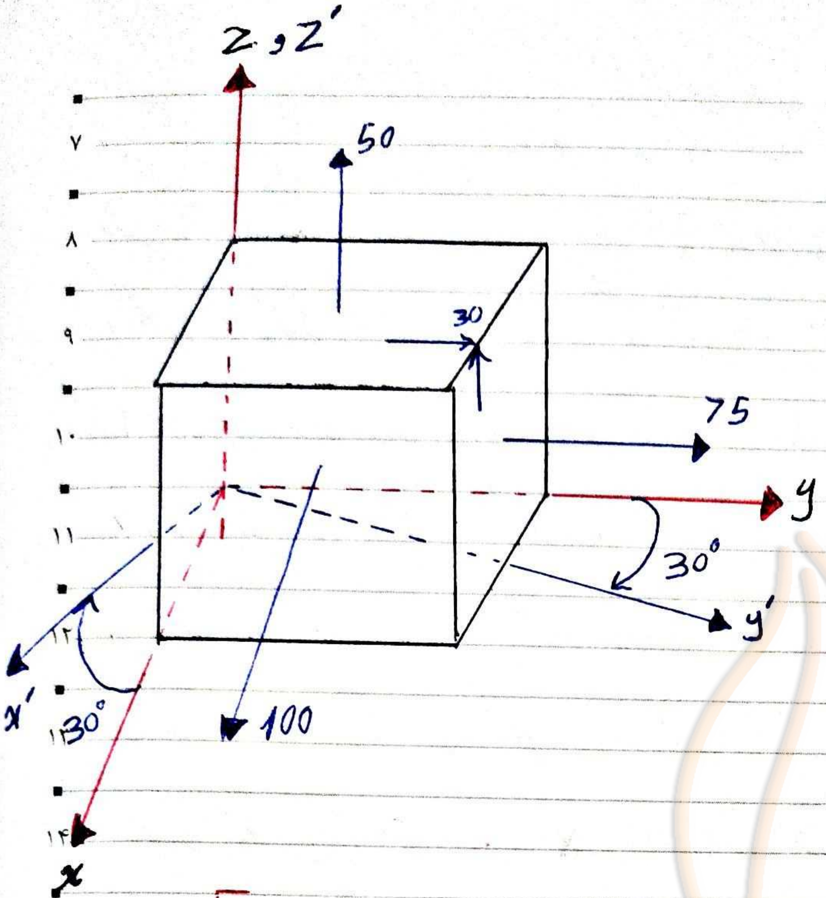
یک محور را ثابت نگه می‌داریم که در اینجا z و z' یکی هستند. x به اندازه 30° دوران می‌کند.

چون محور x به اندازه 30° دوران کرده به سمت ... باید حتماً محور y هم به همان اندازه 30° به همان سمت دوران کند. در واقع فاصله بین محورها باید همان 90° باقی بمانند، یعنی تا 90° باید همواره برقرار باشند در مختصات x و y و z و هم‌چنین در دوران یافته‌ها x' و y' و z' وگرنه کلاً محور مختصات برقرار نمی‌شود.

نکته در محور ثابت است که در اینجا محور z ثابت در نظر گرفته شده، زاویه‌ها با محوری که ثابت در نظر گرفته شده همواره 90° ثابت باقی می‌ماند. x با z و y با z قبل از دوران زاویه 90° داشته و بعد از دوران هم زاویه 90° را خواهد داشت.

x' با z' و y' با z' زاویه 90° دارد.

زاویه z و z' 0° است. در واقع محوری که ثابت در نظر بگیریم، زاویه آن با خودش صفر بوده و با بقیه 90° است.



$$[\sigma'] = [n]\,[\sigma]\,[n]^T$$

$$[n] = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \cos 60^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 120^\circ & \cos 30^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.86 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.86 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 30 \\ 0 & 30 & 50 \end{bmatrix}$$

ok

$$[n]^T = \begin{bmatrix} 0.86 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.86 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جای سطر و ستون تانسور دوران
عوض می شود ←

$$[n][\sigma] \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.86 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.86 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 30 \\ 0 & 30 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86 & 37.5 & 15 \\ -50 & 64.5 & 25.8 \\ 0 & 30 & 50 \end{bmatrix}$$

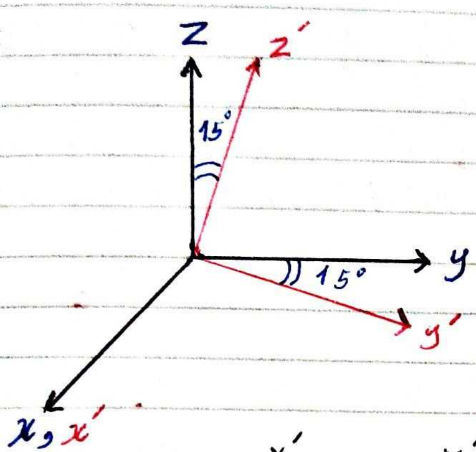
$$([n][\sigma])[n]^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 86 & 37.5 & 15 \\ -50 & 64.5 & 25.8 \\ 0 & 30 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.86 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.86 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 92.71 & -10.75 & 15 \\ -10.75 & 80.5 & 25.8 \\ 15 & 25.8 & 50 \end{bmatrix} = [\sigma']$$

تانسور تنش دوران یافته

* ماتریس تنش با هر نوع عملیاتی که روی آن انجام شود؛ در آخر حتماً باید متقارن باقی بماند.

مثال) تانسور دوران را برای محورهای مختصات زیر بنویسید. چنانچه محور x را ثابت و محور y و z با اندازه 15° دوران کنند خواهیم داشت:

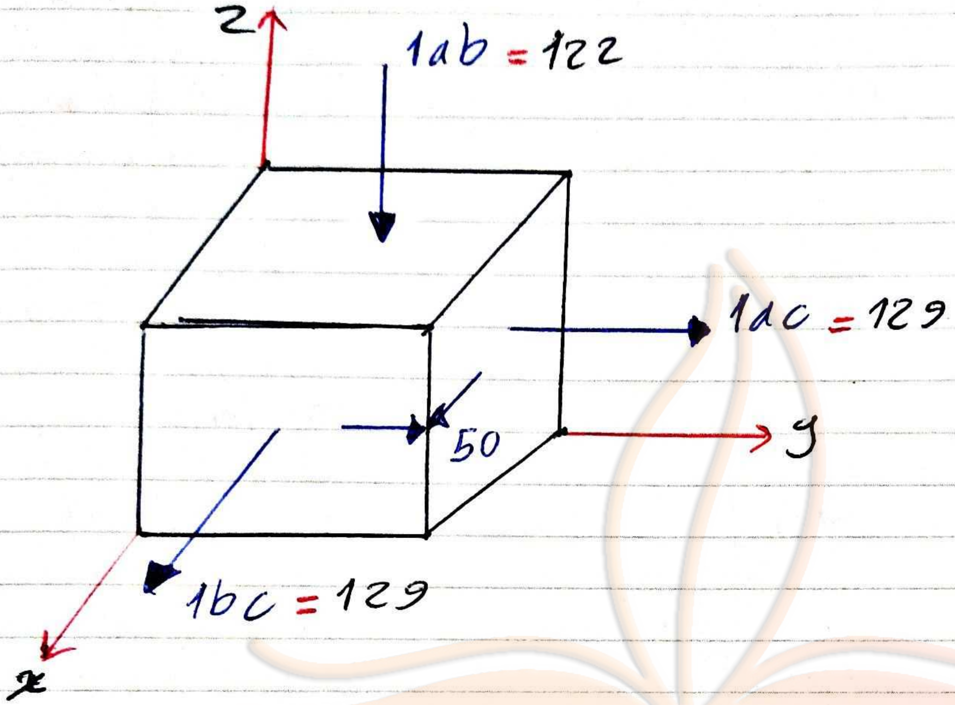


$$[h] = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x' & y' & z' \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos_{xx'} & \cos_{xy'} & \cos_{xz'} \\ \cos_{yx'} & \cos_{yy'} & \cos_{yz'} \\ \cos_{zx'} & \cos_{zy'} & \cos_{zz'} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[h] = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x' & y' & z' \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \cos 90^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 15^\circ & \cos 75^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 105^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix} \end{array}$$

محور Z و Y در صفحه خودشان دوران دارند. و زاویه 90° را با محور ثابت x حفظ می‌کنند.

مثال (استاد) : مطلوب است تعیین تانسور تنش در محورهای مختصاتی که نسبت به محور z به اندازه $2c^{\circ}$ در جهت عقربه‌های ساعت دوران کند.

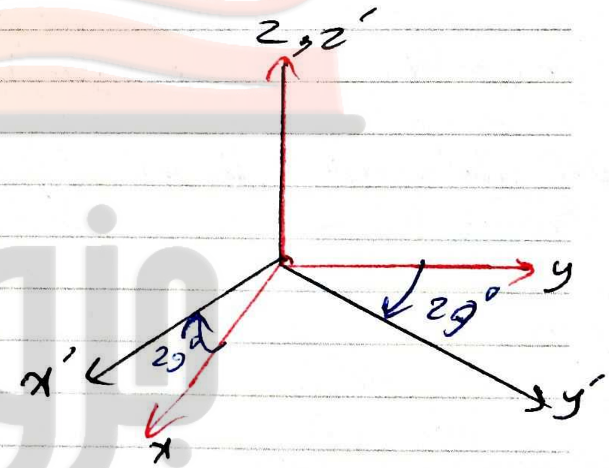


$a = 2$

$b = 2$

$c = 9$

$2c^{\circ} = 29^{\circ}$



$$\tau = \begin{bmatrix} 129 & 50 & 0 \\ 50 & 129 & 0 \\ 0 & 0 & -122 \end{bmatrix}$$

$$[n] = \begin{array}{c|ccc} & x' & y' & z' \\ \hline x & \cos_{xx'} & \cos_{xy'} & \cos_{xz'} \\ y & \cos_{yx'} & \cos_{yy'} & \cos_{yz'} \\ z & \cos_{zx'} & \cos_{zy'} & \cos_{zz'} \end{array} = \begin{bmatrix} \cos 29^{\circ} & \cos 61^{\circ} & 0 \\ \cos 119^{\circ} & \cos 29^{\circ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

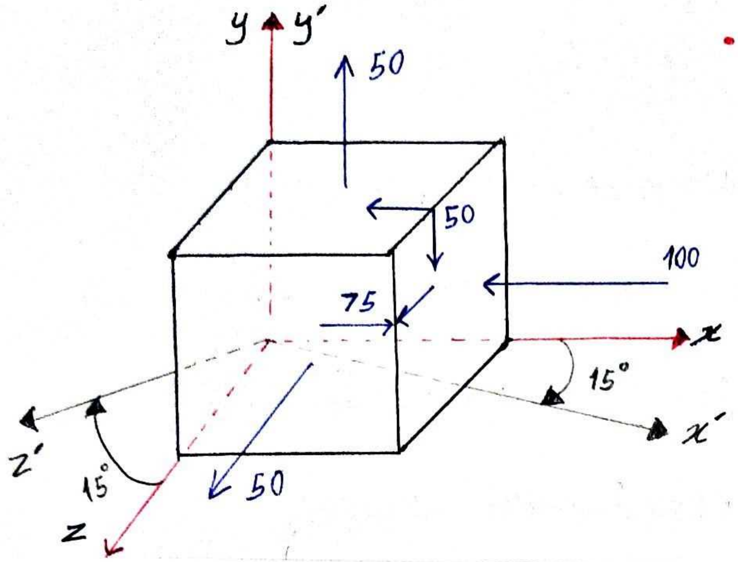
$$\tau' = [n][\tau][n]^T$$

$$\tau' = \begin{bmatrix} 0.87 & 0.48 & 0 \\ -0.48 & 0.87 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 129 & 50 & 0 \\ 50 & 129 & 0 \\ 0 & 0 & 122 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.87 & -0.48 & 0 \\ 0.48 & 0.87 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau' = \begin{bmatrix} 136.23 & 105.42 & 0 \\ -18.42 & 88.23 & 0 \\ 0 & 0 & 122 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.87 & -0.48 & 0 \\ 0.48 & 0.87 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 169 & 26 & 0 \\ 26 & 85 & 0 \\ 0 & 0 & 122 \end{bmatrix}$$

O.K.

تمرین) در المان مکعب تنشی زیر، چنانچه محورها را نسبت به محور y ، 15° درجه ساعتگرد دوران دهیم: تانسور تنش را پس از دوران تعیین کنید.



$$[\sigma'] = [n][\sigma][n]^T$$

« تنش های اصلی ، صفحات اصلی تنش ، امتداد های اصلی تنش »

در تانسور تنش ، ما تنش محوری و تنش برشی داریم : که درایه های روی قطر اصلی به عنوان تنش های محوری و درایه های قطر فرعی که باید نسبت به قطر اصلی متقارن باشند به عنوان تنش های برشی در نظر گرفته می شوند .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

تنش های محوری : σ_{11} ، σ_{22} ، σ_{33}

تنش های برشی : σ_{12} ، σ_{13} ، σ_{23}
σ_{21} ، σ_{31} ، σ_{32}

- تنش های اصلی : مقادیر حداکثر تنش های محوری هستند که تنش های برشی متناظر آن ها صفر می باشد . در واقع امتداد هایی بودند که تنش های نرمال ماکزیمم و تنش های برشی صفر بوده .
- یک تانسور تنش 3×3 ، ۳ مقدار ویژه دارد . این ۳ مقدار این است که روی هر محور یک مقدار ماکزیمم می شود . در ماتریس 3×3 ، ۳ تا تنش محوری به ما می دهد که در امتداد این محور ها ، تنش برشی صفر است و تنش کششی و تنش فشاری ، یکی شان ماکزیمم است . یا تنش کششی یا تنش فشاری ماکزیمم می شود به اسم تنش محوری .
- بنابراین برای تعیین تنش های اصلی کافی است مقادیر ویژه تانسور تنش را تعیین کنیم .
- که از معادله مشخصه زیر ، مقادیر ویژه نیز به دست می آید .
- این معادله مشخصه یک معادله درجه سوم است ، که این معادله یک سری ثوابت دارد
- که به آنها ثوابت تانسور تنش می گویند ((I_1 و I_2 و I_3)) .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه: $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$

$$x^3 - I_1 x^2 + I_2 x - I_3 = 0$$

«مجموع درایه های روی قطر اصلی» $I_1 = \text{Trace}[\sigma] = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$

در هر ماتریس 3×3 ، سه دترمینان 2×2 وجود دارد که از این دترمینان ها به I_2 می رسیم:

$$I_2 = (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}) + (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}\sigma_{32}) + (\sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{13}\sigma_{31})$$

دترمینان تانسور تنش را با I_3 نشان می دهند.

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

به I_1 و I_2 و I_3 ثوابت تانسور تنش گفته می شود؛ یعنی هر فعل و انفعالی روی تانسور تنش اتفاق بیفتد؛ این سه ثوابت مقدارشان تغییر نمی کند. سپس این سه ثوابت را در معادله مشخصه گذاشته که یک معادله درجه سه برحسب σ است. این معادله درجه سوم، سه ریشه دارد که ریشه بزرگ تر به عنوان تنش اصلی بزرگ تر و ریشه کوچک تر هم به عنوان تنش اصلی کوچک تر و ریشه متوسط هم به عنوان تنش اصلی متوسط در نظر گرفته می شود.

حل این معادله به روش صحیح و خطا «سعی و خطا» صورت می گیرد.

هدف از این بخش: به دست آوردن تنش های اصلی و امتداد های اصلی تنش و ...

معادله مشخصه تانسور 3x3 : $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

مثال: مطلوب است تعیین تنش های اصلی و امتداد های اصلی تنش در تانسور تنش زیر.

ستون

ردیف = سطر

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \text{KPa} \xrightarrow{\text{حل}} [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$I_1 = 9 + 9 + 18 = 36 \text{ KPa}$$

$$I_2 = (9\times 9) + (9\times 18) + (9\times 18) - (3)^2 - (0)^2 - (0)^2 = 396 \text{ KPa}$$

$$I_3 = (9\times 9\times 18) + (2\times 3\times 0\times 0) - (9\times 0^2) - (9\times 0^2) - (18\times 3^2)$$

$$I_3 = 1296 \text{ KPa}$$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

معادله مشخصه درجه سوم : $\sigma^3 - 36\sigma^2 + 396\sigma - 1296 = 0$

معادله درجه سوم ، ۳ ریشه دارد. یعنی ۳ مقدار عدد متفاوت که با جایگذاری در معادله به عدد صفر می رسیم. برای حل این معادله درجه سوم و یافتن ۳ ریشه موجود معادله می توان هم از ماشین حساب مهندسی و هم از روش صحیح و خطا (سعی و خطا) کمک گرفت. البته از روش های دیگر هم قابل حل می باشد که در اینجا ما از روش آزمون و خطا بهره می بریم:

روش آزمون و خطا ، برای حل معادله درجه سوم ، یافتن سه ریشه برای معادله:

ابتدا دو عدد به صورت فرضی در معادله جایگذاری می کنیم (مثلاً 1 و 10) و همین طور اعدادی را جایگذاری کرده که بالاخره به یک عدد برسیم که معادله را به صفر برساند و آن عدد را به عنوان یکی از ریشه های معادله درجه سوم در نظر می گیریم.

از ماشین حساب: MODE → 2 → 3 → $a=\pm?$ ، $b=\pm?$ ، $c=\pm?$ ، $d=\pm?$ → x_1 ، x_2 ، x_3

به صورت دستی:

معادله مشخصه: $b^3 - 36b^2 + 396b - 1296 = 0$

جواب باید صفر شود

$b=1 \rightarrow (1)^3 - 36(1)^2 + 396(1) - 1296 = -935$ ق.ق.غ

$b=10 \rightarrow (10)^3 - 36(10)^2 + 396(10) - 1296 = +64$ ×

بین منفی و مثبت ، قطعاً یک ریشه موجود است.

اگر $b=1$ باشد جواب منفی و اگر $b=10$ باشد جواب مثبت است: آنقدر باید مقدار $b=?$ را حدس بزنیم که جواب معادله صفر شود. یک مقدار منفی یا مثبت و یک مقدار مثبت و سپس بین این دو مقدار به دنبال ریشه می گردیم.

$b=6 \rightarrow (6)^3 - 36(6)^2 + 396(6) - 1296 = 0$ قابل قبول ✓

بنابراین یکی از ریشه های معادله بدست آمد $\boxed{b=6}$ و در ادامه خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r|l} \sigma^3 - 36\sigma^2 + 396\sigma - 1296 & \sigma - 6 \\ \hline - \quad -\sigma^3 + 6\sigma^2 & \sigma^2 - 30\sigma + 216 \\ \hline -30\sigma^2 + 396\sigma - 1296 & \\ - \quad \pm 30\sigma^2 \mp 180\sigma & \\ \hline 216\sigma - 1296 & \\ - \quad -216\sigma \pm 1296 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

معادله درجه دوم

$-12 \times -18 = 216$

معادله درجه دوم : $\sigma^2 - 30\sigma + 216 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد}} (\sigma - 12)(\sigma - 18)$

$-12 - 18 = -30$

۲ ریشه معادله درجه دوم → $\boxed{\sigma = 12}$ و $\boxed{\sigma = 18}$

با ماشین حساب : حل معادله درجه دوم :

$MODE \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow a = ?,\ b = ?,\ c = ? \Rightarrow x_1 = \checkmark,\ x_2 = \checkmark$

* تا اینجا از معادله مشخصه ۳ ریشه یا همان ۳ تنش اصلی بدست آمد که :

$\sigma_1 =$ تنش اصلی بزرگتر $\quad \sigma_2 =$ تنش اصلی متوسط $\quad \sigma_3 =$ تنش اصلی کوچکتر

به نامگذاری تنش های اصلی از روی ریشه های معادله دقت شود :

مقادیر ویژه : $\begin{cases} \sigma_1 = 18 \\ \sigma_2 = 12 \\ \sigma_3 = 6 \end{cases}$

تا این مرحله مقادیر ویژه را به دست آوردیم « σ_1 و σ_2 و σ_3 » ، حالا باید برای این مقادیر ویژه نیز امتداد ویژه به دست آوریم. به عبارتی ما در این فضای ۳ بُعدی تنشی ، ما سه مقدار ویژه داریم که مقادیر حداکثر تنش ها می باشد. حالا این مقادیر در چه امتدادی نسبت به محورهای مختصات وجود دارند که در آن ناحیه برش صفر می شود.

امتداد مورد نظر را صورت سؤال باید با « n_1 و n_2 و n_3 » برای ما مشخص کند که سه تا cos هادی بردار هستند « بردار یکه ».

برای یافتن امتداد ویژه باید طبق تعاریف ریاضیاتی :

$$[\sigma] - \lambda I = 0$$

یعنی : قطر اصلی را منهای تنش اصلی کرده و سپس در n_1 و n_2 و n_3 ضرب می کنیم و برابر صفر قرار می دهیم و در نهایت n_1 و n_2 و n_3 را به دست می آوریم.

* برای مقدار ویژه تنش اصلی بزرگ تر داریم : $\sigma_1 = 18$

$$\begin{bmatrix} \overset{-9}{9-18} & 3 & 0 \\ 3 & \overset{-9}{9-18} & 0 \\ 0 & 0 & \overset{0}{18-18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1)\ -9n_1 + 3n_2 = 0 \\ (2)\ 3n_1 - 9n_2 = 0 \\ (3)\ 0 \times n_3 = 0 \end{cases}$$

این قسمت خیلی مهم است

$$(1)\ 3n_2 = 9n_1 \Longrightarrow n_2 = 3n_1$$

$$(2)\ 3n_1 = 9n_2 \Longrightarrow n_1 = 3n_2 \Longrightarrow n_1 = n_2 = 0$$

$$(3)\ n_3 = \text{هر عددی می تواند باشد}$$

$$\underbrace{n_1^2}_{0} + \underbrace{n_2^2}_{0} + \underbrace{n_3^2}_{1} = 1$$

$$n_3 = 1$$

«مقدار ویژه» $\sigma_1 = 18$ «امتداد ویژه» $[n] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$

* برای مقدار ویژه تنش اصلی متوسط داریم: $\sigma_2 = 12$

$$\begin{bmatrix} \overset{-3}{9-12} & 3 & 0 \\ 3 & \overset{-3}{9-12} & 0 \\ 0 & 0 & \overset{6}{18-12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} ① \; -3n_1 + 3n_2 = 0 \\ ② \; 3n_1 - 3n_2 = 0 \\ ③ \; 6n_3 = 0 \end{cases}$$

استدلال ۳ معادله فوق

① $3n_2 = 3n_1 \Rightarrow n_2 = n_1$

② $3n_1 = 3n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$

③ $n_3 = 0$ تا $6n_3 = 0$ شود

$n_1^2 + n_2^2 + \cancel{n_3^2}^{\to 0} = 1$

$n_1 = n_2$

$2n_1^2 = 1$

$n_1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow n_1^2 = 0.5 \xrightarrow{\sqrt{\ }} n_1 = \pm 0.707$ or $n_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

کنترل: $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Longrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 = 1$ o.k.

«مقدار ویژه» $\sigma_2 = 12$ «امتداد ویژه» $[n] = \begin{bmatrix} \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

$\sigma_3 = 6$ * برای مقدار ویژه تنش اصلی کوچکتر داریم:

$$\begin{bmatrix} \overset{3}{9-6} & 3 & 0 \\ 3 & \overset{3}{9-6} & 0 \\ 0 & 0 & \overset{12}{18-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} ① \; 3n_1 + 3n_2 = 0 \\ ② \; 3n_1 + 3n_2 = 0 \\ ③ \; 12n_3 = 0 \end{cases}$$

$n_1^2 + n_2^2 + \cancel{n_3^2}^{\,0} = 1$

① $3n_1 = -3n_2 \Longrightarrow n_1 = -n_2$

② $3n_1 = -3n_2 \Longrightarrow n_1 = -n_2$

③ $12n_3 = 0 \Longrightarrow n_3 = 0$

$n_1 = -n_2$

$2n_1^2 = 1$

یا

$2n_2^2 = 1$

«مقدار ویژه» $\sigma_3 = 6$

«امتداد ویژه» $[n] = \begin{bmatrix} \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

تنش های اصلی ، تنش های محوری ماکزیمم — صفحات نیمسازی ، تنش های برشی ماکزیمم

تنش های برشی و امتداد آن :

n_1	1	0	0	0	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
n_2	0	1	0	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
n_3	0	0	1	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
	$\sigma_n=\sigma_1$ $\tau_n=0$	$\sigma_n=\sigma_2$ $\tau_n=0$	$\sigma_n=\sigma_3$ $\tau_n=0$	$\tau_n=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$ $\sigma_n\neq 0$	$\tau_n=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$ $\sigma_n\neq 0$	$\tau_n=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$ $\sigma_n\neq 0$

در این مثال :

$\sigma_1=18$ $\sigma_2=12$ $\sigma_3=6$ $\frac{18-6}{2}=6$

$\frac{12-6}{2}=3$ $\frac{18-12}{2}=3$

در تعیین تنش های اصلی ، مقدار مهم است و نه علامت + یا منفی

علامت فقط نشان دهنده کششی یا فشاری بودن تنش است.

این علامت + و − در ماکسیمم تنش برشی هم وارد می شود.

τ_n : تنش های برشی نظیر تنش های محوری

* اگر سؤال از ما می خواست که تنش برشی ماکزیمم را بدست آوریم و امتدادش را هم بنویسیم ، طبق جدول فوق خواهیم داشت :

$\tau_{max}=6$ «تنش برشی ماکزیمم»

«امتداد تنش برشی ماکزیمم» $[n]=\begin{bmatrix}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

تمرین) برای تانسور تنش زیر مطلوب است : الف) تنش های اصلی و امتدادهای اصلی تنش ؟
ب) تنش های برشی ماکزیمم و امتدادی که بیش ترین تنش برشی در آن شکل می گیرد ؟

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

تمرین) مطلوب است تعیین تنش های اصلی و امتدادهای اصلی تنش در تانسور تنش زیر.

الف) $\sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

ب) $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

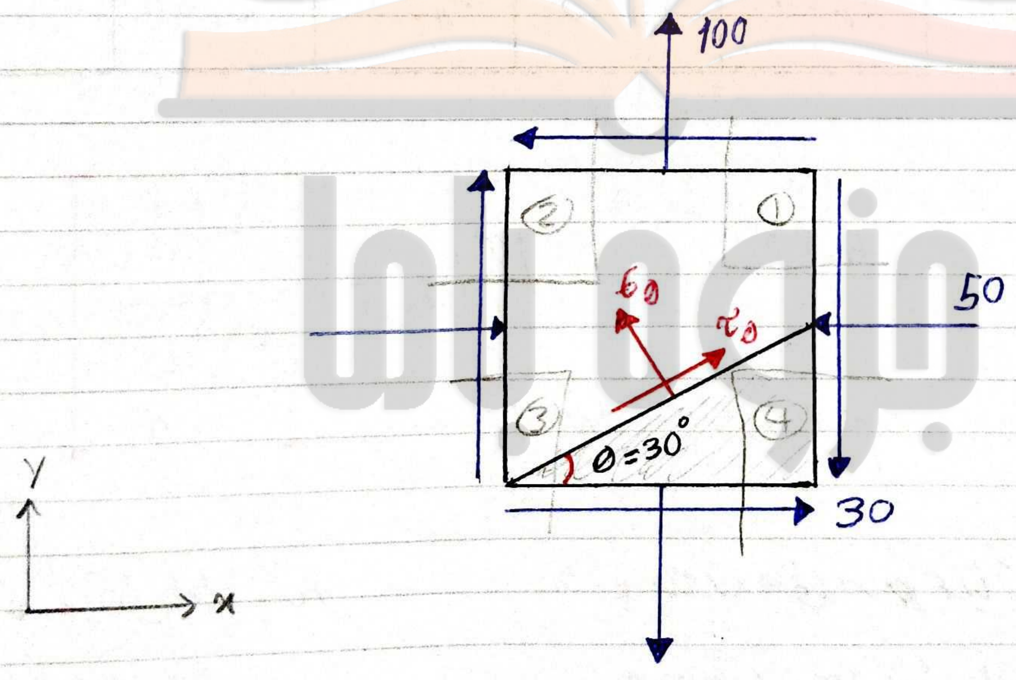
دایره مور

هدف: رسم دایره مور در فضای دوبُعدی و ترسیم آن در فضای سه بُعدی با توجه به تنش های اصلی به دست آمده.

سؤال) در المان تنشی داده شده زیر الف) تنش های اصلی را به دست آورید.

ب) سپس مقدار تنش های نرمال (محوری) و برشی را در صفحه‌ای که زاویه‌ی θ با محور x دارد را تعیین کنید. ($\theta = 30^\circ$)

$\sigma_\theta = ?$ $\tau_\theta = ?$



$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

مرکز دایره

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

شعاع دایره

برای رسم نمودار به مختصات مرکز دایره و مختصات شعاع دایره نیاز داریم.

$\sigma_x = ?$ $\sigma_y = ?$ $\tau_{xy} = ?$

* در راستای x ، نیروی فشاری با مقدار 50 وارد شده : $\sigma_x = -50$

* در راستای y ، نیروی کششی با مقدار 100 وارد شده : $\sigma_x = +100$

* در نواحی چهارم نیروهای برشی به هم نزدیک می شوند که با مقدار 30 می باشد : $\tau_{xy} = +30$

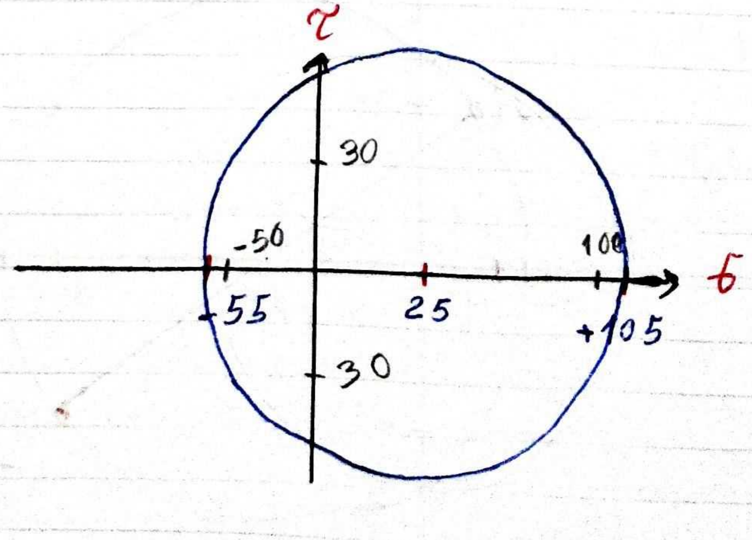
$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \Rightarrow \frac{-50+100}{2} = 25$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{-50-100}{2}\right)^2 + 30^2} = 80$$

* با توجه به مرکز دایره و داشتن شعاع دایره می توان دایره را رسم نمود:

$\sigma_1 : 25 + 80 = +105$ $\sigma_3 : 25 - 80 = -55$

* محور قائم را تنش برشی (τ) و محور افقی دایره مور را تنش محوری (σ) در نظر می گیریم و سپس نقطه مرکز دایره و شعاع دایره را روی محور افق (σ) مشخص می نمائیم، و دایره‌ای ترسیم می کنیم.



با توجه به دایره در فضای دوبعدی: ۲ تنش اصلی داریم. σ_1 و σ_3 (σ_2 نداریم)

تعریف تنش اصلی: تنشی است که روی محور σ قرار داشته و تنش برشی هم صفر ($\tau = 0$) باشد. روی محور σ بیش‌ترین مقدار را با (σ_1) و کم‌ترین σ را با (σ_3) نمایش می‌دهیم.

$\sigma_1 = +105$ تنش اصلی بزرگ‌تر

$\sigma_3 = -55$ تنش اصلی کوچک‌تر

علامت + یعنی تنش کششی.

علامت - یعنی تنش فشاری.

* بنابراین ما مختصات مرکز را به علاوه و منهای شعاع کنیم: تنش‌های اصلی به دست می‌آیند.

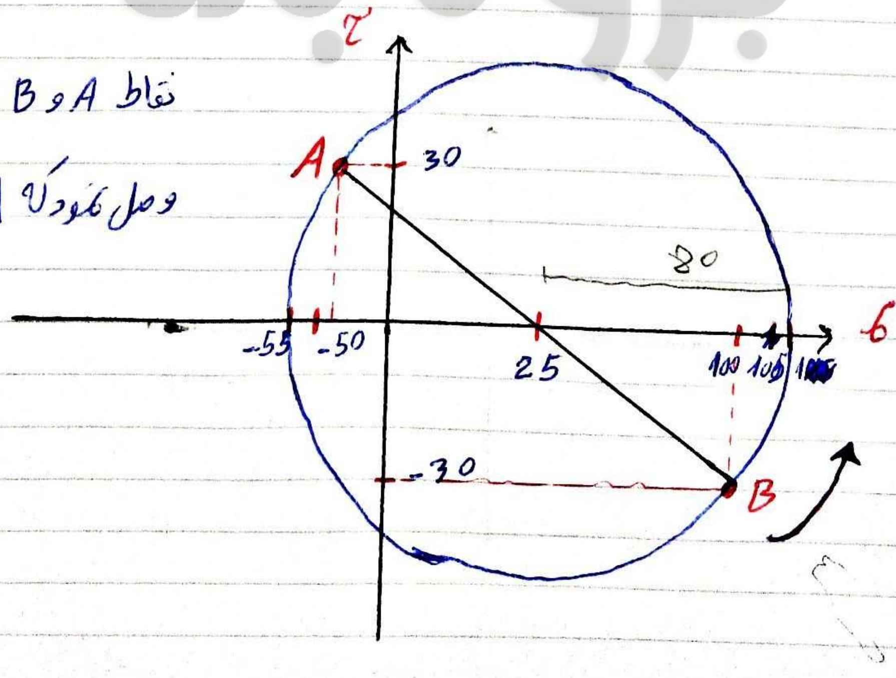
حل الف به اتمام رسید.

قسمت (ب) سوال: می‌خواهیم مقادیر روی این زاویه را به دست آوریم. $\theta = 30°$

بر روی دایره رسم شده: نقاط A و B را با توجه به المان تنش باید رسم نمود.

$A \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{vmatrix}$ $B \begin{vmatrix} \sigma_y \\ -\tau_{xy} \end{vmatrix}$ $\Rightarrow$ $A \begin{vmatrix} -50 \\ +30 \end{vmatrix}$ $B \begin{vmatrix} +100 \\ -30 \end{vmatrix}$

نقاط A و B را طوری باید به هم وصل نمود که از مرکز دایره C عبور کند.



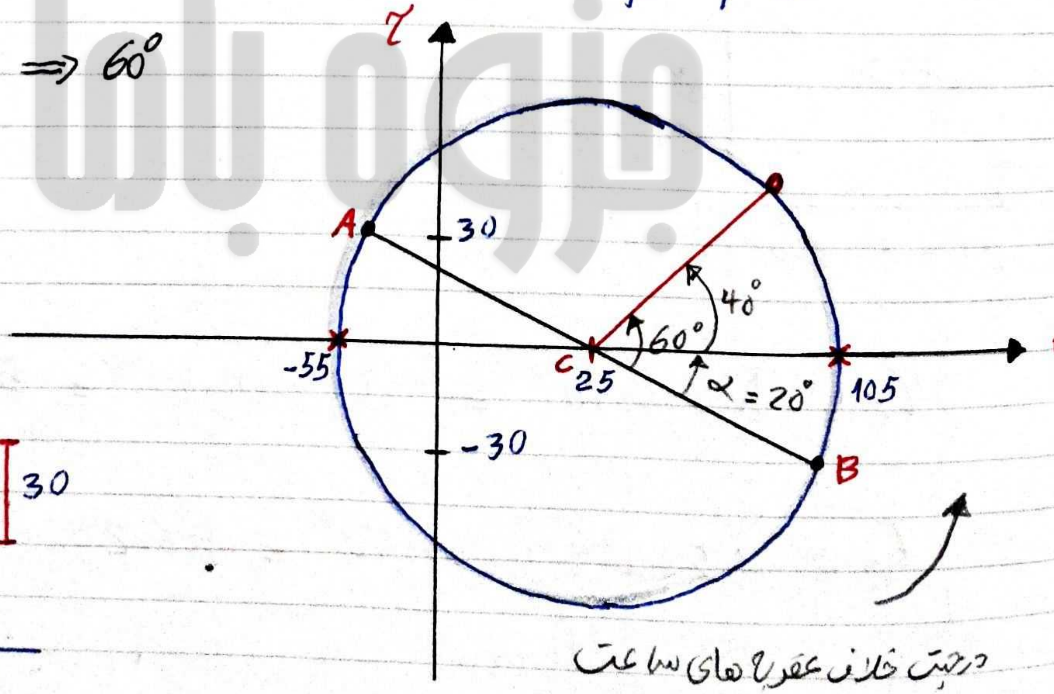
از این خط رسم شده باید به اندازه 2θ درجهت خلاف عقربه های ساعت حرکت کرده تا به نقطه ای برسیم که می خواهیم σ_θ و τ_θ و τ را در آن نقطه به دست آوریم.

نکته: در عدد گذاری نقاط A و B حتماً باید یک نقطه در بالای محور σ و یک نقطه در پایین محور σ قرار بگیرد که برای این منظور به صورت قراردادی حتماً باید اگر σ مثبت بود؛ τ را منفی و اگر σ منفی بود، τ را مثبت در نظر بگیریم، ما هم در حل این سؤال از این قرارداد بهره بردیم.

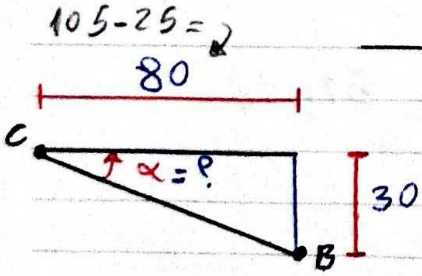
* برای اینکه بتوانیم θ موجود در المان تنشی را بر روی دایره مور پیاده کنیم؛ ابتدا با توجه به نقاط A و B خطی رسم می شود که از مرکز دایره C عبور می کند.

سپس با توجه به جهت و شکل المان تنشی داده شده درصورت سؤال؛ این المان تنشی را به اندازه 2θ نسبت به خط رسم شده نقاط A و B و درجهت المان تنشی روی دایره هم درهمان جهت خطی رسم می کنیم، از مرکز دایره به روی محیط دایره.

$\theta = 30^\circ \longrightarrow 2\theta \Rightarrow 60^\circ$



درجهت خلاف عقربه های ساعت
«که با توجه به المان تنشی»



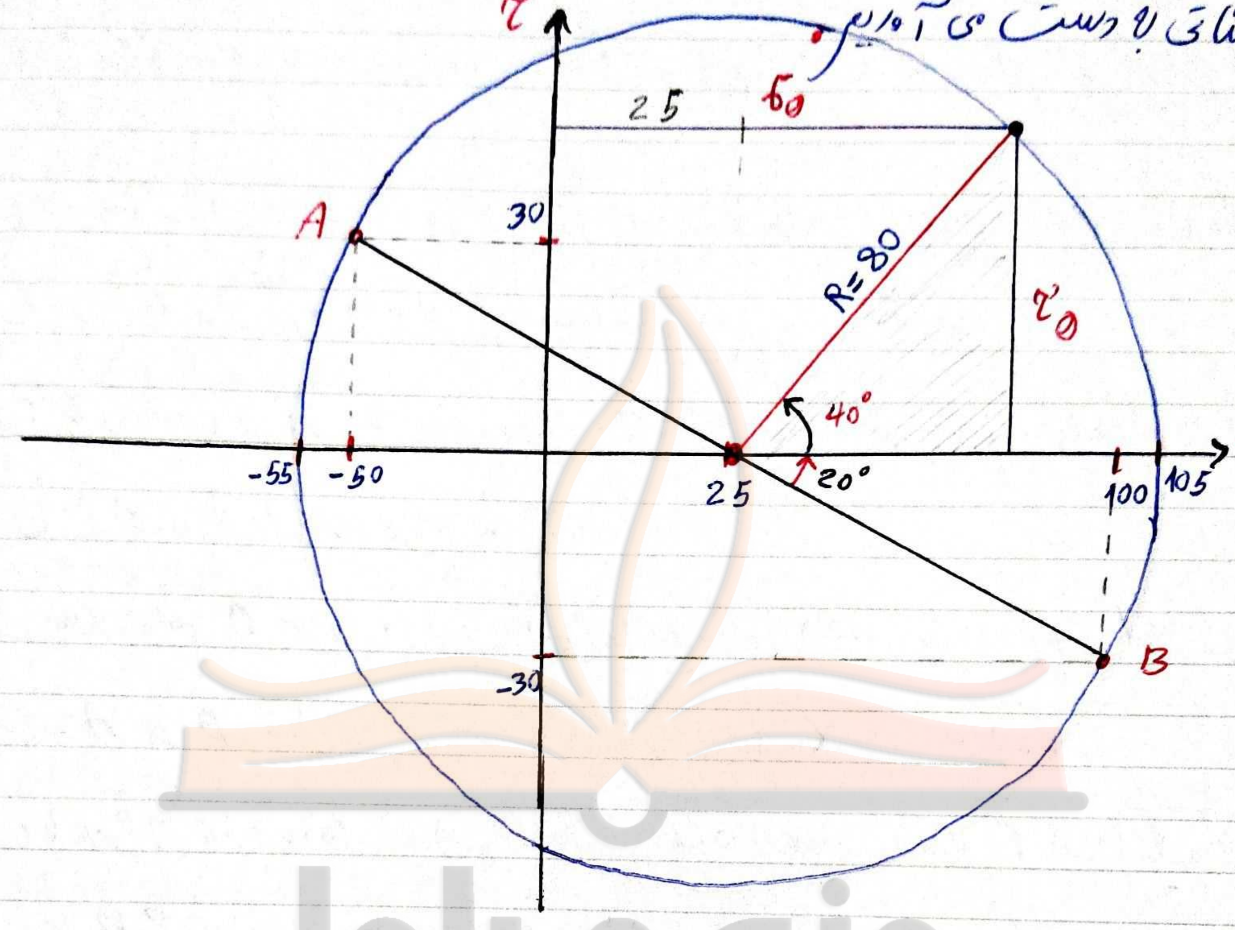
$$\tan\alpha = \frac{30}{80}$$

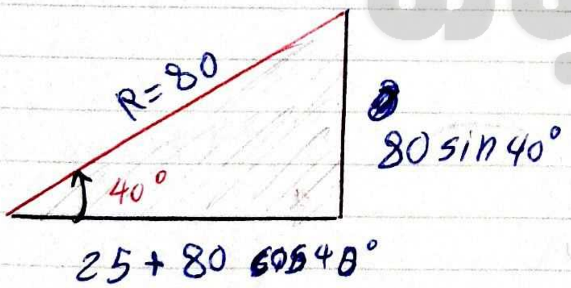
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{30}{80}\right) = 20^\circ$$

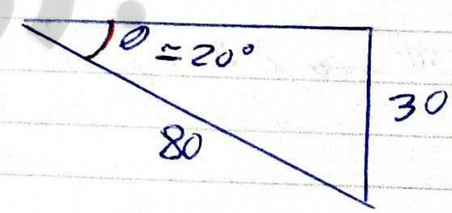
تنش محوری زاویه θ

تنش برشی زاویه θ

بعد از معلوم شدن زوایا : σ_θ و τ_θ را روی دایره مور نمایش داده و طبق روابط مثلثاتی به دست می آوریم







$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{30}{80}\right)$$

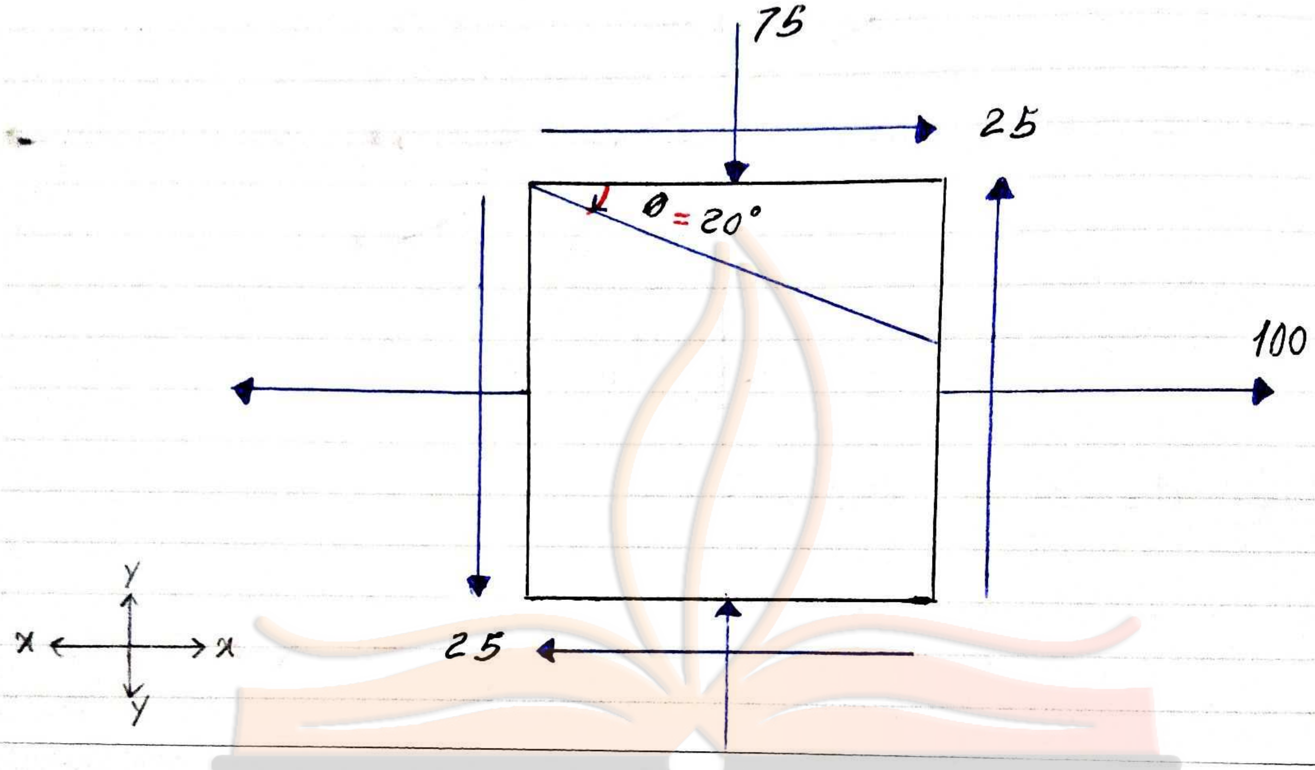
$$\begin{cases} \tau_\theta = R \sin 40° = 80 \sin 40° = \boxed{51.42} \\ \sigma_\theta = 25 + \underset{R}{80} \cos 40° = \boxed{86.28} \end{cases}$$

پایان قسمت (ب) سؤال.

تمرین : با توجه به المان تنشی زیر ، مطلوب است :

الف) محاسبه تنش های اصلی ؟

ب) تعیین کردن مقدار تنش های محوری و برشی در صفحه‌ای که زاویه θ با محور x دارد؟



فصل ۳ : کرنش و انواع آن

کرنش یک کمیت تانسوری می باشد. واکنش جسم در برابر تنش را کرنش می گویند.
علاوه بر تنش، تغییر مکان ها نیز باعث ایجاد کرنش می شوند.

بنابراین داریم که :

1- کرنش های ناشی از تنش « روابط هوک »

2- کرنش های ناشی از تغییر مکان « روابط گرین، روابط کرنش های هندسی »

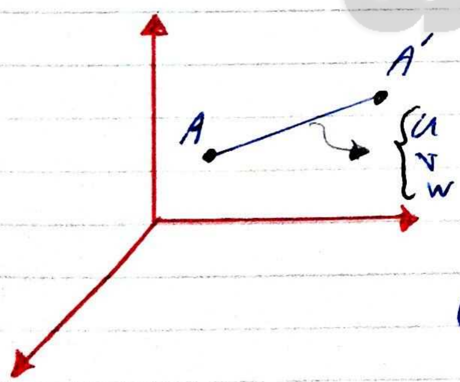
کرنش های ناشی از تغییر مکان :

در این حالت، ۳ تغییر مکان وجود دارد : تغییر مکان در راستای x $\vec{u}$

به تغییر مکان، جابجایی هم گفته می شود. تغییر مکان در راستای y $\vec{v}$

به تغییر مکان، تغییر شکل نیز می گویند. تغییر مکان در راستای z $\vec{w}$

$\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$ فضا یا میدان تغییر مکان جسم هستند.
که در سه محور تعریف می شوند.



اگر جسمی از یک نقطه به یک نقطه دیگر تغییر مکان داشته باشد، باعث ایجاد تنش شده که بر اثر آن کرنش به وجود می آید.

* تمام قواعدی که برای تانسور تنش داشتیم، برای تانسور کرنش هم داریم.

کرنش های محوری ناشی از تغییر مکان:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

کرنش های برشی ناشی از تغییر مکان:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

تانسور کرنش:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

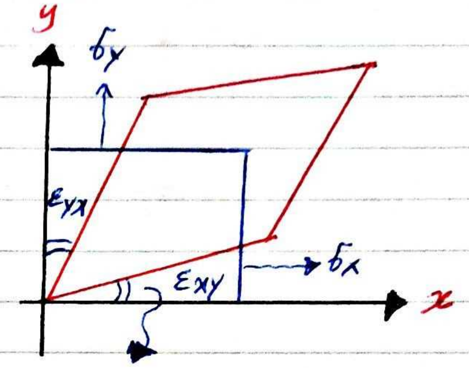
کرنش های برشی را گاهی با گاما (γ) هم نمایش می دهند که به اسم تغییرزاویه یا اعوجاج مطرح می شود، که برابر است با ۲ برابر کرنش:

تغییرزاویه

$$\gamma_{xy} = 2\,\varepsilon_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = 2\,\varepsilon_{xz}$$

$$\gamma_{zy} = 2\,\varepsilon_{zy}$$



کرنش برشی از نظر زاویه ای $\gamma_{xy} = 2\,\varepsilon_{xy}$

(زاویه)

کرنش محوری

مثال 1) مطلوب است تعیین تانسور کرنش در نقطه $(1, -1, 1)$ برای میدان تغییر شکل داده شده زیر.

$$u = 5x^2y + 4xyz$$

$$v = 6xy^2z - 3y^3$$

$$w = 12z^3 - 5yzx$$

حل) تانسور کرنش به صورت زیر است:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{5x^2y + 4xyz}{\partial x} = 10xy + 4yz$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{6xy^2z - 3y^3}{\partial y} = 12xyz - 9y^2$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \Rightarrow \frac{12z^3 - 5yzx}{\partial z} = 36z^2 - 5yx$$

* با توجه به نقطه داده شده خواهیم داشت: $x = 1 \quad y = 1 \quad z = -1$

کرنش های محوری:

$$\varepsilon_{xx} = 10(1)(1) + 4(1)(-1) = 6$$

$$\varepsilon_{yy} = 12(1)(1)(-1) - 9(1)^2 = -21$$

$$\varepsilon_{zz} = 36(-1)^2 - 5(1)(1) = 31$$

در ادامه کرنش های برشی را به دست می آوریم:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left((5x^2 + 4xz) + (6y^2z)\right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left((4xy) + (-5yz)\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left((6xy^2) + (-5zx)\right)$$

* با توجه به نقطه داده شده خواهیم داشت: $x = 1 \quad y = 1 \quad z = -1$

کرنش های برشی:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left((5(1)^2 + 4(1)(-1)) + (6(+1)^2(-1))\right) = -2.5$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\Big((4(1)(1)) - (5(1)(-1)) \Big) = 4.5$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\Big((6(1)(1)^2) - (5(-1)(1)) \Big) = 5.5$$

* حالا مقادیر به دست آمده را در تانسور کرنش جایگذاری می کنیم:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

تانسور کرنش

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 6 & -2.5 & 4.5 \\ -2.5 & -21 & 5.5 \\ 4.5 & 5.5 & 31 \end{bmatrix}$$

تمرین: تانسور کرنش را برای میدان تغییر مکان داده شده زیر، تعیین کنید. کرنش های اصلی و کرنش های برشی ماکزیمم را نیز محاسبه نمایید.

$A(0, 1, -2)$

$$\vec{u} = x^3yz - 5x^2y + 4x^3$$

$$\vec{V} = y^2x^3 - 4xy^2 + 4z^3$$

$$\vec{w} = z^3xy + 6x^3z^3$$

ارتباط بین تنش و کرنش:

در حالت سه بعدی هر تنشی در راستای خودش باعث کرنش محوری شده و در دو راستای دیگر باعث کرنش جانبی می‌شود. (مانند مثال اسفنج)

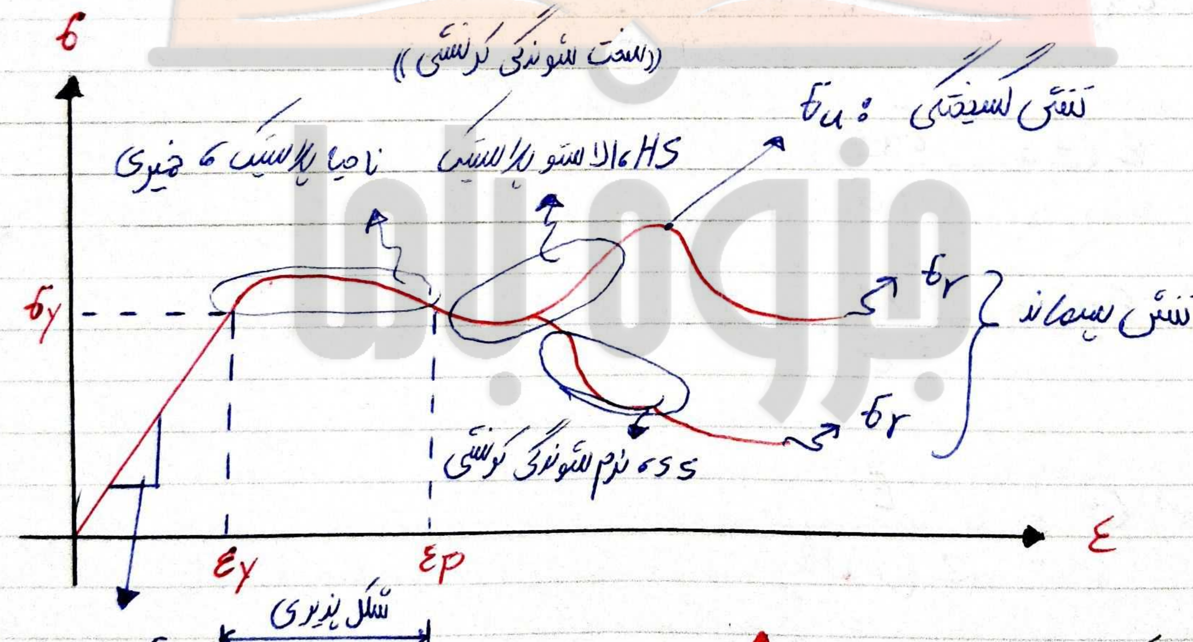
$\nu = -\dfrac{\varepsilon_{\text{جانبی}}}{\varepsilon_{\text{طولی}}}$ «ضریب پواسون - نو» : $0 < \nu < 0.5$

ν خواص ذاتی جسم (پارامتر ارتجاعی جسم)

برای بتن: $\nu = 0.2$ تا 0.25

برای فولاد: $\nu = 0.28$ تا 0.3

برای خاک: $\nu > 0.3$



$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$ (قانون هوک)

مدول الاستیسیته

منحنی تنش - کرنش کامل فولاد: تحت آزمایش کشش برای نمونه.

با توجه به قانون هوک و ضریب پواسون خواهیم داشت:

کرنش های محوری ناشی از تنش (قانون هوک):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

کرنش های برشی ناشی از تنش (قانون هوک):

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{4G} = \frac{\sigma_{xy}}{4G}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{4G}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{4G}$$

((مدول برشی)) $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

* با توجه به تانسور تنش داده شده؛ و با توجه به روابط فوق می توان تانسور کرنش را به دست آورد.

مثال) میدان تنش به صورت زیر داده شده است، مطلوب است:

الف) تعیین نیروهای حجمی در حالت تعادل جسم.

ب) تعیین تانسور تنش در نقطه $(1, -1, 0)$.

ج) تعیین تانسور کرنش در نقطه مورد نظر. کرنش ناشی از تنش؟

د) تعیین کرنش های اصلی و امتدادهای اصلی کرنش.

$$\sigma_{xx} = x^2 + y^2 \qquad \sigma_{xy} = xy \qquad E = 5\ MPa$$

$$\sigma_{yy} = y^2 + z^2 \qquad \sigma_{xz} = xz \qquad \nu = 0.3$$

$$\sigma_{zz} = z^2 + x^2 \qquad \sigma_{yz} = yz \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

حل الف) در ابتدا با استفاده از معادلات تعادل (معادلات دیفرانسیل در حالت تعادل)، نیروهای حجمی را به دست می آوریم:

$$① \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$② \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$③ \quad \underbrace{\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}}_{\text{نیروهای داخلی}} + \underbrace{f_z}_{\text{نیروهای خارجی}} = 0$$

نیروهای خارجی

نیروهای حجمی

① $2x + x + x + f_x = 0 \longrightarrow f_x = -4x$ نیروی حجمی در راستای محور x

② $y + 2y + y + f_y = 0 \longrightarrow f_y = -4y$

③ $z + z + 2z + f_z = 0 \longrightarrow f_z = -4z$

بنابراین نیروهای حجمی در سه راستای x و y و z به دست آمد.

حل ب)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$(1, -1, 0)$

$x = 1 ، y = -1 ، z = 0$

با قرار دادن نقاط داده شده در ضوابط تنش های مقدار تنش ها را به دست آورده و تانسور تنش را تشکیل می دهیم.

$\sigma_{xx} = x^2 + y^2 \longrightarrow (1)^2 + (-1)^2 = 2$

$\sigma_{yy} = y^2 + z^2 \longrightarrow (-1)^2 + (0)^2 = 1$

$\sigma_{zz} = z^2 + x^2 \longrightarrow (0)^2 + (1)^2 = 1$

$\sigma_{xy} = xy \longrightarrow (1)(-1) = -1$

$\sigma_{xz} = xz \longrightarrow (1)(0) = 0$

$\sigma_{yz} = yz \longrightarrow (-1)(0) = 0$

تشکیل تانسور تنش:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل ج) تعیین تانسور کرنش ناشی از تنش؟

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

کرنش های محوری ناشی از تنش، با توجه به قانون هوک و ضریب پواسون: # جایگذاری

$$E = 5 \qquad \nu = 0.3 \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \frac{5}{2(1+0.3)} = 1.9$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}) \Rightarrow \frac{2}{5} - \frac{0.3}{5}(1+1) = 0.28$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{zz}) \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{0.3}{5}(2+1) = 0.02$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{0.3}{5}(2+1) = 0.02$$

کرنش های برشی ناشی از تنش با توجه به قانون هوک و ضریب پواسون و مدل برشی:

جایگذاری

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{4G} \Rightarrow \frac{-1}{4(1.9)} = -0.13$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{4G} \Rightarrow \frac{0}{4(1.9)} = 0$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{4G} \Rightarrow \frac{0}{4(1.9)} = 0$$

$$\underbrace{[\varepsilon]}_{\text{تانسور کرنش}} = \begin{bmatrix} 0.28 & -0.13 & 0 \\ -0.13 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix}$$ ok

فصل 2

حل د) بر عهده خودمان ((مانند مثال های قبلی)) معادله مشخصه، کرنش های اصلی، امتداد های کرنش های اصلی

کرنش حجمی :

کرنش حجمی را با حرف (e) نمایش می دهند، مجموع کرنش های محوری :

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

تنش حجمی :

تنش حجمی را با حرف (θ) نمایش می دهند، مجموع تنش های محوری :

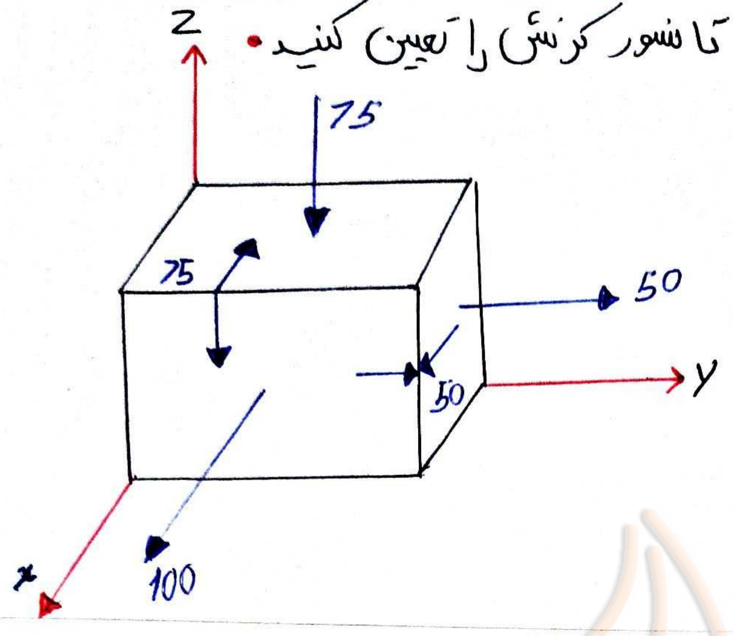
$$\theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

مثال : برای سؤال قبلی، کرنش حجمی و تنش حجمی را به دست آورید.

$$e = 0.28 + 0.02 + 0.02 = 0.32$$

$$\theta = 2 + 1 + 1 = 4$$

تمرین) با توجه به المان تنشی داده شده، تانسور کرنش را تعیین کنید.



$E = 2$

$\nu = 0.3$

مثال) برای تانسور کرنش داده شده، میزان تانسور تنش را تعریف نمائید.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.5 \\ 0 & -0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \qquad E = 2\ mpa \qquad \nu = 0.2$$

برعکس مثال های قبلی است، از تانسور کرنش $[\varepsilon]$ باید به تانسور تنش $[\sigma]$ برسیم. (۳ معادله - ۳ مجهول)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$0.1 = \frac{\sigma_{xx}}{2} - \frac{0.2}{2}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$0.2 = \sigma_{xx} - 0.2\,\sigma_{yy} - 0.2\,\sigma_{zz}$$

معادله اول : $x - 0.2y - 0.2z = 0.2$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$$

$$-0.2 = \frac{\sigma_{yy}}{2} - \frac{0.2}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$$

$$-0.4 = \sigma_{yy} - 0.2\,\sigma_{xx} - 0.2\,\sigma_{zz}$$

معادله دوم : $-0.2x + y - 0.2z = -0.4$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)$$

$$0.3 = \frac{\sigma_{zz}}{2} - \frac{0.2}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)$$

$$0.6 = \sigma_{zz} - 0.2\,\sigma_{xx} - 0.2\,\sigma_{yy}$$

معادله سوم : $-0.2x - 0.2y + z = 0.6$

حل معادله ۳ معادله ۳ مجهول به روش حذف گوسی :

$$① \quad x - 0.2y - 0.2z = 0.2$$

$$\begin{cases} ② \quad -0.2x + y - 0.2z = -0.4 \quad \rightarrow \quad \cancel{-0.2x} + y - 0.2z = -0.4 \\ \times(-)\ ③ \quad -0.2x + 0.2y + z = 0.6 \quad \rightarrow \quad \cancel{+0.2x} + 0.2y - z = -0.6 \end{cases}$$

$$Ⓐ \quad 0 + 1.2y - 1.2z = -1$$

$$\begin{cases} ① \quad x - 0.2y - 0.2z = 0.2 \quad \rightarrow \quad \cancel{x} - 0.2y - 0.2z = 0.2 \\ \times(5)\ ② \quad -0.2x + y - 0.2z = -0.4 \quad \rightarrow \quad \cancel{-x} + 5y - z = -2 \end{cases}$$

$$Ⓑ \quad 0 + 4.8y - 1.2z = -1.8$$

با حذف پارامتر x ، سه معادله سه مجهوله را به دو معادله و دو مجهول تبدیل کردیم. سپس دوباره باید معادله دو معادله ـ دو مجهول را به یک معادله ـ یک مجهول تبدیل کرده و یکی از ریشه ها را به دست آوریم.

دو معادله - دو مجهول :

$$\begin{cases} (A)\ 1.2y - 1.2z = -1 \longrightarrow 1.2y - \cancel{1.2z} = -1 \\ \times(-)\ (B)\ 4.8y - 1.2z = -1.8 \xrightarrow{\times(-)} -4.8y + \cancel{1.2z} = 1.8 \end{cases}$$

$$\circledast\ -3.6y + 0 = 0.8$$

$$\circledast\ -3.6y = 0.8 \longrightarrow y = -0.22 \longrightarrow \sigma_{yy} = -0.22$$

حالا $y = -0.22$ را در یکی از معادلات (۲ معادله - ۲ مجهول) قرار داده تا یکی از ریشه‌های دیگر به دست آید :

$$(A)\ 1.2y - 1.2z = -1$$

$$1.2(-0.22) - 1.2z = -1 \longrightarrow -0.264 - 1.2z = -1$$

$$-1.2z = -1 + 0.264 \longrightarrow -1.2z = -0.736 \longrightarrow z = 0.61$$

$$\sigma_{zz} = 0.61$$

با داشتن $y = -0.22$ و $z = 0.61$ می توان مقدار $x = ?$ را از یکی از معادلات (۳ معادله ۳ مجهول) ، با جایگذاری به دست آورد :

$$(1)\ x - 0.2y - 0.2z = 0.2$$

$$x - 0.2(-0.22) - 0.2(0.61) = 0.2$$

$$x + 0.044 - 0.122 = 0.2$$

$$x = 0.28 \longrightarrow \sigma_{xx} = 0.28$$

تا این مرحله با توجه به تانسور کرنش ((کرنش های محوری)) ، تنش های محوری تانسور تنش را به دست آوردیم.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \qquad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.5 \\ 0 & -0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \qquad [\sigma] = \begin{bmatrix} 0.28 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & -0.22 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0.61 \end{bmatrix}$$

حالا با توجه به درایه های قطر فرعی تانسور کرنش $[\varepsilon]$ ، درایه های قطر فرعی تانسور کرنش (σ) را به دست می آوریم:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \frac{2}{2(1+0.2)} = 0.8$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{4G} \Rightarrow 0 = \frac{\sigma_{xy}}{4(0.8)} \Rightarrow \sigma_{xy} = 0$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{4G} \Rightarrow 0.5 = \frac{\sigma_{xz}}{4(0.8)} \Rightarrow \sigma_{xz} = 1.6$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{4G} \Rightarrow 0.1 = \frac{\sigma_{yz}}{4(0.8)} \Rightarrow \sigma_{yz} = 0.32$$

تانسور تنش به دست آمده از تانسور کرنش : $[\sigma] = \begin{bmatrix} 0.28 & 0 & 1.6 \\ 0 & -0.22 & 0.32 \\ 1.6 & 0.32 & 0.61 \end{bmatrix}$

متقارن است . OK

تمرین: تانسور [illegible] را برای میدان تغییر مکان داده شده زیر ، تعیین نمائید.

تنش

$A(0, 1, -2)$

$$\vec{u} = 4xy + x^3$$

$$\vec{v} = 3x^2y^2 + 5y$$

$$\vec{w} = 2xz^3 - 5z^2y$$

$E = 2\ MPa$

$\nu = 0.3$

ارتباط بین پارامترهای ارتجاعی مصالح:

	E و G	E و ν	G و ν	K و G	λ و G
λ ضریب لامه	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$K = \frac{-2G}{3}$	—
G مدول برشی	—	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	—	—	—
K مدول بالک	$\frac{EG}{3(3G-E)}$	$\frac{E}{2(1-\nu)}$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1+2\nu)}$	—	$\lambda + \frac{2G}{3}$
E مدول الاستیسیته	—	—	$2G(1+\nu)$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$
ν ضریب پواسون	$\frac{E}{2G}-1$	—	—	$\frac{3K-2G}{KG+2G}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$

پارامترهای (E) و (ν):

فولاد
$$\begin{cases} E = 2.1 \times 10^{7} \ Kg/cm^2 \\ \nu = 0.3 \end{cases}$$

فصل ۴ : معادلات سازگاری

معادلات سازگاری در فضای تنشی و کرنشی به ۲ صورت بیان می‌شود :

۱) معادلات مربوط به فضای کرنشی : معادلات سنت ونان .

۲) معادلات مربوط به فضای تنشی : معادلات بلترامی و میشل .

اصول معادلات سازگاری این است که تنش ها و کرنش هایی که به جسم وارد می‌شود، باعث عدم وجود اوجاج «کرنش های غیر سازگار» در جسم شود .

روابط سازگاری ، پیوستگی میدان تنش یا پیوستگی میدان کرنش را نشان می دهد .

* در معادلات سازگاری «معادلات سنت ونان و معادلات بلترامی و میشل» باید توجه داشت که این معادلات بر روی پارامترهای تنش و کرنش اعمال می‌شود . یعنی اگر تنش یا کرنش را به صورت عددی به ما دهند ، ما نمی توانیم سازگاری آنها را بررسی کنیم . چون معادلات سازگاری بر پایه مشتق است و حتماً باید تنش و کرنش به صورت تابع «معادله ، ضابطه» باشد که بتوان از آن مشتق گرفته شود .

* معادلات سازگاری به عنوان جزئی از سؤال طرح می گردد ، آن قسمتی از سؤال را باید سازگاری اش را بررسی نمود که به صورت تابع «پارامتر» است . و بعد از جایگذاری نقاط (x و y و z) و رسیدن به عدد ؛ معادلات سازگاری قابل بررسی نخواهد بود . * روابط سازگاری فقط فقط به صورت پارامتری «ضابطه‌ای» قابل بررسی می باشد و نه به صورت عددی .

* معادلات سازگاری در فضای کرنش - معادلات سنت و نان :

$$① \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \, \partial y}$$

$$② \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \, \partial z}$$

$$③ \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \, \partial y}$$

$$④ \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right] = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \, \partial z}$$

$$⑤ \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right] = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \, \partial z}$$

$$⑥ \quad \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right] = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \, \partial x}$$

* زمانی سازگاری برقرار است که هر 6 معادله فوق برقرار باشد.

هر کدام از این روابط برقرار نباشد، دیگر نیازی به بررسی مابقی روابط نیست و در نتیجه سازگاری برقرار نخواهد بود.

* بهتر است برای بررسی فضای کرنش: ابتدا معادله 1 و 4 را بررسی کنیم. در اکثر مواقع اگر

رابطه 1 برقرار باشد، روابط 2 و 3 نیز برقرار است.

و اگر رابطه 4 برقرار باشد، در اکثر مواقع نیز روابط 5 و 6 برقرار خواهند بود.

بنابراین ابتدا روابط 1 و 4 را بررسی کرده و اگر برقرار بود، سپس به سراغ بررسی روابط 2 و 3 و 5 و 6 می‌رویم.

ε : کرنش محوری.

γ : کرنش زاویه‌ای که دوبرابر کرنش محوری است.

$$\gamma_{xy} = 2\,\varepsilon_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = 2\,\varepsilon_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = 2\,\varepsilon_{yz}$$

مثال) میدان کرنشی به صورت زیر ارائه شده است؛ آیا شرایط سازگاری در این میدان کرنشی برقرار است یا خیر؟

$$\varepsilon_x = 15x^2y + 8xy^2 + 3z^2 \qquad \gamma_{xy} = 5x^3 + 8x^2y + 14xz^2$$

$$\varepsilon_y = 33y^2 \qquad \gamma_{yz} = 14x^2z + 2xyz^3$$

$$\varepsilon_z = 3xy^2z^2 \qquad \gamma_{xz} = 6xz + y^2z^3$$

حل) با توجه به معادلات سازگاری در فضای کرنشی، معادلات سنت ونان؛ ابتدا رابطه ① و ④ را بررسی می کنیم. در صورت برقرار بودن این دو روابط سپس مابقی روابط را مورد بررسی قرار می دهیم.

معادله ①:

$$① \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial\, 15x^2y + 8xy^2 + 3z^2}{\partial y} = \frac{\partial\, 15x^2 + 16xy}{\partial y} = 16x$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial\, 33y^2}{\partial x} = \frac{\partial\, 0}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial\, 5x^3 + 8x^2y + 14xz^2}{\partial x} = \frac{\partial\, 15x^2 + 16xy + 14z^2}{\partial y} = 16x$$

$$① \quad 16x + 0 = 16x \quad \checkmark$$

«معادله اول برقرار است»

معادله (4) 8

(4) $$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right]=2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}$$

* ابتدا داخل کروشه را به دست آورده و سپس نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial\, (6xz+y^2z^3)}{\partial y} = 2yz^3$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial\, (14x^2z+2xyz^3)}{\partial x} = 28xz+2yz^3$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial\, (5x^3+8x^2y+14xz^2)}{\partial z} = 28xz$$

(4) $$\frac{\partial}{\partial x}\left[\cancel{(2yz^3)}\cancel{(-28xz)}\cancel{(-2yz^3)}\cancel{(+28xz)}\right]=2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\,0\,\right] \Rightarrow \frac{\partial\, 0}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z} \Rightarrow \frac{\partial\, (15x^2y+8xy^2+3z^2)}{\partial y} = \frac{\partial\, (15x^2+16xy)}{\partial z} = 0$$

(4) $0 = 2(0) \longrightarrow 0 = 0$ ✓ «معادله چهارم برقرار است»

* مابقی روابط سازگاری را نیز باید مورد بررسی قرار دهیم؛ زیرا معادله (1) و (4) برقرار است.

معادله ② :

② $\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$

$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial (15x^2y + 8xy^2 + 3z^2)}{\partial z} = \frac{\partial 6z}{\partial z} = 6$

$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial\, 3xy^2z^2}{\partial x} = \frac{\partial\, 3y^2z^2}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \Rightarrow \frac{\partial (6xz + y^2z^3)}{\partial x} = \frac{\partial\, 6z}{\partial z} = 6$

② $6 + 0 = 6$ ✓ «معادله دوم برقرار است»

معادله ③ :

③ $\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \partial y}$

$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial\, 33y^2}{\partial z} = \frac{\partial 0}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial\, 3xy^2z^2}{\partial y} = \frac{\partial\, 6xyz^2}{\partial y} = 6xz^2$

$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \partial y} \Rightarrow \frac{\partial (14x^2z + 2xyz^3)}{\partial z} = \frac{\partial (14x^2 + 6xyz^2)}{\partial y} = 6xz^2$

③ $0 + 6xz^2 = 6xz^2$ ✓ «معادله سوم برقرار است»

معادله ⑤ 8

$$(5)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right]=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}$$

* ابتدا داخل کروشه را بدست آورده و سپس نسبت به ∂y مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial\, 5x^3+8x^2y+14xz^2}{\partial z}=28xz$$

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial\, 6xz+y^2z^3}{\partial y}=2yz^3$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial\, 14x^2z+2xyz^3}{\partial x}=28xz+2yz^3$$

$$(5)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[28xz\cancel{-(2yz^3)}+28xz\cancel{+(2yz^3)}\right]=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[28xz+28xz\right] \Rightarrow \frac{\partial\, 56xz}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \Rightarrow \frac{\partial\, 33y^2}{\partial x}=\frac{\partial\, 0}{\partial z}=0$$

$$(5)\quad 0=2(0) \longrightarrow 0=0 \checkmark$$

«معادله پنجم برقرار است»

تمرین: شرایط سازگاری را بررسی نمائید. $(1, 2, -1)$

$\vec{u} = 4xy +$ [redacted] x^3

$$\vec{v} = 3x^2y^2 + 5y$$

$$\vec{w} = 3xz^3 - 5z^2y$$

حل: با توجه به روابط کرنش های محوری ناشی از تغییر مکان «روابط کرنش»، پارامترها «ضابطه های» کرنش ها را به دست آورده و قبل از جایگذاری نقاط، شرایط سازگاری را بررسی می کنیم. نقطه داده شده فقط برای به دست آوردن تانسور کرنش کاربرد دارد.

معادلات سازگاری در فضای تنشی - معادلات بلترامی و میشل :

① $$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{-\nu}{1-\nu}\left[\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right] - 2\frac{\partial f_x}{\partial x}$$

② $$\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = \frac{-\nu}{1-\nu}\left[\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right] - 2\frac{\partial f_y}{\partial y}$$

③ $$\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \frac{-\nu}{1-\nu}\left[\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right] - 2\frac{\partial f_z}{\partial z}$$

④ $$\nabla^2 \sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

⑤ $$\nabla^2 \sigma_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = -\left(\frac{\partial f_z}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial z}\right)$$

⑥ $$\nabla^2 \sigma_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = -\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)$$

(∇) عملگر دل : $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

(Θ) تنش حجمی : $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

نیرو های حجمی : f_x , f_y , f_z

(e) کرنش حجمی : $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

مثال) آیا توزیع تنش داده شده ، معادلات سازگاری را اغنا می‌کند یا خیر؟

$\sigma_x = 2x^3 + y$ $\qquad$ $\tau_{xy} = 2z + 8xy^2$

$\sigma_y = x^3 + 3z$ $\qquad$ $\tau_{xz} = x^2 z + xy$

$\sigma_z = 4y^2 + xz^3$ $\qquad$ $\tau_{yz} = 6xyz^2$ $\qquad$ $\nu = 0.3$

حل) در قدم اول نیروهای جسمی را با استفاده از روابط معادلات دیفرانسیل در حالت تعادل باید بدست آوریم:

$$① \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$② \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$③ \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$$

$$① \quad 6x^2 + 16xy + x^2 + f_x = 0 \rightarrow f_x = -7x^2 - 16xy$$

$$② \quad 8y^2 + 0 + 12xyz + f_y = 0 \rightarrow f_y = -8y^2 - 12xyz$$

$$③ \quad 2xz + y + 6xz^2 + 3xz^2 + f_z = 0 \rightarrow f_z = -9xz^2 - 2xz - y$$

در قدم بعد ، با توجه به روابط معادلات بلترامی و میشل باید سازگاری را بررسی کنیم.

① $$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{-\nu}{1-\nu}\left[\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right] - 2\frac{\partial f_x}{\partial x}$$

$$\nabla^2 \sigma_x = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} \Rightarrow 12x + 0 + 0 = \boxed{12x}$$

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \Longrightarrow 2x^3 + y + x^3 + 3z + 4y^2 + xz^3 =$$

$$\theta = 3x^3 + 4y^2 + y + 3z + xz^3$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \overset{\prime}{\Rightarrow} 9x^2 + z^3 \overset{\prime\prime}{\Rightarrow} \boxed{18x}$$

$$\frac{1}{1+\nu} \Rightarrow \frac{1}{1+0.3} = \boxed{0.769}$$

محاسبه سمت چپ تساوی:

$$12x + 18x(0.769) = 25.84x$$

سمت راست تساوی هم حتماً باید به این مقدار برسیم تا برقرار باشد.

$$\frac{-\nu}{1-\nu} \Rightarrow \frac{-0.3}{1-0.3} = -0.428$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} \Rightarrow -14x - 16y$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} \Rightarrow -16y - 12xz$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial z} \Rightarrow -18xz - 2x$$

$$2\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\right) \Rightarrow -28x - 32y$$

محاسبه سمت راست تساوی:

$$-0.428[-14x-16y-16y-12xz-18xz-2x]-(-28x-32y)$$

$$-0.428[-16x-32y-30xz]-(-28x-32y)$$

در طرف سمت راست تساوی پارامترهای xz و y باقی مانده اند که در این حالت با طرف راست تساوی برابر نبوده و در نتیجه شرایط سازگاری برقرار نیست و دیگر نیازی به بررسی مابقی معادلات نمی باشد.

$$-0.428[-16x-32y-30xz]+28x+32y$$

$$6.84x+13.69y+12.84xz+28x+32y$$

$$34.84x+45.69y+12.84xz$$

بررسی طرفین معادله:

1) $25.84x \neq 34.84x+45.69y+12.84xz$

طرفین معادله برابر نیست و در نتیجه معادلات سازگاری برقرار نمی باشد.

* جهت آموزش در صفحه بعد، معادله 4 را مورد بررسی قرار می دهیم.

④ $$\nabla^2 \sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2\sigma_{xy} = \frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial z^2} \Rightarrow 0 + 16x + 0 = \boxed{16x}$$

$$\frac{1}{1+\nu} \Rightarrow \frac{1}{1+0.3} = \boxed{0.769}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} \xRightarrow{'} 9x^2+z^3 \xRightarrow{''} \boxed{0}$$

$$16x + 0.769\,(0) = 16x$$ سمت چپ تساوی:

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} \Rightarrow -12yz$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} \Rightarrow -16x$$

$$-(-12yz-16x) = 12yz+16x$$ محاسبه سمت راست تساوی:

بررسی شرایط سازگاری دو طرف تساوی:

④ $$16x \neq 12yz + 16x$$

⇐ شرایط سازگاری در تنش برقرار نیست »

تمرین 8 – آیا با توجه به توزیع تنش داده شده، معادلات سازگاری برقرار هستند یا خیر؟

$$\nu = 0.3$$

$$\sigma_{xx} = x^2 + y^2 \qquad \sigma_{xy} = xy$$

$$\sigma_{yy} = y^2 + z^2 \qquad \sigma_{yz} = yz$$

$$\sigma_{zz} = z^2 + x^2 \qquad \sigma_{zx} = zx$$

تمرین) با توجه به میدان تغییر مکان زیر، مطلوب است:

الف) تانسور کرنش در نقطه (1-، 1، 1).

ب) تانسور تنش در نقطه مورد نظر و با فرض $E=2$ و $V=0.3$.

ج) بررسی شرایط سازگاری.

$$u = 3x^2 + yz^3 + 5x^2yz$$

$$v = 5y^2z^3 + 6x^2y - 2z^3$$

$$w = z^3x - 5y^2x^2 + 6zx$$

« معادلات لامه »

معادلات لامه ارتباط بین میدان تغییر مکان و نیروهای حجمی است.

$$① \quad G\nabla^2 u + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + \bar{X} = 0$$

$$② \quad G\nabla^2 v + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + \bar{Y} = 0$$

$$③ \quad G\nabla^2 w + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + \bar{Z} = 0$$

« ضریب لامه » $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

« مدول برشی » $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

« کرنش حجمی » $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

« عملگر دل » $\nabla^2 \bigcirc = \left(\dfrac{\partial^2 \bigcirc}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \bigcirc}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \bigcirc}{\partial z^2}\right)$

مثال) میدان تغییر مکانی به شکل زیر داده شده است، مقادیر نیروهای حجمی را در نقطه (1- و 1 و 1) تعیین نمائید.

$$u = x^2 + y^2 \qquad E = 2$$

$$v = y^2 + z^2 \qquad \nu = 0.3$$

$$w = x^2 + z^2$$

حل) ابتدا باید کرنش ها را به دست آورد (ε) تا بتوان کرنش حجمی را محاسبه نمود (e).

« یافتن کرنش ← مقداردهی کرنش و یافتن تانسور کرنش ـ به دست آوردن تنش با توجه به کرنش ـ محاسبه تنش های اصلی و امتداد های اصلی تنش ـ دوران و ... را می توان در ادامه حل این مثال مشخص نمود » تیپ مثال ترکیبی

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \varepsilon_x = 2x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \varepsilon_y = 2y$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \Rightarrow \varepsilon_z = 2z$$

«کرنش حجمی» $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \Rightarrow e = 2x + 2y + 2z$

در مرحله بعد پارامترهای (λ) و (G) را محاسبه می کنیم.

«مدول برشی» $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \frac{2}{2(1+0.3)} = 0.8 \Rightarrow G = 0.8$

«ضریب لامه» $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Rightarrow \dfrac{0.3 \times 2}{(1+0.3)(1-2(0.3))} \Rightarrow \lambda = 1$

در ادامه معادلات لامه را نوشته و پارامترهای معلوم و مجهول آن را معلوم می‌سازیم

(1) $G \nabla^2 u + (\lambda + G) \dfrac{\partial e}{\partial x} + \bar{X} = 0$

«عملگر دل» $\nabla^2 u = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$

$\nabla^2 u = 2 + 2 + 0 = 4$

جایگذاری در فرمول (1) $0.8 \times 4 + (1 + 0.8)\, 2 + \bar{X} = 0$

$3.2 + 3.6 + \bar{X} = 0$

$\bar{X} = -3.2 - 3.6$

«نیروی جسمی در راستای x» $\bar{X} = -6.8$

(2) $G \nabla^2 v + (\lambda + G) \dfrac{\partial e}{\partial y} + \bar{Y} = 0$

«عملگر دل» $\nabla^2 v = \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$

$\nabla^2 v = 0 + 2 + 2 = 4$

جایگذاری در فرمول (2) $0.8 \times 4 + (1 + 0.8)\, 2 + \bar{Y} = 0$

«نیروی جسمی در راستای Y» $\bar{Y} = -6.8$

③ $G\nabla^2 w + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + \bar{Z} = 0$

«عملگر دل» $\nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$

$\nabla^2 w = 2 + 0 + 2 = 4$

جایگذاری در فرمول ③ $0.8 \times 4 + (1 + 0.8)2 + \bar{Z} = 0$

$\bar{Z} = -6.8$ «نیروی حجمی در راستای z»

* از نقطه داده شده (1، -1 و 1) در این مثال استفاده نشد؛ زیرا نیروهای حجمی به صورت عدد به دست آمدند و فاقد پارامترهای x و y یا z می باشد.

* در این مثال اگر از ما می خواست شرایط سازگاری را بررسی کنیم؛ چه نوع سازگاری را باید کنترل می کردیم؟ و چرا؟ کنترل سازگاری کرنشی؛ چون پارامترهای میدان تغییر مکان داده شده است.

تمام معادلات استفاده شده در تئوری الاستیسیته :

1- هوک : ارتباط بین تنش و کرنش . به دست آوردن کرنش از روی تنش و برعکس.

2- کوشی : محاسبه کرنش ها از روی میدان تغییر مکان . $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ((کرنش های هندسی))

3- زاویه «معادلات تعادل» : ارتباط بین تنش و نیروهای حجمی .

4- لامه : ارتباط بین میدان تغییر مکان و نیروهای حجمی.

5- سنت ونان : کنترل سازگاری کرنش ها. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

6- بلترامی و میشل : کنترل سازگاری تنش ها. $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$

← به صورت پارامتری باید باشد ((صورت سؤال می دهد))

تمرین : با توجه به میدان تغییر مکان داده شده مطلوب است :

الف) تعیین تانسور کرنش در نقطه (1-و2و1) .

ب) تانسور تنش.

ج) بررسی سازگاری.

د) محاسبه نیرو های حجمی.

$$u = 4xyz^2 - 2z^2y$$

$$v = 6xy^2 - z^2y$$

$$w = 5xy^2z^3 - 4y^2x$$

$$E = 20\ MPa$$

$$\nu = 0.3$$