Subject
Date

جلسه اول

سرفصل:

فصل اول: آنالیز برداری و یادآوری ماتریس ها

فصل دوم: اعداد مختلط (امتحان میان ترم برگزار می شود)

فصل سوم: انتگرال گیری در اعداد مختلط

فصل چهارم: دنباله ها و سری

فصل پنجم: حساب تغییرات

مرجع: ریاضیات مهندسی تألیف دکتر شیدفر (ریاضی مهندسی)*

ارزشیابی امتحان: ۱۲ پایان ترم، ۵ میان ترم، ۳ تمرینات با دو هفته مهلت تحویل

Subject
Date

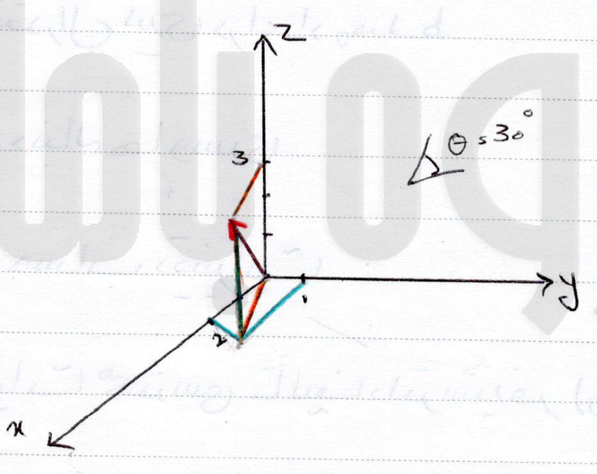
فصل اول: آنالیز برداری و تانسورها

بردار = کمیتی که هم اندازه و هم جهت دارد.

$\vec{a} : (a_x , a_y , a_z)$

مثال ۱) $\vec{a} : (2 , 1 , 3)$ $\quad \vec{b} : (-1 , 0 , -3)$

$$\begin{cases} a = 2i + j + 3k \\ b = -i - 3k \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} \vec{a}+\vec{b} = i + j & \text{جمع} \\ \vec{a}-\vec{b} = 3i + j + 6k & \text{تفریق} \end{array}$$



ضرب بردارها

1, $(a \cdot b)$ ضرب داخلی

2, $(a \times b)$ ضرب خارجی

Subject
Date

ضرب داخلی حاصلش اسکالر یعنی عدد است ولی ضرب خارجی حاصل و اندازه اش بردار است.

$1,\ |a . b| = |a| . |b| . \cos\theta$

$2,\ |\vec{a} \times \vec{b}| = |a| \times |b| . \sin\theta$

$① \Rightarrow |a.b| = (2 \times -1) + (1 \times 0) + (3 \times -3) =$

$-2 + 0 - 9 = -11$

محاسبه اندازه ها

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{-1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$|a| . |b| \cos\theta = \sqrt{14} . \sqrt{10} . \cos 30^\circ = 10,24$

$$② \Rightarrow |a \times b| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3i + 3j + k$$

$|a| \times |b| \sin\theta$

Subject
Date

ماتریس

ماتریس جدولی است مستطیلی از عناصری مانند اعداد، حروف، توابع و ... که دارای ستون‌های عمودی و سطرهای افقی است. هر یک از عناصر تشکیل‌دهنده ماتریس را یک درایه می‌گوییم. ماتریس A دارای m سطر و n ستون:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

انواع ماتریس

1- ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر دارد. $A=\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times n}$

2- ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون دارد. $A=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{n\times 1}$

3- ماتریس مربع: ماتریسی که تعداد سطر و ستون آن‌ها برابر است. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$

4- ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربعی که درایه های زیر قطر اصلی آن صفر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

قطر فرعی

قطر اصلی

5- ماتریس پایین مثلثی: ماتریس مربعی که درایه های بالای قطر اصلی صفر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

6- ماتریس قطری: ماتریس مربعی که درایه های غیر قطر اصلی آن صفر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

7- ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که درایه های قطر اصلی آن همگی برابر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

8- ماتریس همانی: ماتریس قطری که درایه های قطر اصلی آن همگی 1 باشند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PAPCO

Subject
Date

۹. ماتریس صفر: ماتریسی که همه درایه های آن صفر باشند. $\bar{O}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۰. ماتریس متقارن: ماتریسی که سطر و ستون را جابجا کنیم تغییری نکند.

$$A^T = A$$

۱۱. ماتریس پادمتقارن: ماتریسی که سطر و ستون را جابجا کنیم قرینه می شود.

$$A^T = -A$$

۱۲. ماتریس همسازه: اگر به جای هر یک از درایه های ماتریس A، همسازه آن را بگذاریم حاصل را ماتریس همسازه گوییم N

۱۳. ماتریس الحاقی: ترانهاده ی ماتریس همسازه را الحاقی گوییم. $N^T = A^*$

۱۴. ماتریس وارون: یک تقسیم بر ماتریس است. A^{-1} $\quad [A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^*$

ترانهاده ماتریس:

اگر تمامی سطر و ستون های ماتریس A را جابجا کنیم، ماتریس جدیدی بدست می آید. A^T یا A'

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}_{3\times4} \qquad A' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}_{4\times3}$$

Subject
Date

جمع و تفریق ماتریس ها

ماتریس هایی قابل جمع یا تفریق هستند که هم درجه باشند که عناصر ماتریس نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم می شوند.

$A=[a_{ij}]_{m\times n} \quad B=[b_{ij}]_{p\times q} \Rightarrow A\times B \Rightarrow m=p \text{ و } n=q$

دترمینان

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left((-1)^{1+1}\overbrace{(a_2b_3-a_3b_2)}^{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}\, i\right) + \left((-1)^{1+2}\overbrace{(a_1b_3-b_1a_3)}^{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}\, j\right) +$$

$$\left((-1)^{1+3}\overbrace{(a_1b_2-b_1a_2)}^{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}\, k\right) \Rightarrow i\times(a_2b_3-a_3b_2) - j(a_1b_3-a_3b_1) + k\times(a_1b_2-a_2b_1)$$

دترمینان را از سطری حساب می کنیم که صفر داشته باشد.

مثال

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0-9 \\ 2-1+0 \\ 0+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$3\times3 \quad 3\times1$

باید برابر باشند

Subject
Date

مثال ۳) معکوس را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow [A]^{-1}=\frac{1}{A}\times A^{*}$$

$$|A| = 0\times\begin{vmatrix}0 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\underbrace{0\big((0\times 0 - \underbrace{-3\times -1}_{-3})\big)}_{0} - \underbrace{0\big(1\times 0 - \underbrace{-3\times 2}_{+6}\big)}_{0} + \underbrace{3\big(1\times -1 - \underbrace{0\times 2}_{-1}\big)}_{-3}$$

$$|A| = -3$$

$$A^{T}=\begin{bmatrix}\overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{0}\\ \overset{-}{0} & \overset{+}{-1} & \overset{-}{0}\\ \overset{+}{-3} & \overset{-}{0} & \overset{+}{3}\end{bmatrix}$$

$$A^{*}=\begin{bmatrix}
+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3 & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ -3 & 3\end{vmatrix}=0 & +\begin{vmatrix}0 & -1\\ -3 & 0\end{vmatrix}=-3\\
-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-6 & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -3 & 3\end{vmatrix}=3 & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{vmatrix}=-6\\
+\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0 & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0 & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1
\end{bmatrix}$$

Subject
Date

$$A^* = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -6 & 3 & +6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^* \Rightarrow -\frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & +1 \\ +2 & -1 & +2 \\ 0 & 0 & +1/3 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات خطی

ماتریس معکوس: تمام مراحلی را که در مثال ۲ انجام داده ایم را انجام می دهیم

سپس از رابطه $x = A^{-1}B$ جواب معادله را بدست می آوریم.

P4PCO

$$\underbrace{\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}}_{\text{معادله ۱}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{bmatrix}}_{B}$$

$$Ax = B$$

مثال ۴) دستگاه معادلات زیر را با استفاده از روش ماتریس ها حل کنید.

$$\begin{cases} x - 3z = 2 \\ 2x - y = -1 \\ 3z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^{-1} \times \text{ضرایب}$$

در مثال ۳ A^{-1} را بدست آورده ایم

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ & +۲ \\ ۰ & ۰ & ۱/۳ \end{bmatrix}$$

پس

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ & +۲ \\ ۰ & ۰ & ۱/۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ + -۰ + ۲ \\ -۲ + ۱ - ۲ \\ ۰ + ۰ + -۲/۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \\ -۲/۳ \end{bmatrix}$$

Subject
Date

تمرین

دستگاه معادلات زیر را با روش ماتریس حل کنید.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ 2x + y - 4z = 5 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$Ax = B \longrightarrow x = A^{-1}B \longrightarrow [A^{-1}] = \frac{1}{|A|} \cdot A^{*}$$

روش ساروس ← این روش برای محاسبه‌ی دترمینان درجه ۳ بکار می‌رود در این روش سطرهای اول و دوم را به دنبال سطر سوم می‌نویسیم، سپس عناصر قطر اصلی و موازی آن را در نظر می‌گیریم؛ حاصل ضرب‌های آن‌ها سه جمله‌ی اول دترمینان را به دست می‌دهند که آن‌ها را با علامت مثبت می‌نویسیم، سپس قطر فرعی و موازی آن را در نظر می‌گیریم؛ حاصل ضرب آن‌ها سه جمله دیگر دترمینان را به دست می‌دهند که به آن علامت منفی نظیر می‌شود.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{matrix}$$

$$|A| = +(ab_1c_2 + a_1b_2c + a_2bc_1) - (cb_1a_2 + c_1b_2a + c_2ba_1)$$

Subject
Date

می‌توانیم ستون های اول و دوم را به دنبال ستون سوم بنویسیم و سپس مقدار دترمینان را حساب کنیم

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right|$$

$$+\underbrace{(+8+2+3)}_{13} - \underbrace{(-12-1+4)}_{-9} = 22$$

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$A_{11} : (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 7$ $\quad A_{12} : (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{13} : (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7$

$A_{21} : (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = (-1)\times(-6) = +6$ $\quad A_{22} : (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -10$ $\quad A_{23} : (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = +4$

$A_{31} : (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$ $\quad A_{32} : (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$ $\quad A_{33} : (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$

$$A^* \begin{bmatrix} 9 & -1 & -7 \\ 2 & -10 & +4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Subject
Date

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^{*} \longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{22} & -\frac{1}{22} & \frac{7}{22} \\ \frac{2}{22} & -\frac{10}{22} & \frac{4}{22} \\ \frac{5}{22} & -\frac{3}{22} & -\frac{1}{22} \end{bmatrix}$$

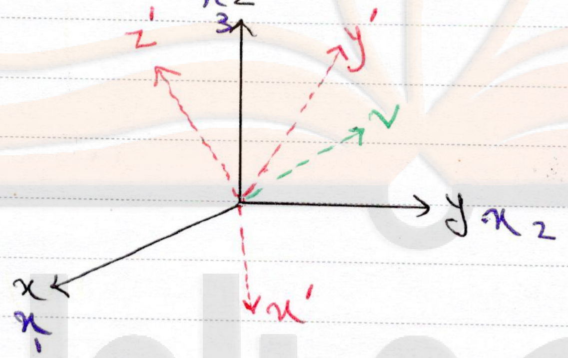
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24}{11} \\ \frac{7}{11} \\ \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Subject
Date

جلسه دوم

دوران سیستم مختصات

وقتی سیستم مختصات دوران می کند. نیاز داریم به ماتریس دوران



n_{11} : ضریب i' با i

$$V' = n^{T} V$$

ماتریس دوران

		i'_1	i'_2	i'_3			
i	i_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	$\cos(x_1, x'_1)$	$\cos(x_1, x'_2)$	$\cos(x_1, x'_3)$
j	i_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	"	"	"
k	i_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	"	"	"

اگر بردار T برابر $\vec{t} = 10\vec{i}_1 + 10\vec{i}_2 - 20\vec{i}_2$ در دستگاه مختصات موجود باشد. سپس

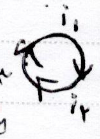
محورهای مختصات را با زوایای زیر دوران دهیم، مطلوب است تعیین تصویر بردار

$\vec{t}$ در دستگاه محورهای جدید:

$$i'_1 = \frac{2\vec{i}_1 + 2\vec{i}_2 + \vec{i}_3}{3}$$

$$i'_2 = \frac{\vec{i}_1 - \vec{i}_2}{\sqrt{2}}$$

دو بردار که اگر ضرب خارجی کنیم بردار سومی بدست می‌آید



اگر ساعتگرد باشد + و اگر پادساعتگرد باشد در منفی ضرب می‌شود.

$$\vec{t} = 10i_1 + 10i_2 - 20i_3$$

$$\vec{i}'_3 = i'_1 \times i'_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} i_1 - \frac{1}{3\sqrt{2}} i_2 + \frac{4}{3\sqrt{2}} i_3$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(i_1 - i_2 + 4i_3\right)$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a_{11}\ i'_1 & a_{12}\ i'_2 & a_{13}\ i'_3 \end{array} \\ [n] = \begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\ n_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}\ n_{12} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\ n_{13} \\ \frac{2}{3}\ n_{21} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\ n_{22} & \frac{-1}{3\sqrt{2}}\ n_{23} \\ \frac{1}{3}\ n_{31} & 0\ n_{32} & \frac{4}{3\sqrt{2}}\ n_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

ترانهاده می‌کنیم $\Longrightarrow$

پس ماتریس دوران

نسبت به i' به دست آمده

$$i'_1 = \frac{2\vec{i}_1 + 2\vec{i}_2 + 2\vec{i}_3}{3}$$

$$i'_2 = \frac{\vec{i}_1 - \vec{i}_2}{\sqrt{2}}$$

PAPCO

Subject
Date

ترانهاده

$$V' = n^{T} V = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{3} + \frac{20}{3} - \frac{20}{3} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} - \frac{10}{\sqrt{2}} \\ \frac{10}{3\sqrt{2}} - \frac{10}{3\sqrt{2}} - \frac{80}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{20}{3} \\ 0 \\ -\frac{80}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow t = \frac{20}{3} i_1 - \frac{80}{3\sqrt{2}} i_3$$

تمرین

بردار $V = 5\vec{i}_1 - 2\vec{i}_2 + 3\vec{i}_3$ با رابطه زیر مفروض است اگر دستگاه مختصات جدید به نقطه $(4, -1, 2)$ انتقال یابد و با ضوابط زیر دوران پیدا کند مطلوب است تقریر بردار V در محور مختصات جدید. بردار یکه است ← جواب یک است

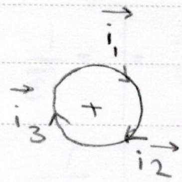
$$i'_1 = \frac{-i_1 + i_2 - i_3}{\sqrt{3}} \qquad i'_3 = \frac{i_1 - 2i_3}{\sqrt{5}}$$

PAPCO

Subject
Date

$V = 5\vec{i} - 2\vec{i_2} + 3\vec{i_3}$

$i'_1 = \dfrac{-i'_1 + i'_2 - i_3}{\sqrt{3}}$ $\qquad i'_3 = \dfrac{i'_1 - 2i'_3}{\sqrt{5}}$



$\vec{i'_2} = \vec{i'_3} \times \vec{i'_1}$

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}}^{+} & \frac{1}{\sqrt{3}}^{-} & -\frac{1}{\sqrt{3}}^{+} \\ i_{21}^{-} & i_{22}^{+} & i_{23}^{-} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}^{+} & 0^{-} & -\frac{2}{\sqrt{5}}^{+} \end{vmatrix} =$$

$$i_{21} : -1 \times i_{21} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = -1\left(\overbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \times -\frac{2}{\sqrt{5}}}^{+\frac{2}{\sqrt{15}}}\right) - \left(\overbrace{\cancel{-\frac{1}{3}} \times 0}^{0}\right) \times i_{21} = \frac{2}{15}\, i_{21}$$

$$i_{22} : +1 \times i_{22} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = 1\left(\overbrace{-\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}}^{(-\frac{2}{\sqrt{15}})}\right) - \left(\overbrace{-\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{5}}}^{(-\frac{1}{\sqrt{15}})}\right) \times i_{22} = \frac{-1}{\sqrt{15}}\, i_{22}$$

$$i_{23} : -1 \times i_{23} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = -1\left(\overbrace{-\frac{1}{\sqrt{3}} \times -\frac{2}{\sqrt{5}}}^{+\frac{3}{\sqrt{15}}}\right) - \left(\overbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{5}}}^{-\frac{1}{\sqrt{15}}}\right) \times i_{23} = \frac{2}{\sqrt{15}}\, i_{23}$$

$$\frac{2}{\sqrt{15}} i_{21} - \frac{1}{\sqrt{15}} i_{22} + \frac{2}{\sqrt{15}} i_{23} = \frac{3}{\sqrt{15} \times \sqrt{15}} \times \sqrt{15} = \frac{\cancel{3}\sqrt{15}}{\cancel{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$= 0{,}77 \simeq 1$

Subject
Date

$$[n]^{\prime} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$[n]^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$V' = [n]^T \cdot V$$

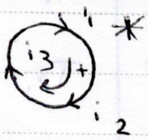
$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{2}{\sqrt{15}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} + 0 - \frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{3}} \\ -\frac{3}{\sqrt{15}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$t' = -\frac{4}{\sqrt{3}} i_1 - \frac{3}{\sqrt{15}} i_2 - \frac{2}{\sqrt{15}} i_3$$

Subject
Date

$$\vec{V} = 5\vec{i}_1 - 2\vec{i}_2 + 3\vec{i}_3$$

$$\vec{i}'_1 = \frac{i_1 + i_2 - i_3}{\sqrt{3}} \qquad i'_3 = \frac{i_1 - 2i_3}{\sqrt{5}}$$

 * $\Rightarrow$

$$\vec{i}'_1 \times \vec{i}'_3 = -\vec{i}'_2 \quad * \quad ?$$

محاسبه i'_2 ؟

انتقال روی مقدار بردار تاثیر ندارد
فقط زاویه در تصویر مهم است
دوران اندازه بردار را عوض نمی‌کند

$$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

برای تصویر ماتریس به ماتریس دوران نیاز داریم به آن ماتریس n می‌گویند

بردارهای جدید ←

$$[n] = \begin{array}{c|c} & i'_1 \quad i'_2 \quad i'_3 \\ \hline \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\vec{i}'_2 = -\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{(-2)}{\sqrt{3}}\right)\vec{i}_1 + \right.$$

برای تصویر بردار $n\,T$

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{(-2)}{\sqrt{3}}\right)\right] - \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]\vec{i}_2 + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \times 0\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\vec{i}_3$$

برای تصویر ماتریس $n^T\,T\,n$

$$\vec{i}'_2 = -\left[\frac{-2}{\sqrt{3}\sqrt{5}}\right]\vec{i}_1$$

Subject
Date

تغییر ماتریس تحت دوران محور مختصات

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$[n]_v \qquad T' = n^T \cdot T \cdot n$$

مثال ۱

تقارن دارند

تانسور تنش در یک نقطه در دستگاه قدیم به صورت زیر می‌باشد اگر دستگاه محورهای مختصات با ماتریس دوران n دوران کند مطلوب است ماتریس دوران یا ماتریس در دستگاه مختصات جدید.

ماتریس

متقارن

$$T = \begin{bmatrix} 50 & 37.5 & 0 \\ 37.5 & -25 & 50 \\ 0 & -50 & 25 \end{bmatrix}$$

نسبت به قطر اصلی با هم برابرند

بردارهای یکه اندازه‌های آنها ۱ می‌باشد

$$i_1 = \sqrt{i_1'^2 + i_2'^2 + i_3'^2} = 1$$

$$[n] = \begin{array}{c|ccc} & i_1' & i_2' & i_3' \\ \hline i_1 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ i_2 & 0 & 1 & 0 \\ i_3 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{array}$$

$$T' = \underset{3\times3}{n^T} \cdot \underset{3\times3}{T} \cdot \underset{3\times3}{n}$$

$$i_1 = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 0^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

PAPCO

Subject

Date

$$\overset{a^{T}}{\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & ۰ & -\frac{۴}{۵} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ \frac{+۴}{۵} & ۰ & \frac{۳}{۵} \end{bmatrix}} \cdot \overset{\text{ماتریس } T}{\begin{bmatrix} ۵۰ & ۳۷٫۵ & ۰ \\ ۳۷٫۵ & -۲۵ & -۵۰ \\ ۰ & -۵۰ & ۲۵ \end{bmatrix}} = \overset{a}{\begin{bmatrix} ۳۰ & ۹۲٫۵ & -۲۰ \\ ۳۷٫۵ & -۲۵ & -۵۰ \\ ۴۰ & ۰ & ۱۵ \end{bmatrix}}$$

متقارن

$$\begin{bmatrix} ۳۰ & ۹۲٫۵ & -۲۰ \\ ۳۷٫۵ & -۲۵ & -۵۰ \\ ۴۰ & ۰ & ۱۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & ۰ & \frac{۴}{۵} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -\frac{۴}{۵} & ۰ & \frac{۳}{۵} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۴ & ۹۲٫۵ & ۱۲ \\ ۹۲٫۵ & -۲۵ & ۰ \\ ۱۲ & ۰ & ۴۱ \end{bmatrix}$$

trace ماتریس [T] جمع درایه‌های قطر اصلی

باید $trace[T] = trace[T']$

$Trace[T'] = ۳۴ - ۲۵ + ۴۱ = ۵۰$

$Trace[T] = ۵۰ - ۲۵ + ۲۵ = ۵۰$

تمرین 3

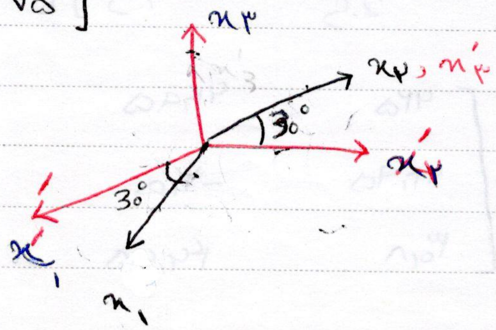
تانسوری مطابق شکل مفروض است چنانچه محور مختصات نسبت به محور x_3

به اندازه 30° در جهت ساعت‌گرد دوران کند مطلوب است تنش ماتریس دوران

یافته.

تانسور تنش

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} ۱۰۰ & ۰ & ۵۰ \\ ۰ & -۵۰ & ۲۵ \\ ۵۰ & ۲۵ & ۷۵ \end{bmatrix}$$



$\cos x'_1$

$\cos x$

Subject
Date

$$\text{ماتریس دوران} = \begin{array}{c|ccc} & x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ \hline x_1 & \cos 30 & \cos 60 & \cos 90 \\ & x_1 x'_1 & x_1 x'_2 & x_1 x'_3 \\ x_2 & \cos 120 & \cos 30 & \cos 90 \\ x_3 & \cos 90 & \cos 90 & \cos 0 \\ & x_3 x'_1 & x_3 x'_2 & x_3 x'_2 \end{array}$$

ماتریس دوران

$$T' = [n^T][T][n] \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 & 50 \\ 0 & -50 & 25 \\ 50 & 25 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 86.6 & 25 & 30.8 \\ 50 & -43.3 & 46.65 \\ 50 & 2.5 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T' = \begin{bmatrix} ۴۲٫۵ & ۴۴٫۹۵ & ۳۰٫۸ \\ ۴۴٫۹۵ & -۲۱٫۵ & ۴۶٫۴۵ \\ ۳۰٫۸ & ۴۶٫۴۵ & ۷۵ \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trace}[T] = ۱۰۰ - ۵۰ + ۷۵ = ۱۲۵ \\ \text{Trac}[T'] = ۴۲٫۵ - ۱۲٫۵ + ۷۵ = ۱۲۵ \end{array}\right\}$$

ok ✓

Subject
Date

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

$[T]$

$[T - \lambda I] = 0$ شرط آنکه جواب غیرهم صفر داشته باشد، دترمینان ضرایب مجهول باید صفر باشد

$$\begin{bmatrix} T_{11} - \lambda I & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda I & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda I \end{bmatrix}$$

از برابر قرار دادن ماتریس بالا با صفر بدست می‌آید:

معادله مشخصه ماتریس $\Rightarrow \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 - I_3 = 0$

$$I_1 = Trace[T]$$

دوات ماتریس $I_2 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} +$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$I_3 = det[T]$$

مثال ۲

مقادیر ویژه و بردارهای ماتریس زیر را تعیین کنید:

PAPCO

Subject
Date

$$[T] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن مقادیر ویژه یک معادله مشخصه داریم

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

$$I_1 = 7 + 5 + 4 = 16$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 79$$

$$I_3 = \det|T| = 5(28-4) = 120$$

$$\boxed{\lambda^3 - 16\lambda^2 + 79\lambda - 120 = 0}$$

سعی و خطا

$$1 \rightarrow 1 - 16 + 79 - 120 = -56$$

اگر عددی مثبت باشد بین آن‌ها یک جواب داریم

$$5 \rightarrow 125 - (16 \times 25) + (79 \times 5) - 120 = -150$$

$$10 \rightarrow 1000 - 1600 + 790 - 120 = 70$$

$$8 \rightarrow 343 - (16 \times 49) + 79 \times 7 - 120 = -8$$

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 16\lambda^2 + 79\lambda - 120 & \lambda - 8 \\ \hline -\lambda^3 \pm 8\lambda^2 & \lambda^2 - 8\lambda + 15 \\ -8\lambda^2 + 79\lambda - 120 & \\ \mp 8\lambda^2 \pm 64\lambda & \end{array}$$

$a+b \quad a \times b$

PAPCO

Subject
Date

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 16\lambda^2 + 79\lambda - 120 & \lambda - 8 \\ \hline \mp\lambda^3 \pm 8\lambda^2 & \lambda^2 - 8\lambda + 15 \end{array}$$

$$-8\lambda^2 + 79\lambda - 120$$

$$\pm 8\lambda^2 \mp 64\lambda$$

$$15\lambda - 120$$

$$\mp 15\lambda \pm 120$$

$$0$$

$a+b$ $\quad$ $a\times b$

$$(\lambda-3)(\lambda-5)$$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = 5$

$\lambda_3 = 8$

می‌خواهیم بردارهای ویژه این مقادیر ویژه را حساب کنیم

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\lambda = 3 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 2x_1 \\ 2x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 2x_1 \end{cases}$$

$$x_1^2 + \cancel{x_2^2}^{\,0} + \underbrace{x_3^2}_{(2x_1)^2} = 1 \rightarrow x_1^2 + 0 + 4x_1^2 = 0 \rightarrow x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{15}}$$

معادله بردارهای یکه

$$x_3 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(۲۷) بردار ویژه مقدار ویژه ۳

Subject
Date

$$\lambda = 5 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ 0x_2 = 0 \\ -2x_1 = -x_3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_3 = x_1 \\ x_2 = \text{هر عددی می‌شود} \\ x_3 = -2x_1 \end{array}$$

تناقض دارند

$$\cancel{x_1^2} + x_2^2 + \cancel{x_3^2} \rightarrow x_2 = \pm 1 \Leftarrow \text{پس}$$

فقط در حالتی می‌شود که جفت صفر باشند

$$\lambda = 5 \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 8 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1x - 2x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -2x_3 \\ 0 - 3x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -2x_3 \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \rightarrow 4x_3^2 + 0 + x_3^2 = 1 \rightarrow$$

$$x_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad x_1 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\lambda = 8 \begin{cases} \mp \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

PAPCO

Subject
Date

جلسه سوم

تمرین 4)

مقادیر ویژه و امتدادهای ویژه‌ی ماتریس مقابل را تعیین نمایید.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \text{trace}[T] = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

$$I_3 = \det[T] = (3+1) + 0 + (-2)(0-6) = 4 + 12 = 16$$

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 12\lambda - 16 = 0 \Rightarrow$$

$x + yi$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2.75 \\ \lambda_2 = 1.12 + 2.13i \\ \lambda_3 = 1.12 - 2.13i \end{cases}$$

Subject
Date

$$\lambda_1 = 2.75 \quad \begin{bmatrix} 1-2.75 & 0 & -2 \\ 0 & 3-2.75 & 1 \\ 2 & -1 & 1-2.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \; -1.75x_1 - 2x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = \frac{2x_3}{-1.75}$$

$$0.25x_2 + x_3 = 0 \longrightarrow x_2 = \frac{-x_3}{0.25}$$

$$2x_1 - x_2 - 1.75x_3 = 0 \longrightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \longrightarrow \left(\frac{-2}{1.75}x_3\right)^2 + \left(\frac{x_3}{0.25}\right)^2 + x_3^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = \pm 0.24711 \\ x_2 = \pm 0.93489 \\ x_3 = \pm 0.23372 \end{array} \right.$$

$$(0.24711)^2 + (0.93489)^2 + (0.23372)^2 = 1$$: امتحان

PAPCO

Subject
Date

تابع

$y = f x$ — y: تابعی از x — x: متغیر

یعنی که وابسته به متغیر است.

دامنه تابع = محدوده‌ای که x تغییر می‌کند.

برد تابع = محدوده‌ای که y تغییر می‌کند.

مثال) دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.

$y = \sqrt{x} \rightarrow D \rightarrow x > 0 \quad , \quad R \rightarrow x > 0$

$y = [x] \rightarrow D \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad R \rightarrow \mathbb{R}$

$y = |x| \rightarrow D \rightarrow R \quad , \quad \mathbb{R} \rightarrow y > 0$

تابع زنجیره‌ای = $F(\underbrace{g(x)}_{1})$ ②

حد

مثال) $\lim f(x)$?

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 0 \\ -1 & x = 0 \\ x^2 + 1 & x < 0 \end{cases}$$

Subject
Date

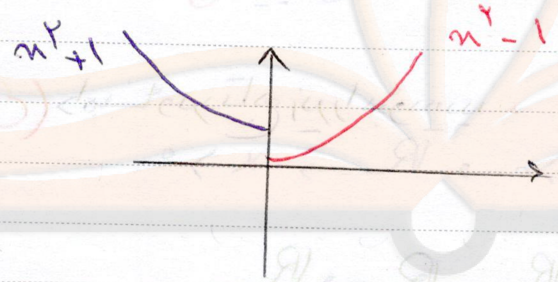
$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

$x<0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) \quad x^2+1 \Rightarrow 0+1=1$

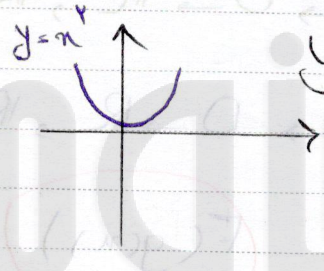
$x>0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) \quad x^2-1 \Rightarrow 0-1=-1$



پیوسته نیست

اما برای مثال $y=x^2$



پیوسته است

Subject
Date

جلسه چهارم

مشتق برداری

مشتق یک بردار مانند $\vec{a}$ نسبت به یک اسکالر مانند t به صورت زیر نوشته می شود

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_1}{dt}\vec{i} + \frac{da_2}{dt}\vec{j} + \frac{da_3}{dt}\vec{k}$$

تمامی قوانین مشتق روی مشتق برداری نیز برقرار است.

مانند مشتق حاصلضرب
$$\frac{d(\vec{a}\cdot\vec{b})}{dt} = \frac{da}{dt}\cdot b + \frac{db}{dt}\cdot a$$

گرادیان یک تابع اسکالر

یعنی تابعی که مقدار است بر حسب متغیر (وابسته به x و y است ولی بردار نیست)

و فرض بابردار، گرادیان جهت است. هر دو اندازه دارند و جهت به پارامترها وابسته

هستند که گرادیان اسکالر را با عملگر دل نشان می دهند ← ∇a

$$\nabla a = \frac{\partial a}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial a}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial a}{\partial z}\vec{k}$$

یا

P4PCO

Subject
Date

$$\nabla a : \frac{\partial a}{\partial x_1}\vec{i}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2}\vec{i}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3}\vec{i}_3 = \frac{\partial a}{\partial x_k}\vec{i}_k$$

مثال ۱) گرادیان تابع اسکالر روبه‌رو را بنویسید.

$$a = 5xyz$$

$$5yz\vec{i} + 5xz\vec{j} + 5xy\vec{k}$$

فرق گرادیان و دیورژانس: دیورژانس برای بردار است و گرادیان برای تابع اسکالر است. با Div نشان می‌دهند

$$\text{Div} : \nabla\cdot\vec{W} = \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{w}_2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{w}_3}{\partial z}$$

مثال ۲)

$$\vec{W} = (x^3 - 2y)\vec{i} + (4x^2 - 4z)\vec{j} + (z^3)\vec{k}$$

$$3x^2 + 0 + 3z^2 = 3(x^2 + z^2)$$

کرل بردار Curl

$\nabla\times\vec{W} =$ ضرب خارجی در یک بردار که به صورت حاصل یک بردار است

عملگر دل

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Subject

Date

مثال ۳) فرض می‌کنیم بردار مقابل را داریم : Curl را بدست آورید.

$$\vec{W} = (4x^2 - 4z)\vec{i} + (5z^2 - 3y)\vec{j} + (z^3 - x)\vec{k}$$

$w_1 \qquad w_2 \qquad w_3$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4x^2-4z & 5z^2-3y & z^3-x^3 \end{vmatrix}$$

دترمینان $\Rightarrow$

$$i\left[\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{(z^3-x^3)}_{0} - \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{(5z^2-3y)}_{10z}\right]$$

$$+j\left[\frac{\partial}{\partial z}\underbrace{(4x^2-4z)}_{-4} - \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(z^3-x^3)}_{-3x^2}\right]$$

$$+k\left[\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(5z^2-3y)}_{0} - \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{(4x^2-4z)}_{0}\right]$$

$$= -10z\vec{i} + (-4-3x^2)\vec{j}$$

لاپلاسین

عملگر دل به توان دو یعنی :

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta : \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ضرب دو گرادیان

Subject

Date

مثال ۹) لاپلاسین مثال ۳ را حساب کنید.

$$\nabla^2 = 12 + 0 + 6z$$

تمرین ۵)

اگر میدان برداری به صورت زیر باشد مطلوب است تعیین:

الف) گرادیان ب) دیورژانس ج) کرل د) لاپلاسین

$$\vec{V} = \frac{-x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2 + y^2)}$$

$$\vec{W} = \left(\frac{x}{y}\sin x\right)\vec{i} + (x^2 y z)\vec{j} + (z^3 - xy^2)\vec{k}$$

$$u/v = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$ یادآوری

Subject

Date

الف) $\Rightarrow$ گرادیان معنی نمی‌دهد چون هردو بردار هستند

ب) $\Rightarrow$ $\nabla \cdot \vec{V} = \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial x_2} =$

$$\underbrace{\frac{-x}{(x^2+y^2)}}_{\text{مشتق نسبت به } x} i + \underbrace{\frac{y}{(x^2+y^2)}}_{y} j$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\overbrace{(-1)\times(x^2+y^2) - (2x)(-x)}^{-x^2-y^2+2x^2}}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\overbrace{1(x^2+y^2) - (2y)(y)}^{\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y^2}}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$\boxed{\frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

ج) $\nabla \cdot \vec{W} = \left(\dfrac{x \sin x}{y}\right) i$

$$\frac{(1 \sin x + x \cos x)\, y - 0\,(x \sin x)}{y^2} + x^2 z + 3z^2$$

PAPCO

Subject
Date

7) ⇒ Curl $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix}$

$i\left[(0)\right] + j\left[(0)\right] + k\left[\left(\frac{0-2x(y)}{(x^2+y^2)^2}\right) - \left(\frac{0-2y(-x)}{(x^2+y^2)^2}\right)\right] =$

$k\left(\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$

$\vec{\nabla} \times W = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{y}\sin x & x^2 y z & z^3 - 5y^2 \end{vmatrix} =$

$i\left[-10y - 0\right] + j\left[(0) - 0\right] + k\left[(2xyz) - \left(\frac{0 \times y - 1(x\sin x)}{y^2}\right)\right]$

(لاپلاسین) $\nabla^2 \cdot \vec{V} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2}$ فاکتور $2 \times (x^2-y^2)$

$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{-1(x^2+y^2) - (2x)(-x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} \frac{2x(x^2+y^2)^2 - \left(4x(x^2+y^2)\right)}{(x^2+y^2)^4}$

$= \frac{2x^3 + 2xy^2 - (4x^3 - 4xy^2)}{(x^2+y^2)^4}$

$\frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{1(x^2+y^2) - (2y)(y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow{\quad} \frac{(-2y)(x^2+y^2)^2 - \left[2 \times 2y \times\right.}{(x^2+y^2)^4}$

$(x^2+y^2)(x^2-y^2)\left.\right]$

Subject
Date

توابع مختلط

اعداد مختلط به صورت یک زوج اعداد حقیقی تعریف می‌شوند مانند $\acute{\vec{Z}}$ که با (x, y) نشان می‌دهند و

$$\vec{Z} : (x, y) = x + iy$$

Real — Imagine

$Re\,z$ — قسمت حقیقی

$Im\,z$ — قسمت موهومی

$$i^2 = -1 \rightarrow i = \sqrt{-1}$$

دو عدد مختلط به صورت زیر داریم:

$$Z_1 \rightarrow x_1 + iy_1$$
$$Z_2 \rightarrow x_2 + iy_2$$

می‌خواهیم اعمال جبری را روی اعداد مختلط نشان دهیم:

حاصل جمع: $Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

حاصل ضرب: $Z_1 . Z_2 = (x_1 . x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

مثال ۵) $\vec{i}$ را به صورت عدد مختلط بنویسید و جمع و ضرب را بدست آورید

$\vec{i} : (0, 1)$ — جمع: $0 + 1i$

ضرب: $(0 - (1 \times 1)) + i(0 \times 1 + 1 \times 0) \rightarrow -1$

Subject

Date

$Z_1 \Rightarrow 1+2i \qquad x_1 = 1 \quad y_1 = 2$

$Z_2 \Rightarrow 3-5i \qquad x_2 = 3 \quad y_2 = -5$

$Z_1 + Z_2 = (4-3i)$

$$Z_1 . Z_2 = \underbrace{(x_1 . x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}_{\text{فرمول}} = 13 + i$$

مثال ۶) حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$\underbrace{\frac{1}{(2-3i)}}_{z_1} \times \underbrace{\frac{1}{(1+i)}}_{z_2}$$

عدد مختلط نباید در مخرج باشد باید گویا کنیم

$$Z_1 . Z_2 = (x_1 . x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\left[(۲\times۱) - (-۳\times۱)\right] + j\left[(۲\times۱) + (۱\times -۳)\right]$$

$$= \frac{1}{۵ - i} \times \frac{۵+i}{۵\times j} = \frac{۵+i}{۲۵+\underbrace{i^۲}_{=-1}} = \frac{۵+i}{۲۶}$$

Subject
Date

تمرین ۵) حاصل عبارات زیر را حساب کنید:

A) $\dfrac{1}{3-5i} + \dfrac{2-i}{4-3i} = ?$

B) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{5i}{4-2i} = ?$

در مزدوج مخرج صورت و مخرج را ضرب کرده

A) $\dfrac{1}{3-5i} \times \dfrac{3+5i}{3+5i} + \dfrac{2-i}{4-3i} \times \dfrac{4+3i}{4+3i} = \underbrace{\dfrac{3+5i}{9-25i^2}}_{34} + \underbrace{\dfrac{11+2i}{16-9i^2}}_{25} =$

$\dfrac{3+5i}{34} + \dfrac{11+2i}{25} = \dfrac{75+125i+374+68i}{850} =$

عدد طبیعی

مخرج مشترک

$\dfrac{449+193i}{850}$

B) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{5i}{4-2i} \rightarrow \dfrac{1}{3} - \dfrac{5(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{20+10i}{16-4i^2}$ ($i^2 \to -1$)

$\dfrac{1^{\times 20}}{3_{\times 20}} - \dfrac{20+10i^{\times 3}}{\underbrace{16+4}_{20\times 3}} = \dfrac{20}{60} - \dfrac{60+30i}{60}$

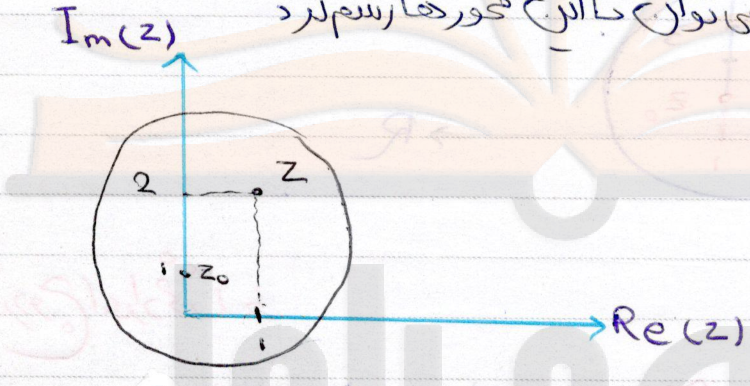
$\dfrac{\cancel{20}-60-30i}{60}$ (-40) $= \dfrac{-40}{60} + \dfrac{-30i}{60} = -\dfrac{2}{3} - 0.5i$

Subject
Date

جلسه پنجم

صفحه مختلط

هر عدد را در سیستم مختلط می‌توان با این محورها رسم کرد



$z = 1 + 2i$

دایره به مرکز z_0 و شعاع R $\quad |z - z_0| \leq R$

$|z - i| \leq 2$ شعاع

<2 ناحیه باز که شامل نقاط مرزی خود نمی‌شود

$\leq$ مرز را شامل می‌شود (ناحیه بسته)

که یک ناحیه در صفحه مختلط نشان می‌دهد که دایره است

اگر علامت برعکس باشد خارج دایره را شامل می‌شود

به آن‌هایی که به عدد ختم می‌شوند کران = ۲

" " نمی‌شوند بی‌کران

Subject
Date

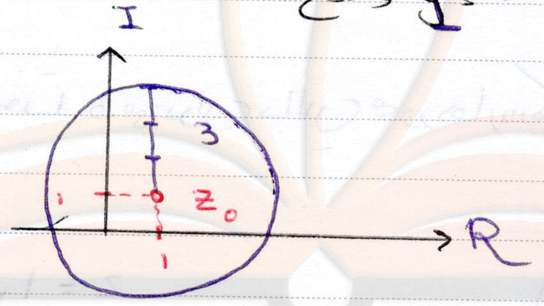
مثال ۱

$$|z-\underbrace{(1+i)}_{z_0}| < 3$$

$z_0 = 1+i$

$R = 3$

در قسمت حقیقی $\text{Real} = 1$ و $I = 1$ و شعاع ۳



مزدوج اعداد مختلط

اگر $z = x + iy$ مزدوج آن را با $\tilde{z}$ نشان می‌دهند که برابر است با

$$\tilde{z} = x - iy$$

و تمامی روابطی که برای اعداد مختلط داشتیم برای مزدوجش هم برقرار است.

مثال ۲

$$(\bar{z} + \tilde{z}) = 2x \longrightarrow \mathrm{Re}\, z = x = \tfrac{1}{2}(z+\bar{z})$$

$$(\bar{z} - \tilde{z}) = 2iy \longrightarrow \mathrm{Im}\, z = y = \tfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

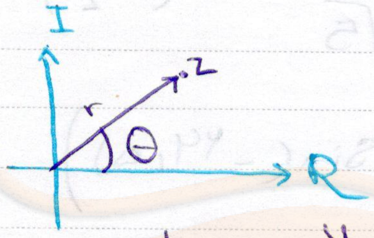
Subject
Date

شکل قطبی اعداد مختلط

اعداد مختلط را به صورت زوج مرتب نشان می دهند $z : (x, y) = x + iy$

که شکل قطبیش $z : (r, \theta)$

که از محور روبه رو بدست می آید.



$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

مثال 3) به صورت قطبی بدست آورید

$z = 1 - i$

$x = 1$

$y = -1$ ناحیه ۴

$\tan = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \theta = -\frac{\pi}{4}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

مثال ۴) رسم شکل قطبی

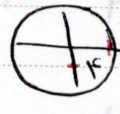
$$z = 2 - 1i$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$y = -1$

$x = 2$

$$\tan\theta = \frac{-1}{2}$$



$$\tan^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = -26.5$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$z = \sqrt{5}\left(\cos(-\text{۲۶٫۵}) + i\sin(-\text{۲۶٫۵})\right)$$

به θ آرگومان z گفته می‌شود

$$\theta = Arg(z)$$

آرگومان دو عدد را بخواهیم ضرب کنیم

$$Arg(z_1 z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2$$

در تقسیم دو عدد

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

نکته:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

رابطه دموآور

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

Subject
Date

مثال 5) ریشه سوم $1+i$ را بدست آورید. $\sqrt[3]{1+i}$

$x=1,\ y=1 \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

طبق رابطه: $\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\overset{\theta}{\frac{\pi}{4}}+2k\pi}{\underset{\to n}{3}}\right)+i\sin\left(\frac{\pi/4+2k\pi}{3}\right)\right)$$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

$$k=0 \to \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$k=1 \to \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \qquad \pi/12+2\pi/3$$

$$k=2 \to \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right) \qquad \frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}$$

تمرین: $(1+i)^3 \Rightarrow (\sqrt{2})^3 \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$

تمرین 7) رابطه زیر را اثبات کنید.

$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$

Subject
Date

Subject

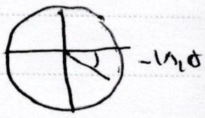
Date

تمرین ۱

$$A = (3-i)^4$$

$$B = \sqrt[4]{3-i}$$

$$A = \sqrt[4]{3-i} \quad \tan\theta = \frac{-1}{3} \quad \tan^{-1} = -18.5$$



$$\sqrt[4]{\sqrt{10}}\left(\cos\left(\frac{-18.5 + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-18.5 + 2k\pi}{4}\right)\right)$$

$K = 0$

$K = 1$

$K = 2$

$K = 3$

Subject
Date

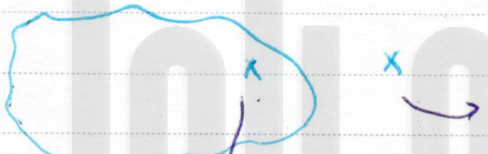
جلسه ششم

۷، ۸، ۹ و میانترم تا سر نواحی در صفحه مختلط

نواحی در صفحه مختلط

ناحیه اول را به صورت همسایگی یک نقطه تعریف می‌کنیم

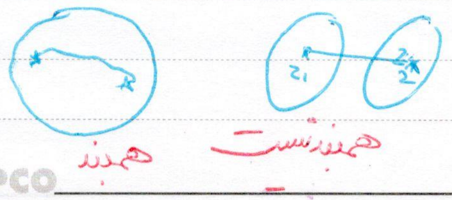
یعنی نزدیکان آن نقطه با اپسیلون فاصله $|z-z_0|<\varepsilon$



شامل نقاط مرزی نشده مجموعه باز

شامل نقاط مرزی شده مجموعه بسته

مهم « مجموعه یا ناحیه همبند Connected = مجموعه‌ای است که هر دو نقطه از آن را بتوان با یک خط شکسته به یکدیگر متصل نمود به طوری که تمام خط در داخل آن مجموعه قرار گیرد.



همبند

همبند نیست

PAPCO

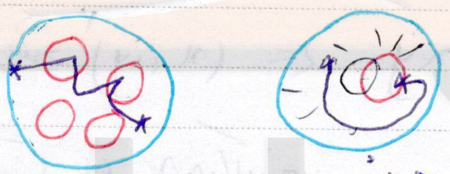
* قلمرو Domain = مجموعه بازی که همبند باشد.

* ناحیه Region = مجموعه بسته‌ای که همبند باشد.

مجموعه‌ی روبه‌رو نه باز و نه بسته است $0 < |z - z_0| \le 4$

یعنی نه قلمرو دارد نه ناحیه فقط همبند است.

مجموعه‌ی همبند ساده: مجموعه همبند را ساده می‌گوییم هرگاه بتوان یک منحنی بسته‌ی ساده در آن کشید که همه‌اش کاملاً داخل مجموعه باشد.



همبند ساده   همبند

● حد و پیوستگی توابع مختلط

$$w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$w = z$ تابع تک مقداره $= x + iy$

$w = \sqrt[n]{z}$ تابع چند مقداره

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

حد تابع $f(z)$ در همسایگی z_0، $f(z)$ برابر w_0

Subject
Date

$$Z = x + iy$$

$$Z_0 = x_0 + iy_0$$

$$w_0 = u_0 + iv_0$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0 \end{cases}$$

مثال ۱) حل Z^2 وقتی: $\lim\limits_{z \to 1+i} z^2$

Z^2 می‌شود $(x+iy)^2 \Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy$

به صورت u, v جدا کنیم:

$$u = x^2 - y^2$$
$$v = 2xy$$

حال برای اینکه Z_0 را حساب می‌کنیم

$$Z_0 \to 1 + i \to \begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{matrix}$$

u_0, v_0

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0 = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} x^2 - y^2 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0 = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} 2xy = 2 \end{cases}$$

$$\lim f(z) = w_0 = 0 + 2i$$

PAPCO

Subject
Date

پیوستگی توابع مختلط

وقتی حد با مقدارش برابر باشد پیوسته است آن تابع

$$\lim_{z \to z_0} F(z) = F(z)$$

$$F(z_0) = (1+i)^2 = 1^2 + i^2 + 2i = 2i$$

$$\lim_{z \to z_0} F(z) = 2i = F(z_0)$$ پس پیوسته است

مشتق توابع مختلط

تغییرات یک تابع حول نقطه (صعودی، نزولی)

$$F'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

$$F'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z}$$

مثال ۲) مشتق z^2

$F(z) = z^2$ $\quad$ $$F'(z_0) = \lim \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

PAPCO

Subject
Date

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\cancel{z^2} + 2z\cancel{\Delta z} + \Delta z^2 - \cancel{z^2}}{\cancel{\Delta z}}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

مثال 3) مشتق تابع مزدوج z را حساب کنید.

$\bar{z}$

$f(z) = \bar{z}$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\cancel{\bar{z}} + \Delta \bar{z} - \cancel{\bar{z}}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

$\Delta x \to 0 \to f'(z) = -1$

$\Delta y \to 0 \to f'(z) = +1$

$\neq$ مشتق ندارد

چون برابر نیست

تابع تحلیلی

گوییم تابع $f(z)$ در مجموعه D تحلیلی است اگر این تابع در جمیع نقاط D مشتق پذیر باشد.

Subject
Date

معادلات کُشی ریمان

معادلاتی که برای بررسی تحلیلی بودن یک تابع در یک مجموعه استفاده می‌شوند

$$F(z) = U(x,y) + i(x,y)$$

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 2) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$U_x = V_y$ $u_y = -V_x$

مثال ۴) آیا تابع $F(z) = z^3$ مشتق پذیر است؟ (تحلیلی است؟)

$$F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 2) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$F(z) = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2 iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = \underbrace{(x^3 - 3xy^2)}_{u} + i\underbrace{(3x^2y - y^3)}_{v}$$

$U(x,y) = x^3 - 3xy^2$ 1) $U_x = V_y \to 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2$ ✓

$V(x,y) = 3x^2y - y^3$ 2) $u_y = -V_x \to -6xy = -6xy$ ✓

$$F'(z) = U_x + iV_x = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3(x^2 - y^2 + i2xy)$$
$$= 3(x+iy)^2 = 3z^2$$

Subject
Date

مثال 5) تحلیلی بودن $\bar{Z}$ را مشخص کنید.

$$x+iy=\bar{Z}$$

$$u(x,y)=x$$

$$v(x,y)=-y$$

$$u_x=v_y \rightarrow 1\neq -1$$

تمرین) کلی ترین تابع $f(z)$ را بیابید به طوری که قسمت حقیقی آن $x^2+y^2-x=u(x,y)$ باشد.

$f(z)=?$

در حالت کلی

u را داده است

گفته تحلیلی باشد شروط را برقرار باشد $f(z)$ را حساب کنید

مشتق u نسبت به x

$$u_x=v_y$$

نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$x^2-y^2-x=u(x,y)$$ را حل می‌کنیم:

$$u(x,y)=x^2-y^2-x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_x=2x-1 \\ u_x=v_y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

از u نسبت x مشتق نسبت به y انتگرال

به u رادادیم

$$\int 2x-1\,dy \Rightarrow 2xy-y+C=v(x,y)$$

Subject
Date

$$\text{شروط کوشی ریمان} \Rightarrow \begin{cases} ① \; u_x = v_y \Rightarrow 2x - 1 = 2x - 1 \; \checkmark \\ ② \; u_y = -v_x \Rightarrow -2y = -(2y) \; \checkmark \end{cases}$$

تابع فوق تحلیل پذیر است

$$u(x,y) + i\,v(x,y) \Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 - x + c + i(-2xy - y)$$

PAPCO

Subject
Date

شکل قطبی معادلات کشی ریمان

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$F(z) = U(r,\theta) + iV(r,\theta)$

$1) = u_r = \frac{1}{r} v_\theta$

$2) = v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$

$F'(z) = (u_x + i v_x)(\cos\theta - i\sin\theta)$

$F'(z) = (v_\theta - i u_\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)/r$

مثال) $F(z) = z^3$ به صورت قطبی

$z^3 = r^3(\cos\theta + i\sin\theta)$

$u = r^3\cos 3\theta$

$v = r^3\sin 3\theta$

$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \xrightarrow{\text{مشتق گرفتیم}} 3r^2\cos 3\theta = \frac{1}{r} \times r^{\cancel{3}\,2} \times 3\cos 3\theta$ ✓

$v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \longrightarrow 3r^2\sin 3\theta = \cancel{-}\frac{1}{r} \times r^{\cancel{3}\,2} \times \cancel{-3}\sin 3\theta$ ✓

Subject

Date

جلسه هفتم

انتگرال گیری در صفحه مختلط

با جایگذاری زیر می توانیم به ۴ عدد حقیقی انتگرال تبدیل کنیم

$$\int_A^B f(z)\,dz = \int_A^B (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_A^B u\,dx + \int_A^B iv\,dx + \int_A^B iu\,dy - \int_A^B v\,dy$$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$dz = dx + i\,dy$$

$$\int \sin x\,dx = \cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \mathrm{Ln}\,x + C$$

PAPCO

Subject
Date

مثال) فرض کنید منحنی $y=1-x^2$ بین نقاط $A(0,1)$ تا $B(1,0)$ تعریف شده است. اگر $f(x,y)=xy$ آنگاه مقادیر انتگرال $\int f(x,y)\,dx$ و $\int f(x,y)\,dy$ را روی منحنی $y=1-x^2$ حساب کنید.

$$\int_{(0,1)}^{(1,0)} xy\cdot dx = \int_0^1 x(1-x^2)\,dx = \int_0^1 (x-x^3)\,dx = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

x تا دارم — $y \to (1-x^2)$ برحسب x

$$\int_{(0,1)}^{(1,0)} xy\cdot dy = \int_1^0 \sqrt{1-y}\cdot y\,dy = \int_1^0$$

تغییر متغیر: $1-y=u \to y=1-u \to dy=-du$

$$y\Big|_1^0 \to u\Big|_0^1$$

$$\int_0^1 \underbrace{\sqrt{u}}_{u^{1/2}}\,\underbrace{(1-u)(-du)}_{-1+u} = \int_0^1 \left(-u^{1/2}+u^{3/2}\right)du =$$

$$-\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}+\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 \to -\frac{2}{3}+\frac{2}{5} = -\frac{10}{15}+\frac{6}{15} = -\frac{4}{15}$$

PAPCO

Subject
Date

راه دیگر:

$y = 1 - x^2 \to x = \sqrt{1-y}$

$dy = 2x\,dx$

$\frac{dy}{dx} = -2x$

$\int_{(0,1)}^{(1,0)} xy \frac{dy}{dx} \times dx = \int_0^1 x(1-x^2)(-2x)\,dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x^4)\,dx =$

$-2x + 2x^3$

$-\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{-2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{-4}{15}$

مثال ۲) انتگرال $\int_{0+i}^{1+2i} \bar{z}^2\,dz$ را روی منحنی $y = x^2+1$ بدست آورید.

$\bar{z}^2 \to v, u$ براساس $\to \bar{z}^2 = (x-iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$

$u(x,y) = x^2 - y^2$

$v(x,y) = -2xy$

$x = \Big|_0^1 \qquad y = \Big|_1^2$

تبدیل به ۲ انتگرال حقیقی:

$\int \bar{z}^2\,dz = \int (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_0^1 (x^2-y^2)\,dx + i\int_1^2 (x^2-y^2)\,dy +$

$i\int_0^1 -2xy\,dx - \int_1^2 -2xy\,dy$

Subject
Date

$$=-x^4-2x^2-1$$

۱)

$$\int_0^1 \left(x^2-(x^2+1)^2\right)dx=\int_0^1(-x^4-x^2-1)\,dx=\left(-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_0^1=\frac{-1}{5}-\frac{1}{3}-1=\frac{-23}{15}$$

۲)

$$i\int_0^1 -2xy\,dx=-2i\int_0^1 x(x^2+1)\,dx=-2i\left[\int_0^1(x^3+x)\,dx\right]=$$

$$-2i\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right]=-2i\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]=-\frac{3}{2}i$$

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

۳)

$$i\int_0^1\left(x^2-(x^2+1)^2\right)2x\,dx=2i\int_0^1(-x^4-x^2-1)(x)\,dx=2i\int(-x^5-x^3-x)\,dx$$

$$=2i\left[-\frac{x^6}{6}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=2i\left[\frac{-1}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right]=\frac{-22i}{12}=-\frac{11}{6}i$$

۴)

$$\int_0^1 2x(x^2+1)\,2x\,dx=4\int_0^1(x^4+x^2)\,dx=4\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=4\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right]=\frac{32}{15}$$

اعداد حقیقی را باهم و موهومی را باهم جمع می‌کنیم.

$$\int_{0+0i}^{1+2i}\bar{z}^2\,dz=\frac{9}{15}-\frac{20}{6}i$$

$$④\ -\int_1^{-1}(3x^2y-y^3)\,dy-\int_1^2\left(3x^2(x^2-1)-(x^2-1)^3\right)2x\,dx \Rightarrow$$

$$2\int\left(3x^4-3x^2-(x^6-3x^4+3x^2-1)\right)x\,dx-2\int_1^2(-x^7+6x^5-9x^3+x)\,dx=$$

$$-2\left(\frac{-x^8}{8}+\frac{6x^6}{6}-\frac{9x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\Big]_1^2=-2\left(\frac{245}{24}+\frac{3}{24}\right)=-\frac{489}{24}$$

تمرین) انتگرال $\int_{1+i}^{2-i} z^3\,dz$ روی منحنی $y=x^2-1$

$x|_1^2 \quad y|_1^{-1}$

$$z=(x+iy)\rightarrow\int_{1+i}^{2-i}(x+iy)^3(dx+idy)$$

$$\int_{1+i}^{2-i}(x^3-3xy^2+3x^2yi-y^3i)(dx+idy)\Rightarrow\begin{cases}u(x,y)=x^3-3xy^2\\ v(x,y)=3x^2y-y^3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int(u+vi)(dx+idy)=\underbrace{\int u\,dx}_{①}+i\underbrace{\int u\,dy}_{②}+i\underbrace{\int v\,dx}_{③}-\underbrace{\int v\,dy}_{④}$$

$$①\Rightarrow\int_1^2(x^3-3xy^2)\,dx\Rightarrow\int_1^2\left(x^3-3x(x^4-2x^2+1)\right)dx\Rightarrow$$

$$\int_1^2(-3x^5+7x^3-3x)\,dx\Rightarrow\int_1^2\left(\frac{-3x^6}{6}+\frac{7x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right]_1^2\Rightarrow\left(10+\frac{1}{4}\right)=\frac{41}{4}$$

$y=x^2-1\rightarrow x=\sqrt{y+1}$

$$②\Rightarrow\int_1^{-1}(x^3-3xy^2)\,dy\Rightarrow i\int_1^2\left(x^3-3x(x^2-1)^2\right)2x\,dx\rightarrow 2i\int_1^2(-3x^6+7x^4-3x^2)\,dx\Rightarrow 2i\left(\frac{-3x^7}{7}+\frac{7x^5}{5}-\frac{3x^3}{3}\right)\Big]_1^2=2i\left(\frac{-622}{35}+\frac{1}{35}\right)=-\frac{1242}{35}i$$

$y=x^2-1\rightarrow dy=2x\,dx$

{ y را به dx تبدیل تغییر کران انتگرال از y به x }

$$③\ i\int_1^2(3x^2y-y^3)\,dx\rightarrow i\int_1^2\left(3x^2(x^2-1)-(x^2-1)^3\right)dx\Rightarrow i$$

$$\int_1^2\left(3x^4-3x^2-(x^6-3x^4+3x^2-1)\right)dx\rightarrow i\int(-x^6+6x^4-6x^2+1)\,dx\Rightarrow i\left(\frac{-x^7}{7}+\frac{6x^5}{5}-\frac{6x^3}{3}+x\right]_1^2=i\left(\frac{179}{35}-\frac{2}{35}\right)=\frac{177}{35}i$$

جواب آخر

$$\int_{1+i}^{2-i}z^3\,dz=\left(\frac{41}{4}-\frac{489}{24}\right)+\left(\frac{177}{35}-\frac{1242}{35}\right)i\Rightarrow 10-\frac{1085}{35}i$$

Subject
Date

جلسه هشتم

تمرین ۱۰) انتگرال $\int_{1-i}^{2+i} (z^2 - \bar{z} + 2)\,dz$

$y = x^2 + 1$

PAPCO

Subject
Date

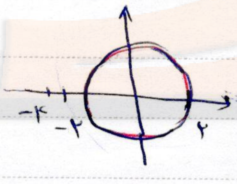
تئوری کوشی - گورست

فرض کنید C یک منحنی ساده و بسته باشد و $F(z)$ تابعی باشد که در داخل و روی

منحنی C تحلیلی است آنگاه $\oint_C F(z)\,dz = 0$

مثال ۱] $\oint_{C:|z|=2} \frac{z^3+z-2}{z+4}\,dz = 0$

منحنی بسته ما دایره‌ای به شعاع ۲ و



منحنی را رسم می‌کنیم چک می‌کنیم که ۴- درون است یا نه همین

نتیجه این مسائل:

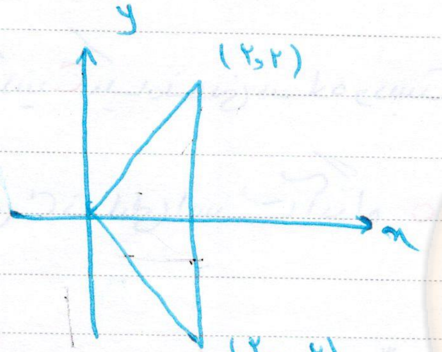
$$\oint_C z^n\,dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

حاصلش به انتگرالی می‌رسد به نام تئوری انتگرال کوشی

$$\oint_C \frac{F(z)}{z-z_0} = 2\pi i \times F(z_0)$$

$z_0 \in C \rightarrow$ * z_0 عضو C باید باشد اگر نباشد که صفر می‌شود

مثال ۲) انتگرال های زیر را روی منحنی نشان داده شده مثل مقابل تعیین کنید.



مخرج برابر صفر = ۱ می‌شود که داخل منحنی است

$$① \oint_C \frac{\cos z}{z-1}\,dz = 2\pi \times f(z_0) = 2\pi i \cos 1$$

$z_0 = +1$

$$② \oint_C \frac{\cos z}{z+1}\,dz = 0$$

$z+1=0 \rightarrow z=-1$ داخل منحنی نمی‌باشد چون جزء منحنی نیست صفر است.

ساده سازی کوشی

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{f(z)_1}{z_1-z_0} + \frac{f(z_2)}{z_0-z_1}\right)$$

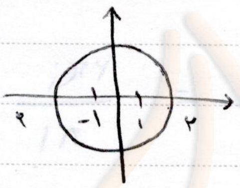
$z_1, z_2 \in C$

$\underline{\underline{=}}$ صفر

Subject
Date

مثال ۳)

$$\oint \frac{\overbrace{z^3+1}^{F(z)}}{(z^2-1)}\,dz =$$



$C: |z| = 2$

$$\oint_C \frac{(z^3+1)}{(z-1)(z+1)}\,dz = 2\pi i\left[\frac{2}{1-(-1)} + \frac{0}{-}\right] = 2\pi i$$

$z_1 = 1$

$z_2 = -1$

مثال ۴) انتگرال $\oint_C \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz$

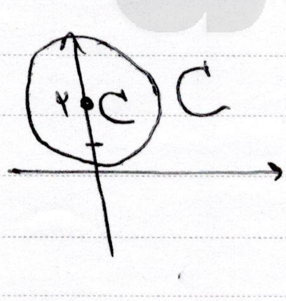
$C: |z-2i| = 2$

$2i$ ، $x = 1$, $y = 2$

$* \; |z - c| = R$

مرکز

شعاع



$$z^2+1 = 0 \rightarrow z = \pm i$$

تجزیه: $\oint \frac{\overbrace{\cos z}^{F(z)}}{(z+i)(z-i)}\,dz = 2\pi i \times \frac{\cos i}{2i} = \pi \cos i$

$z_1 = -i \rightarrow (z - z_0)$

$z_2 = i$

Subject
Date

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{n}(z_0)$$

شکل توسعه یافته انتگرال کوشی

$n+1=3 \quad n=2$

مثال ۵

$$\oint \frac{\overbrace{z^3+2z-1}^{f(z)}}{(z-1)^{3}}\,dz \quad n+1$$

$|z| = \frac{1}{2}$

$1 = z_0$

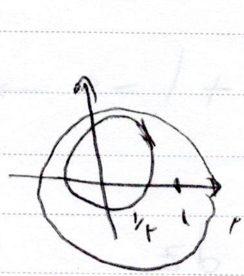
ناحیه انتگرال گیری دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ | جزوش هست

$f'(z) = 3z^2 + 2$

$f''(z) = 6z \longrightarrow f''(1) = 6$

$\frac{\cancel{2\pi i}}{\cancel{2!}} \times 6 = 6\pi i$

2×1



Subject
Date

$(z-5)^2$

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-1)^3(z-5)^2}\,dz$$

تمرین

$C: |z-4| = 2$

$z_1 = 1$

$z =$

Subject
Date

جلسه نهم

دنباله‌ها و سری‌ها

هرگاه به هر عدد صحیح $n+$ عددی مانند $U_n(Z)$ اختصاص داده شود

آنگاه مجموعه اعداد $U_n(Z): U_1(Z), U_2(Z), \dots U_n(Z)$

یک جمله

یک دنباله‌ی نامتناهی یا به اختصار دنباله می‌نامند و هر یک از این اعداد را یک

جمله دنباله مینامند.

همگرایی دنباله‌ها: گوییم دنباله‌ی $(U_n(Z): U_1(Z), U_2(Z), \dots U_n(Z))$ همگراست

اگر عددی مانند C وجود داشته باشد $\underset{n \to \infty}{|U_n(Z) - C| < \varepsilon}$

باشد یعنی حد دنباله C شود بنابراین می‌گوییم دنباله همگراست به یک عدد.

آزمون همگرایی دنباله‌ها

آزمون اول = آزمون عبارت n ام

$\lim_{n \to \infty} |U_n(Z)| \neq 0$ واگراست

Subject
Date

مثال) در مورد همگرایی یا واگرایی دنباله‌ی $u_n(Z) = Z^{j-1}$ نظر دهید.

باید حدش را بگیریم بفهمیم صفر می‌شود یا نه

$$\lim_{j \to \infty} |Z^{j-1}| = Z^{\infty} = \begin{cases} \infty & |Z| > 1 \quad \text{واگرا} \\ 1 & |Z| = 1 \quad \text{نمی‌توان نظر داد} \\ 0 & 0 < |Z| < 1 \quad \text{همگرا} \end{cases}$$

آزمون دوم: آزمون نسبت یا معیار (دالامبر) پارامتری به اسم لاندا تعریف می‌کند

که می‌شود:

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}(Z)}{u_n(Z)} \right|$$

که سه حالت برایش پیش می‌آید:

$$\begin{cases} |\lambda| < 1 & \text{همگرا} \\ |\lambda| = 1 & \text{کمکی نمی‌کند} \rightarrow \text{باید سراغ آزمون‌های دیگر برویم} \\ |\lambda| > 1 & \text{واگرا} \end{cases}$$

Subject
Date

مثال ۴) دنباله‌ی $u_n(z) = n^3\, 3^n$ با معیار دالامبر بررسی کنید.

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)^3\, 3^{n+1}}{n^3\, 3^n} \right| \longrightarrow 3 \qquad = \lambda = 3$$

در حد بی‌نهایت وقتی n داشتیم بزرگترین درجه لحاظ می‌شد. درجه بزرگتر مهم

پس n^3 با n^3 می‌رود

طبق از مون $\lambda = 3$ واگرا می‌شود.

تمرین ۱۲) همگرایی دنباله زیر را بررسی کنید.

$a_n(z) = (-1)^n\, n\, 2^{n+1}\, z^{2n}$

1

آزمون سوم: آزمون ریشه n اُم

مانند آزمون دالامبر است که λ بر اساس تعریف می‌شود:

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n(z)} \longrightarrow \Big\{ \text{مثل آزمون دوم}$$

مثال 3) آیا دنباله زیر همگراست؟

$$u_n(z) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n$$

به روش دالامبر حل نمی‌شود پس باید با آزمون ریشه n اُم حل کرد.

به این صورت است:

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n(4-i)^n}{2^{2n}+\cancel{3}}} = \frac{(-1)|4-i|}{4}$$

$$2^{2n} \simeq 4^n$$

اندازه‌ی یک عدد مختلط می‌شود $\sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

پس: $\frac{(-1)|4-i|}{4} = \frac{-\sqrt{17}}{4}$

واگراست

خوب نیست پاسخ بدهید است

قدر مطلقش از یک بزرگتر است

* } سری دالامبر
معمولی دالامبر بهتر است

68

Subject
Date

باید از جمله $\sqrt[n]{\ }$ ام بگیریم

$\sqrt{17} \approx 4/1$

تمرین ۱۳ (1

$$u_n(z) = \frac{(3i)^{2n}}{2^{2n}(2i-1)^n}$$

Subject
Date

سری ها

به مجموعه‌ای از یک یا چند جمله‌ی دنباله‌ها یک سری گفته می‌شود

$$\begin{cases} S_1 = u_1 + u_2 \\ S_2 = u_1 + u_2 + u_3 \\ S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \end{cases}$$

سری توانی: ممکن است مرکز هم داشته باشد

این سری مرکزش صفر است و به صورت

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Z^n$$

ضریب

زیر هم می‌توان نوشت:

که حالت کلی است اگر بخواهد

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n (Z - Z_0)^n$$

مرکز Z_0

صفر را نشان بدهد $Z_0 = 0$ می‌نویسند.

این سری را بسط می‌دهیم:

مثال ۴۰۸

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (Z+1)^n$$

در ابتدا Z_0 را پیدا می‌کنیم که $Z_0 = -1$ و بعد بسطش می‌دهیم

$$(Z+1) + (Z+1)^2 + (Z+1)^3 + \dots + (Z+1)^n$$

$n=1$

$Z - Z_0 \rightarrow Z_0 = Z - -1$

Subject
Date

همگرایی سری توانی:

همگرایی سری توانی در صورتی محقق می‌شود که حد آن وقتی n به سمت ∞ می‌رود صفر باشد و تمامی آزمون‌های دنباله‌ها نیز برای سری‌ها صادق است.

مثال ۱: همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

A) $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

B) $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$

A) حکم‌ش را از دالامبر می‌دهیم:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \lim \left| \frac{\frac{\cancel{z^n} \times z}{\cancel{n!} \times (n+1)}}{\frac{\cancel{z^n}}{\cancel{n!}}} \right| = \lim \left| \frac{\overset{\text{عدد}}{z}}{n+1} \right|$$

قوی‌تر است

بی‌نهایت است

$= 0 < 1$ همگرا

$\frac{\text{عدد}}{\text{بی‌نهایت}} = 0$

Subject
Date

B)

$$\lambda = \lim \left| \frac{Z^{n+1}(n+1)!}{Z^n\, n!} \right| = \lim \left| \frac{\cancel{Z^n} \times Z \times \cancel{n!} \times (n+1)}{\cancel{Z^n} \times \cancel{n!}} \right| =$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| Z(n+1) \right| = \infty > 1$$ واگرا

شعاع همگرایی

مطابق مناسبه زیر شعاع همگرایی محدوده ای را مشخص می کند که به ازای جمیع مقادیر آن محدوده سری توانی همگرای باشد.

شعاع همگرایی

$$|Z - Z_0| < R$$

$$*R = \frac{1}{\lambda}$$

اگر حد آزمون ها را λ محاسبه کنیم شعاع همگرایی می شود:

شعاع همگرایی براساس مقدار آزمون دالامبر یا آزمون های دیگر تعیین همگرایی مشخص می شود مطابق مناسبه *

مثال ۲) شعاع همگرایی سری زیر را تعیین نمایید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

PAPCO

Subject
Date

آزمون دالامبر

$$\lambda = \lim \left| \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \right| = \left| \frac{\frac{(2n+2)!}{(n!)^2 (n+1)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \right| =$$

$$\left| \frac{\frac{\cancel{(2n)!} \times (2n+1)(2n+2)}{\cancel{(n!)^2} \times (n+1)^2}}{\frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(n!)^2}}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{4n^2}{n^2} = 4$$

$$R = \frac{1}{4}$$

تمرین ۱۴) شعاع همگرایی سری های زیر را حساب کنید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{2^n (n!)^3}$$

Subject
Date

انواع سری‌های توانی - سه نوع سری توانی داریم :

سری تیلور و سری مک لوران و سری لوران

هر تابع تحلیلی را می‌توان به صورت یک سری توانی نوشت که بر اساس رابطه

انتگرال کوشی در قضیه انتگرال گیری اعداد مختلط به صورت زیر خواهد بود :

$$S_n = \frac{F^n(Z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(Z)}{(Z-Z_0)}\,dZ$$

اگر حول نقطه صفر باشد مک لوران

اگر حول نقطه تکین باشد لوران ← نقطه‌ای که تحلیلی نیست (جلسه قبل)

اگر هر نقطه‌ای باشد که حالت کلی تیلور است.

قضیه مانده‌ها - فرض کنید تابع $F(Z)$ روی یک منحنی دسته C و تمام نقاط

داخلی آن به غیر از نقطه Z_0 تحلیلی باشد آنگاه مانده ی $F(Z)$

در نقطه ی Z_0 تعیین می‌شود.

باقی‌مانده

$$Res\left[F(Z), Z_0\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(Z)}{Z-Z_0}\,dZ$$

PAPCO

Subject
Date

بسط تابع $\bar{F}(z)$

$$C_{-\infty}(Z-Z_0)^{-\infty}$$

$$F(Z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (Z-Z_0)^n = \cdots + C_{-2}(Z-Z_0)^{-2} +$$

$$C_{-1}(Z-Z)^{-1} + C_0 + C_1(Z-Z_0)^1 + C_2(Z-Z_0)^2 + \cdots$$

$$C_{+\infty}(Z-Z_0)^{+\infty}$$

$$\mathrm{Res}\left[F(z), Z_0\right] = C_{-1}$$

هر تابعی را بخواهیم مانده حساب کنیم C_{-1} است

جلسه آخر

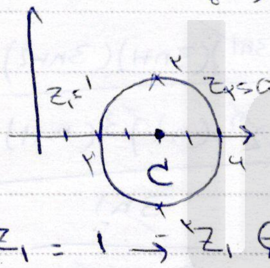
حل تمرین‌های جلسات قبل

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-1)^3(z-5)^2} \qquad C = |z-4| = 2$$

مرکز دایره ۴ — شعاع ۲

۱/۲/۱ تا ۴

$z_0 = 5$



$z_1 = 1 \rightarrow z_1 \notin C$

$z_2 = 5 \rightarrow z_2 \in C$

$$\oint \frac{\overbrace{\cos z / (z-1)^3}^{f(z)}}{(z-5)^2}\, dz \Rightarrow \oint \frac{\cos z}{(z-1)^3}$$

$n+1 = ۲$

$n + 1 = 2 \rightarrow n = 1$

$$f'(2) = \frac{(-\sin z)(z-1)^3 - 3(2-1)^2 (\cos z)}{(2-1)^6}$$

$$f'(5) = \frac{-\sin(5-1)^3 - (3(5-1)^2)(\cos 5)}{(5-1)^6}$$

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-1)^3(z-5)^2} = 2\pi i \times f'(5)$$

$z = ۱ \qquad z = ۵$

$(z-1)^3 = 3 \times 1 \times (z-1)^2$

شرط ۱ ← مخرج در هر عددی صفر می‌شود تابع بی‌نهایت (∞^3) مشتق ندارد، تابع تحلیلی نیست — نقطه تکین

شرط ۲ ← بررسی نقاط داخل دایره انتگرال گیری هست یا نه؟

۵ داخل است پس به فرمول کوشی با توانش $F(Z)$ رو مشتق، جای z عددی 5 را می‌گذاریم، داخل دایره هست.

Subject
Date

$$u(n) = \frac{(3i)^{2n}}{2^{2n}(2i-1)^n} = \frac{(3i)^{2^n}}{2^{2^n}(-1+2i)^n} =$$

* استفاده از روش ریشه

$$\frac{(9(i)^2)^n}{4^n(-1+2i)^n} = \frac{(-9)^n}{4^n(-1+2i)^n}$$

$$\lambda = \sqrt[n]{\frac{-9^n}{4^n(-1+2i)^n}} = \frac{-9}{4|-1+2i|} = \left|\frac{-9}{۴\sqrt{۵}}\right| > 1$$

واگرا

$$|-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+(2^2)} = \sqrt{۵}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{2^n (n!)^3} = \lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(3(n+1))!}{2^{n+1}((n+1)!)^3}}{\dfrac{(3n)!}{2^n (n!)^3}} \right|$$

* حکم صلی

$$= \lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(3n+3)!}{2^{n+1}(n!)^3(n+1)^3}}{\dfrac{3n!}{2^n(n!)^3}} \right| = \lim \left| \frac{\dfrac{\cancel{(3n)!}(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{2\cdot \cancel{2^n}\cancel{(n!)^3}(n+1)^3}}{\dfrac{\cancel{3n!}}{\cancel{2^n}\cancel{(n!)^3}}} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲۷\cancel{n^3}}{۲\cancel{n^3}} = \lambda = \frac{۲۷}{۲} \qquad R = \frac{1}{\lambda} = \frac{۲}{۲۷}$$

P4PCO

۷۷

$$\begin{cases} \lambda = \infty & R = 0 \\ \lambda = 0 & R = \infty \end{cases}$$

Subject

Date

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+2}}{\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+2}\cancel{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}\left(\frac{2}{5}\right)}{\frac{1}{(n+1)}\cancel{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}} \right| = \lim \left| \frac{\frac{2}{5(n+2)}}{\frac{1}{(n+1)}} \right|$$

$$* \Rightarrow \lim \left| \frac{2n+2}{5n+10} \right| = \lim \left| \frac{2n}{5n+10} + \frac{2}{5n+10} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2}{5+\underbrace{\cancel{\tfrac{10}{n}}}_{\text{صفر}}} + \underbrace{\cancel{\frac{2}{5n+10}}}_{\text{صفر}} \right|$$

$$\lambda = \frac{2}{5} \longrightarrow R = \frac{1}{\lambda} = \frac{5}{2}$$

$\frac{2}{5}$

* ضرب طرفین وسطین

$$\frac{2}{5(n+2)} \times \frac{n+1}{1} \qquad \frac{2n+2}{5n+10} \qquad \frac{2n}{5n+10}$$

مثال

انتگرال زیر را به روش مانده ها حل کنید.

$$\oint \frac{9z+i}{z(z^2+1)}\,dz = 2\pi i \, Res\{f(z)\}$$

$1 \leq |z| \leq 2$

$$2\pi i \times \lim_{z \to z_0} f(z)$$

مشخص کردن نقاط تکین: نقاطی که مخرج را صفر می‌شود:

$z=0$

$z^2+1=0 \to z=\pm i$

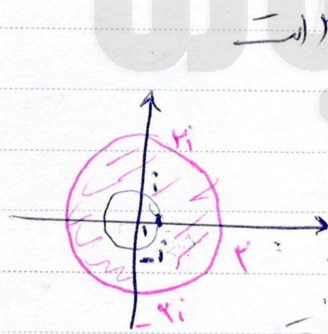
سه نقطه تکین داریم: $z_0=0$ ، $z_1=-i$ ، $z_2=+i$

اگر داخل محدوده باشد حساب می کنیم

اگر " " " نباشد صفر

مشخص کردن محدوده:

دایره ای که خارج شعاع ۱ و داخل شعاع ۲ است



به اندازه ۲

از ۱ تا ۲

صفر داخل دایره نیست

ولی $\pm i$ هست مرز را هم شامل می شود

مساوی دارد ॥

حالا اینها چندتا هستند باید یکبار i و یکبار -i را حساب کنیم و با هم جمع کنیم.

Subject
Date

$$\frac{9z-i}{z(z-i)(\cancel{z+i})}$$ $-i$

اول $-i$ را حساب می‌کنیم

$z+i$ را حذف می‌کنیم

$$2\pi i \times \lim_{z \to (-i)} \frac{9z-i}{z(z-i)} = \frac{-8i}{-i(-2i)} = \frac{-8i}{-2} = +4i \times 2\pi i = \boxed{-8\pi}$$

سراغ $+i$ ← $z-i$ را حذف می‌کنیم

$$\lim \frac{9z+i}{z(z+i)} = \frac{10i}{i \times 2i} = -5i \times 2\pi i = 10\pi$$

$$\boxed{10\pi - 8\pi = 2\pi}$$

مقدار انتگرال

مثال ۲) * مانده تابع زیر را در نقطه $z=2$ تعیین کنید.

$z=2$ وقتی مانده دارای تعریف می‌شود که تکین باشد — صفر

مانده تابع در نقطه‌ای تعریف می‌شود که آن نقطه، نقطه تکین تابع باشد

در این مثال چون $z=2$ نقطه تکین نیست بنابراین مانده آن صفر است.

تمرین) مانده در نقطه $z_0=1$

$$\oint_{|z-2i|=2} \frac{\sin z}{(z+4)(z-1)^2}\,dz$$

$$\boxed{z_0=1}$$

PAPCO