دانشگاه علم و صنعت ایران

مقدمه ای بر روش های انتگرال گیری

مفاهیم انتگرال و روش‌های انتگرال گیری

انتگرال‌گیری یکی از دو رکن اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است که سابقه تاریخی آن طولانی تر از مشتق

ریشه آن به روش افنا بر می‌گردد که توسط ریاضی دان های یونان باستان بالاخص ارشمیدس به کار گرفته

، در قرن هفدهم در اروپا مورد توجه قرار گرفت و ارتباط آن با مشتق مشخص شد.

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، ارتباط بین انتگرال و مشتق را مشخص می‌کند

محاسبه مساحت ناحیه زیر منحنی

فرض کنید f پیوسته و نامنفی باشد. [a,b] را به n زیر بازه به طول مساوی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ افراز می‌کنیم:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$$

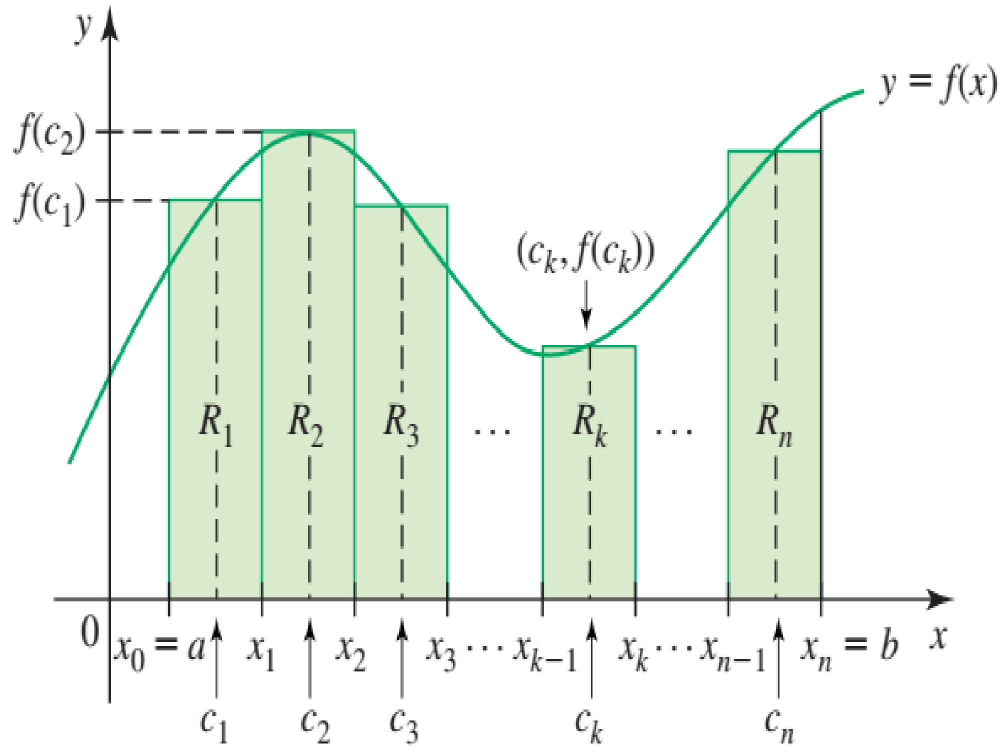
آنگاه مساحت ناحیه مورد نظر تقریبا برابر با مجموع مساحت کل مستطیل‌های R_k می‌شود. مساحت مستطیل R_k برابر با $f(c_k)\Delta x$ است که $c_k \in [x_{k-1},x_k]$. لذا

$$S \cong \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \quad \Longrightarrow \quad S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

محاسبه مساحت ناحیه زیر منحنی

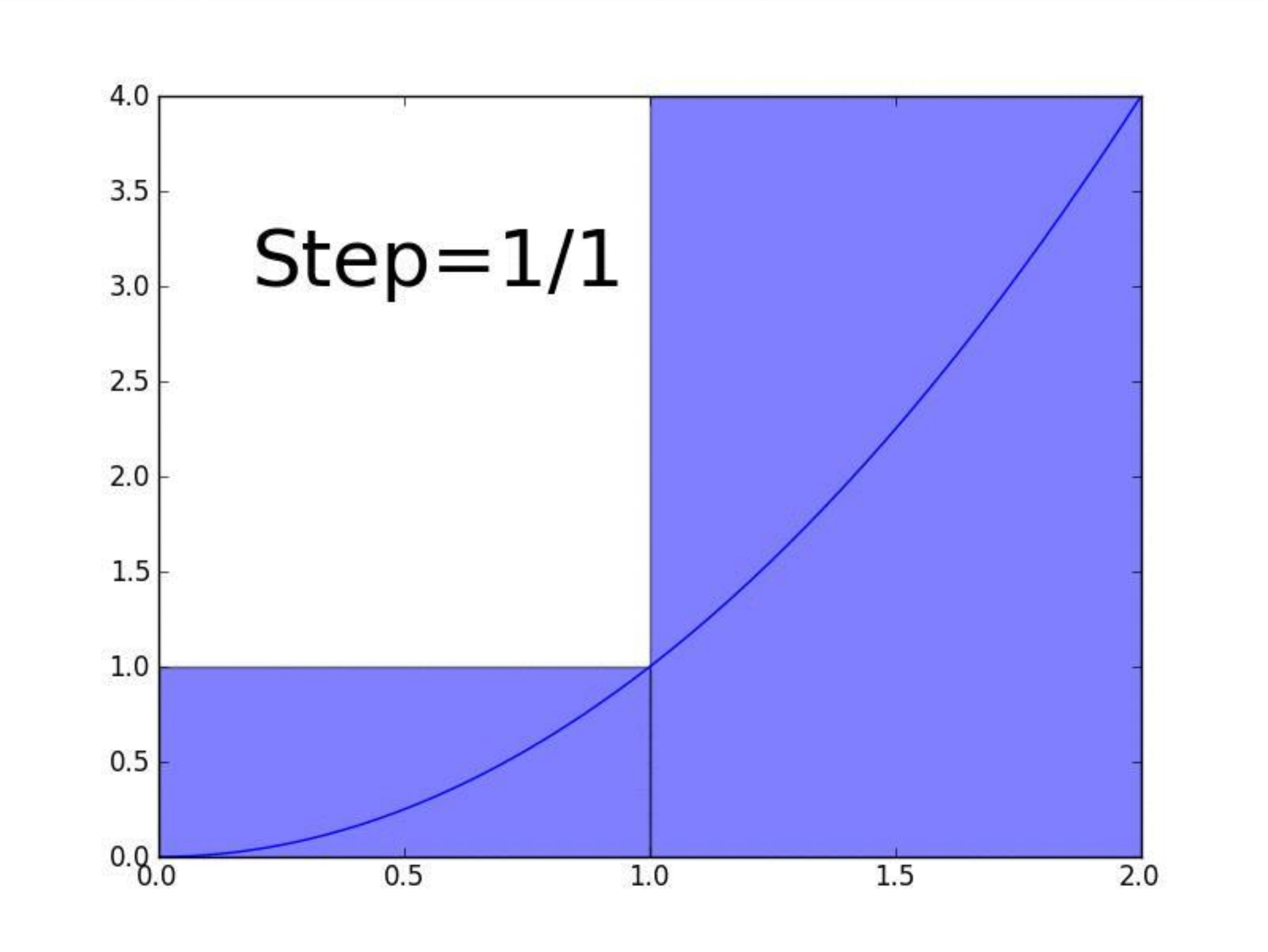
فرض کنید f پیوسته و نامنفی باشد. بازه [a,b] را به n زیر بازه به طول مساوی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ افراز می‌کنیم:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$$



$$S \cong \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$



Step=1/1
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

تعریف انتگرال معین

تعریف: فرض کنید f تابعی پیوسته باشد. [a,b] را به n زیربازه به طول $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ افراز می کنیم:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$$

آنگاه انتگرال معین f روی بازه $[a,b]$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

که $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

فرمول های مقدماتی

قضیه حساب دیفرانسیل و انتگرال ارتباط بین مشتق و انتگرال را بیان می کند،

این قضیه بطور مستقل توسط نیوتون (۱۷۲۷-۱۶۴۳) و لابنیتز (۱۷۱۶-۱۶۴۶) کشف شد.

قضیه:

اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه تابع $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ روی بازه (a,b) مشتقپذیر است و

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

بر اساس قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، مشتق و انتگرال عکس هم هستند.

بنابراین اگر جای دو طرف فرمول های مشتق را عوض کنیم فرمول‌های انتگرال به دست می‌آیند.

این فرمول‌ها را فرمول‌های مقدماتی انتگرال‌گیری می‌نامیم

فرمول های مقدماتی

1- $\int x^{n} dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + c$

2- $\int \frac{۱}{x} dx = \ln x + c$ $\Rightarrow$ $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{۱}{a} \ln|ax+b| + c$

3- $\int e^{ax} dx = \frac{۱}{a} e^{ax} + c$

مثال 1: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

الف) $I=\int \sqrt{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۳}}+۵x^{۴}dx$

$$I=\int x^{\frac{۱}{۲}}+x^{\frac{۲}{۳}}+x^{-۳}+۵x^{۴}dx=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}+۱}x^{\frac{۱}{۲}+۱}+\frac{۱}{\frac{۲}{۳}+۱}x^{\frac{۲}{۳}+۱}+\frac{۱}{-۳+۱}x^{-۳+۱}+۵\frac{x^{۵}}{۵}+c$$

$$=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}+\frac{۳}{۵}x^{\frac{۵}{۳}}-\frac{۱}{۲}x^{-۲}+x^{۵}+c=\frac{۲}{۳}\sqrt{x^{۳}}+\frac{۳}{۵}\sqrt[۳]{x^{۵}}-\frac{۱}{۲x^{۲}}+x^{۵}+c$$

ب) $I = \int a^x dx$

ب) چون $e^{x\ln a} = a^x$ لذا

$$\int a^x dx = \int e^{(\ln a)x} dx = \frac{۱}{\ln a} e^{(\ln a)x} + c = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

ج) $I = \int \frac{x}{2x+1} dx$

ج) سعی می کنیم عامل مخرج را در صورت کسر ایجاد کنیم:

$$I = \int \frac{x}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{2x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{2x+1} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \ln(2x+1) + c$$

فرمولهای انتگرال مثلثاتی:

4- $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

5- $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

6- $\int (1+\tan^2 x)\, dx = \tan x + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

7- $\int (1+\cot^2 x)\, dx = -\cot x + c$

$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$

10- $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

11- $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$

12- $\int \frac{١}{\sqrt{a^{٢} - x^{٢}}} dx = \sin^{-١}(\frac{x}{a}) + c \qquad a > ٠$

13- $\int \frac{١}{a^{٢} + x^{٢}} dx = \frac{١}{a} \tan^{-١} \frac{x}{a} + c$

$$14- \int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^{٢}-١}} = \sec^{-١} x + c$$

فرمولهای انتگرال توابع هایپربولیک

15- $\int \sinh ax \, dx = \frac{1}{a}\cosh ax + c$

16- $\int \cosh ax \, dx = \frac{1}{a}\sinh ax + c$

17- $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + c$

18- $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = \int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + c$

19- $\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + c$

20- $\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + c$

فرمولهای انتگرال توابع معکوس هایپربولیک

21- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sinh^{-1} x + c = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + c$

22- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \cosh^{-1} x + c = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + c$

23- $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1} \frac{x}{a} + c = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + c$

مثال 2: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $$I=\int \tan^{۲} x+\frac{۱}{\sqrt{۳-x^{۲}}}\,dx$$

$$I=\int (\tan^{۲} x+۱)-۱+\frac{۱}{\sqrt{۳-x^{۲}}}\,dx=\tan x-x+\sin^{-۱}\frac{x}{\sqrt{۳}}+c$$

ب) $I = \int \frac{x^2}{x^2+a^2}\,dx$

$$I = \int \frac{x^2}{x^2+a^2}\,dx \quad = I = \int \frac{x^2+a^2-a^2}{x^2+a^2}\,dx$$

$$= \int 1 - \frac{a^2}{x^2+a^2}\,dx = x - a^2 \times \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$$

$$= x - a\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$$

انتگرال معین

انتگرال‌هایی که کران بالا و پایین آنها مشخص باشد را انتگرال‌های معین می‌نامیم

برای محاسبه انتگرال‌های معین از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (قسمت دوم) استفاده می-

کنیم، در واقع اگر f پیوسته باشد، همچنین انتگرال $f(x)$ برابر $F(x)$ باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال ۳: انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_{۰}^{۲} \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^{۲}}} dx$$

$$I = \sinh^{-۱} x \,\Big|_{۰}^{۲} = \ln\left(x + \sqrt{x^{۲} + ۱}\right)\Big|_{۰}^{۲} = \ln(۲ + \sqrt{۵}) - \ln ۱ = \ln(۲ + \sqrt{۵})$$

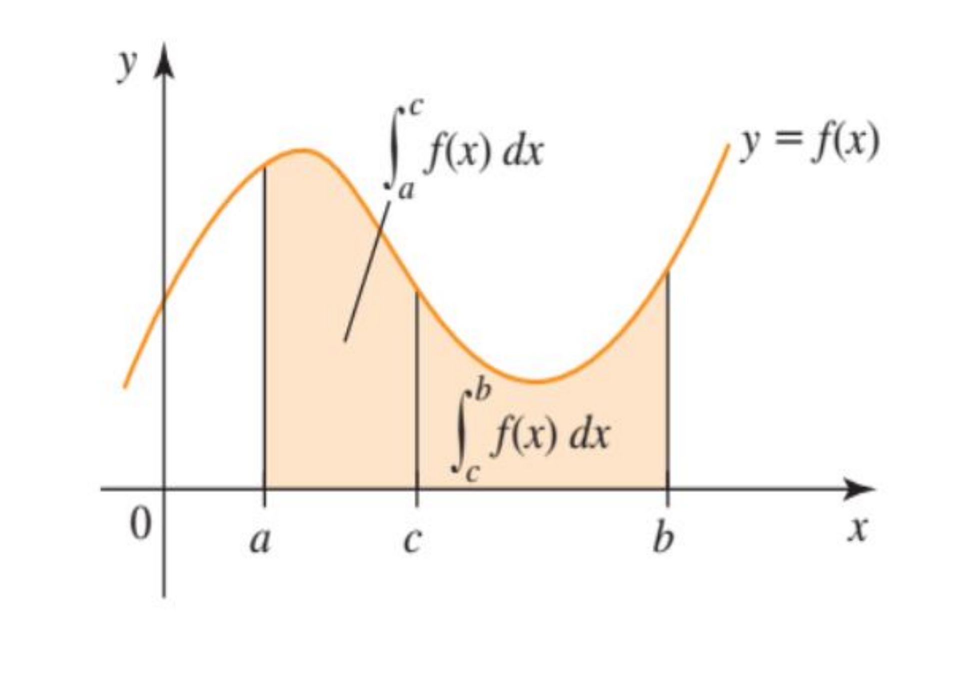
خواص انتگرال معین:

هرگاه f و g روی بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر باشند آنگاه

$$\int_a^a f(x)dx = ۰$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



خواص انتگرال معین:

اگر به ازای هر $a \le x \le b$ داشته باشیم $f(x) \ge 0$ آنگاه

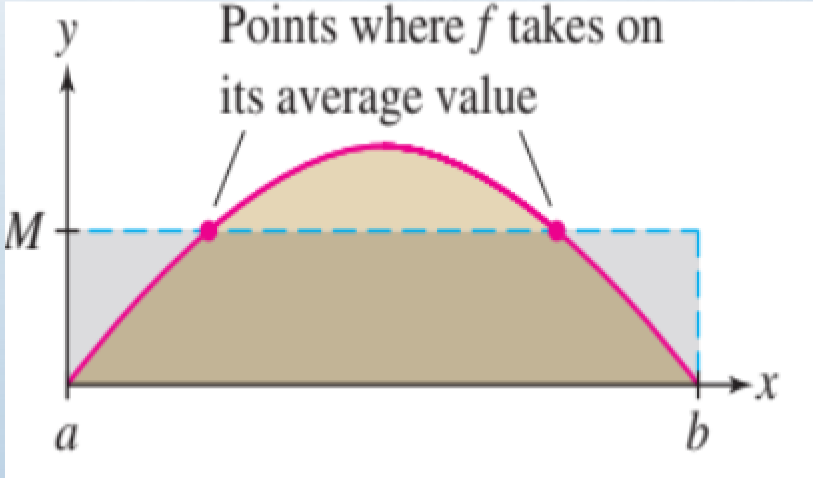
$$\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

اگر به ازای هر $a \le x \le b$ داشته باشیم $f(x) \le g(x)$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

قضیه مقدار میانگین انتگرالها

اگر f روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه وجود دارد $c \in [a, b]$

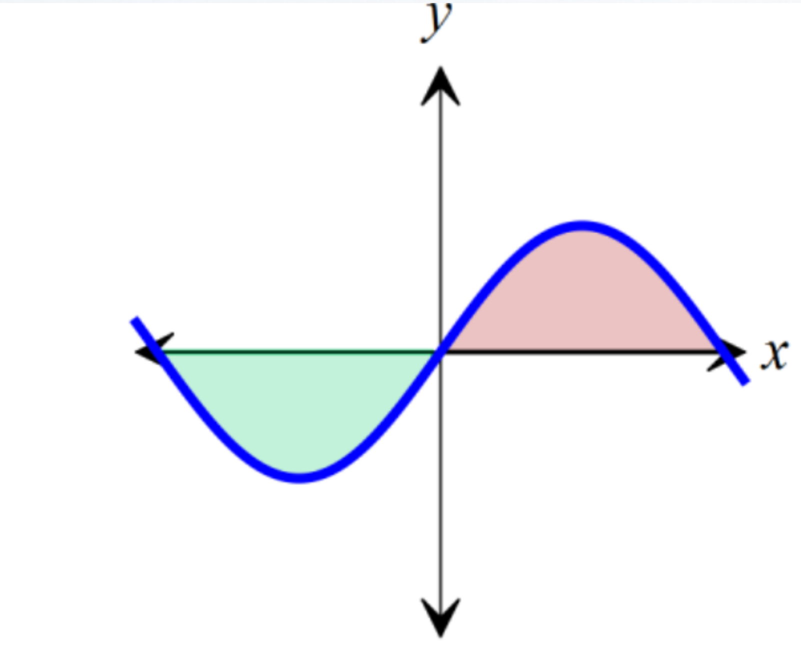


$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

توابع زوج و فرد

تابع f روی یک بازه متقارن فرد است اگر

هر $x \in D_f$، $f(-x) = -f(x)$



تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات تقارن دارد.

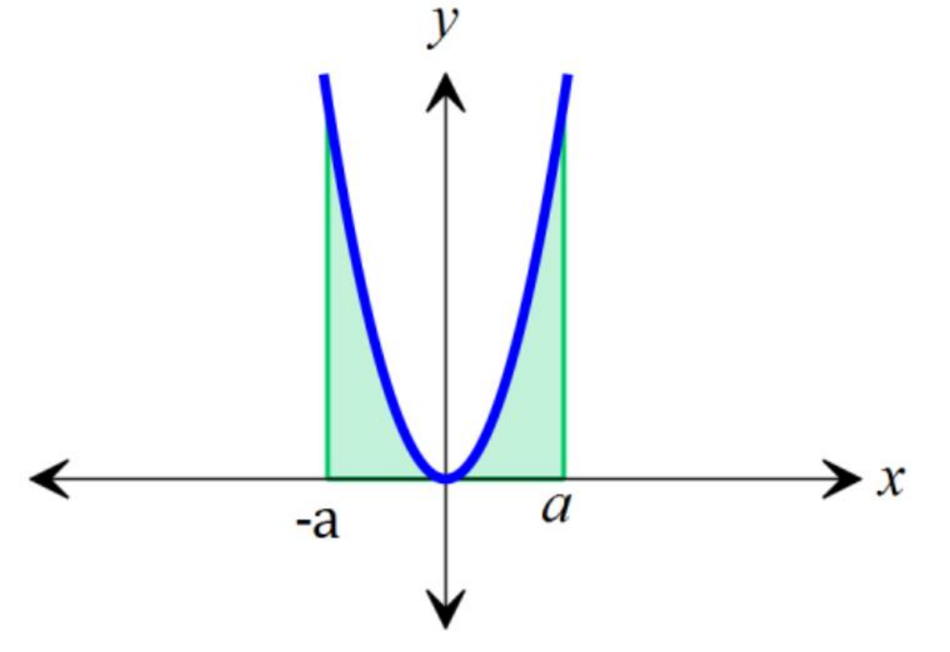
برخی از توابع فرد:

- چند جمله ای ها با درجه فرد $x, x^3, x^5, \ldots$
- تابع $\tan x, \sin x$
- مجموع چند تابع فرد، تابعی فرد است.

توابع زوج و فرد

تابع f روی یک بازه متقارن زوج است اگر به ازای هر $x \in D_f$، $f(-x) = f(x)$

تابع زوج نسبت به محور y ها تقارن دارد.



برخی از توابع زوج :

- چند جمله ای ها با درجه زوج مثل $۱, x^۲, x^۴, x^۶, ...$
- تابع $y = \cos x$، تابع $y = |x|$
- مجموع چند تابع زوج، تابعی زوج است.
- توابع می‌توانند نه فرد باشند و نه زوج

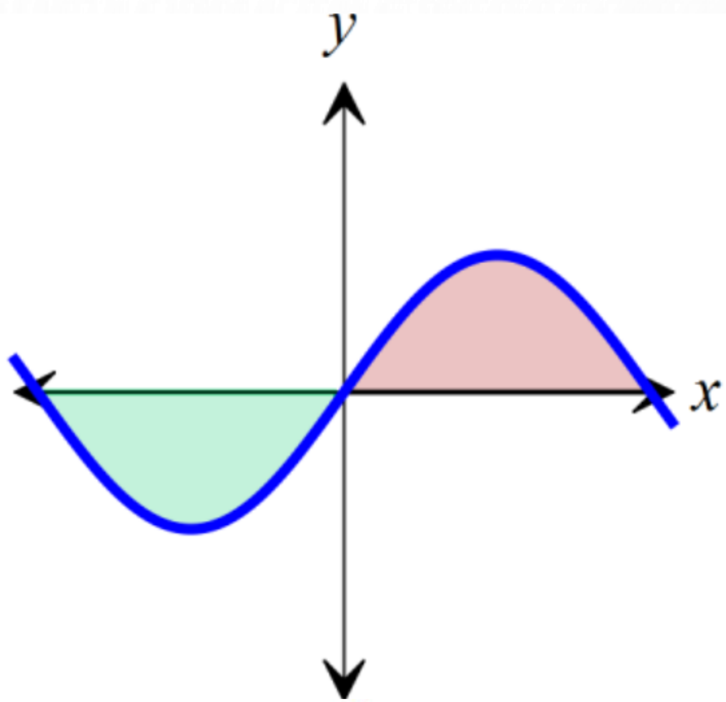
$f(x) = e^x$

$f(x) = x + x^۲$

حاصل ضرب توابع زوج و فرد:

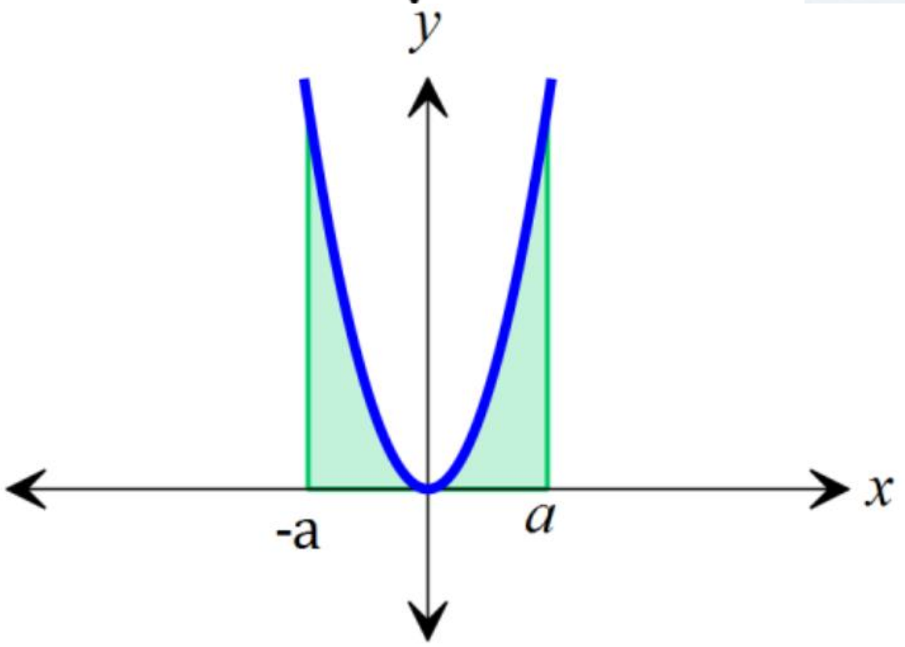
×	فرد	زوج
فرد	زوج	فرد
زوج	فرد	زوج

اگر f تابعی فرد باشد $\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۰$



اگر f تابعی زوج باشد، آنگاه

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۲\int_{۰}^{a} f(x)dx$$



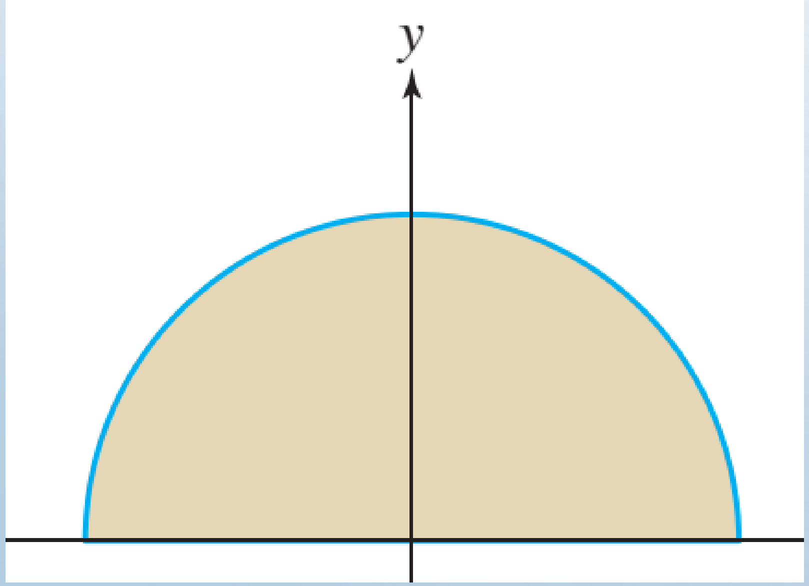
مثال ۷: انتگرال های زیر را محاسبه کنید. الف) $I=\int^{1} x\sqrt{1-x^{2}}dx$

حل: الف) چون $\sqrt{1-x^{2}}$ زوج و x تابعی فرد است لذا حاصل ضرب آنها تابعی فرد است لذا $I=0$

ب) $I=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}dx$

ب) با توجه به شکل مقابل، انتگرال فوق در واقع بیانگر مساحت نیم دایره به شعاع a می‌باشد

لذا $I=\frac{1}{2}\pi a^{2}$



ج) $$\int_{-1}^{1} x^2 \log(x+\sqrt{x^2+1})\ dx$$

$$f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$f(-x)=\log(-x+\sqrt{(-x)^2+1}) = \log(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$= \log\left(\sqrt{x^2+1}-x\times\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$= \log\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$= \log 1 \ -\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = -\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \ = -f(x)$$

ج) $$\int_{-1}^{1} x^2 \log(x+\sqrt{x^2+1})\ dx$$

ج) چون $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ فرد و x^2 تابعی زوج است لذا حاصل ضرب آنها تابعی فرد است

لذا $I=۰$

توابع انتگرال پذیر

انتگرال ریمان برای توابع کراندار و روی بازه‌های کراندار تغریف شده است.

هر تابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ نیز انتگرال‌پذیر است.

مجموعه همه توابع انتگرال‌پذیر بسیار گسترده از مجموعه توابع پیوسته است.

به عنوان مثال تابع جزءصحیح $f(x) = [x]$ نیز تابعی انتگرال‌پذیر است.

بطور کلی هر تابع تکه‌ای پیوسته، تابعی انتگرال‌پذیر است.

تعریف:

تابع f روی بازه $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته است هرگاه بتوان بازه $[a,b]$ را به n زیر بازه به صورت

$x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ افراز نمود به طوریکه

الف) f روی هر زیربازه (x_i, x_{i+1}) پیوسته باشد.

ب) f در نقاط انتهایی هر زیر بازه کراندار باشد.

قضیه: هر تابع تکه‌ای پیوسته انتگرال‌پذیر است.

فرمول مشتق از انتگرال:

قضیه ۱: فرض کنید $f(t)$ تابعی پیوسته باشد و $h(x)$ و $g(x)$ توابع مشتق پذیر باشند، آنگاه

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x))$$

در حالت کلی تر اگر $f(t,x)$ تابعی دو متغیره از t,x باشد آنگاه

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t,x)dt = h'(x)f(h(x),x) - g'(x)f(g(x),x) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$$

که $\frac{\partial f}{\partial x}$ مشتق f نسبت به x است.

مثال ۴: اگر $\int_{0}^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$ باشد مقدار $f(2)$ را حساب کنید.

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x^2} f(t)dt = \frac{d}{dx}(x^2(1+x))$$

$$2xf(x^2) - 0 = 2x + 3x^2 \quad \Rightarrow f(x^2) = 1 + \frac{3}{2}x \xrightarrow{x=\sqrt{2}} f(2) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

مثال ۵: حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $L = \lim_{x \to ۰} \frac{\int_{۰}^{x^۲} \sin\sqrt{x}dx}{x^۳}$

$$L = \lim_{x \to ۰} \frac{۲x \sin x}{۳x^۲} = \lim_{x \to ۰} \frac{۲ \sin x}{۳x} = \frac{۲}{۳}$$

ب) $L=\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\int_{x^{۲}}^{\sin x}\operatorname{sech} t\,dt}{\ln(۱+x)}$

$$L=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x\ \operatorname{sech}(\sin x)-۲x\ \operatorname{sech}(x^{۲})}{\frac{۱}{\ }}$$

$$=\lim_{x\to ۰}(۱+x)\left(\cos x\ \operatorname{sech}(\sin x)-۲x\ \operatorname{sech}(x^{۲})\right)$$

$$=\cos(۰)\operatorname{sech}(۰)-۰=\frac{۱}{\cosh(۰)}=۱$$

مثال: تابع ناصفر و پیوسته f را بر $[0,\infty)$ چنان بیابید که در معادله زیر صدق کند. (علم و صنعت ۹۵)

$$f^2(x)=\int_0^{x^2}\frac{f(\sqrt{t})}{1+t^2}dt$$

$$2f(x)f'(x)=2x\frac{f(x)}{1+x^4}$$

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^4}\quad\Rightarrow\quad f(x)=\int\frac{2x}{1+x^4}dx=\tan^{-1}(x^2)+c$$

چون با توجه به معادله اصلی $f(0)=0$ بنابراین $c=0$ و

$$f(x)=\tan^{-1}(x^2)$$

روش های انتگرال گیری

از آن جایی که نمی‌توان همه انتگرال‌ها را با فرمول‌های مقدماتی حل نمود، بنابراین در ادامه روشهای انتگرال‌گیری را بیان می‌کنیم. **تغییر متغیر، جز به جزء و روش تجزیه کسرها، تغییر متغیرهای معکوس مثلثاتی** از مهمترین روش های انتگرال‌گیری هستند.

روش تغییر متغیر:

روش تغییر متغیر معادل با روش مشتق ترکیب توابع (قاعده زنجیره‌ای) در حساب دیفرانسیل می‌باشد. در واقع

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c$$

معمولاً زمانی که یک عامل و مشتق آن در مسئله وجود داشته باشد می‌توانیم از تغییر متغیر استفاده کنیم.

مثال ۸: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{x\,dx}{x^{۲}+۱}$

قرار می‌دهیم $u = x^{۲}+۱$ لذا $du = ۲x\,dx$

$$\int \frac{x}{x^{۲}+۱}dx = \frac{۱}{۲}\int \frac{۲x\;dx}{x^{۲}+۱} = \frac{۱}{۲}\int \frac{du}{u} = \frac{۱}{۲}\ln u + c$$

$$= \frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۱)+c$$

ب) $\int \frac{\sin(۳ \ln x)}{x} dx$

قرار می‌دهیم $u = \ln x$ لذا $du = \frac{۱}{x} dx$ بنابراین

$$\int \frac{\sin(۳ \ln x)}{x} dx = \int \sin ۳u \, du$$

$$= \frac{-۱}{۳} \cos ۳u + c$$

$$= \frac{-۱}{۳} \cos(\ln x) + c$$

ج) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$

با فرض آنکه $u=۱-x^{۲}$ داریم $du=-۲xdx$ بنابراین

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} = -\frac{۱}{۲}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{۱}{۲}\int u^{-\frac{۱}{۲}}du = -\frac{۱}{۲}\frac{u^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}$$

$$= -\sqrt{u}+c = -\sqrt{۱-x^{۲}}+c$$

د) $\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$

با فرض آنکه $u = x^۲$ داریم $du = ۲x\,dx$ بنابراین

$$\int \frac{x}{۱+x^۴}\,dx = \int \frac{x}{۱+(x^۲)^۲}\,dx$$

$$= \frac{۱}{۲}\int \frac{du}{۱+u^۲} = \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(u)+c$$

$$= \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(x^۲)+c$$

مثال ۱۰: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$

الف) با استفاده از تغییر متغیر $u=x^2-1$ داریم $du=2x\,dx$ بنابراین

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx=\int x^2\sqrt{x^2-1}\,xdx=\frac{1}{2}\int(u+1)\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+c$$

$$I = \int \frac{dx}{(\cos^{-۱} x)^{۵}\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

$$u = \cos^{-۱} x \quad \Rightarrow du = \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx$$

$$I = \int \frac{-du}{u^{۵}} \quad = -\int u^{-۵} du \quad = \frac{-u^{-۴}+c}{-۴}$$

$$= \frac{۱}{۴u^{۴}} + c \quad = \frac{۱}{۴(\cos^{-۱} x)^{۴}} + c$$

مثال ۹: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I=\int \tan x\,dx$

ب) $I=\int \cot x\,dx$

از تغییر متغیر $u=\cos x$ استفاده می‌کنیم، لذا $du=-\sin x\,dx$

$$I=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{-\sin x\,dx}{\cos x}=-\int \frac{du}{u}$$

$$=-\ln u+c=-\ln|\cos x|+c$$

$$\boxed{\int \tan x\,dx=-\ln|\cos x|+c=\ln|\sec x|+c}$$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد:

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

مثال ۱۰: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(علم و صنعت-۹۴)

$$I=\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$$

$$u=\tan x \Rightarrow du=(1+\tan^2 x)dx \qquad du=\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$I=\int\frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{dx}{a^2\tan^2 x+b^2}$$

$$I=\int\frac{du}{a^2u^2+b^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{du}{u^2+(\frac{b}{a})^2}=\frac{1}{a^2}\times\frac{1}{\frac{b}{a}}\tan^{-1}(\frac{u}{\frac{b}{a}})+c=\frac{1}{ab}\tan^{-1}(\frac{a\tan x}{b})+c$$

نکته: در محاسبه برخی از انتگرالهای به فرم $\int f(e^x)dx$ که f تابعی کسری بر حسب e^x است می توانیم از تغییر متغیر $u = e^x$ استفاده کنیم. اگر عامل e^x در صورت کسر وجود نداشته باشد بهتر است ابتدا صورت و مخرج کسر را در e^x ضرب کنیم.

مثال ۱۱: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

با استفاده از تغییر متغیر $u = e^x$ داریم $du = e^x dx$

ابتدا صورت و مخرج کسر را در e^x ضرب می‌کنیم لذا

$$I = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{du}{u^2 + 1}$$

$$= \tan^{-1} u + c = \tan^{-1}(e^x) + c$$

انتگرال های مثلثاتی:

انتگرال های به صورت $\int \cos^{۲} x\,dx$ ، $\int \sin^{۲} x\,dx$ یا $\int \cos^{۴} x\,dx$ و ... را معمولاً می‌توان با استفاده از فرمول های طلایی زیر محاسبه نمود.

$$\cos^{۲} x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲}$$

$$\sin^{۲} x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲}$$

مثال ۱۲: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I=\int \cos^{۲} x\,dx$

$$I=\int \frac{۱+\cos ۲x}{۲}dx=\frac{۱}{۲}(x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x)+c=\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۴}\sin ۲x+c$$

ب) $I=\int \sin^{۲} x\,dx$

مشابه قسمت الف می‌توان نشان داد

$$\int \sin^{۲} x\,dx=\int \frac{۱-\cos ۲x}{۲}dx=\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۴}\sin ۲x+c$$

ج) $I = \int \cos^۴ x\, dx$

$$\int \cos^۴ x\, dx = \int (\cos^۲ x)^۲ dx = \int \left(\frac{۱+\cos ۲x}{۲}\right)^۲ dx = \frac{۱}{۴}\int ۱+۲\cos ۲x+\cos^۲ ۲x\, dx$$

$$= \frac{۱}{۴}\int ۱+۲\cos ۲x+\frac{۱+\cos ۴x}{۲}dx \quad = \frac{۱}{۴}\left(x+\frac{۲}{۲}\sin ۲x+\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۸}\sin ۴x\right)+c$$

$$= \frac{۳}{۸}x+\frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c$$

نکته: انتگرال به صورت $\int \sec x\, dx$ را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر $u=\sec x+\tan x$ محاسبه نمود و

$\int \csc x\, dx$ را نیز می‌توان با استفاده از تغییر متغیر $u=\csc x+\cot x$ محاسبه نمود.

مثال ۱۳: انتگرال های زیر را محاسبه کنید .

الف) $I=\int \sec x\, dx$

$$I=\int \sec x \frac{(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx = \int \frac{\sec^{۲} x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}dx$$

$$u=\sec x+\tan x \Rightarrow du=(\sec x\tan x+\sec^{۲} x)dx$$

$$I=\int \frac{du}{u} = \ln|u|+c = \ln|\sec x+\tan x|+c$$

ب) $I = \int \csc x \, dx$

$$\int \csc x \; dx = -\ln|\csc x + \cot x| + c$$

محاسبه انتگرال های به صورت $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

در این نوع انتگرال ها اگر m یا n و یا هر دو فرد باشند، این انتگرال‌ها را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر محاسبه نمود. فرض کنید $n = 2k + 1$ آنگاه

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x \, dx = \int \sin^m x \, (\cos^2 x)^k \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^m x \, (1 - \sin^2 x)^k \cos x \, dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $u = \sin x$

$$= \int u^m (1 - u^2)^k \, du$$

مثال ۱۴: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I = \int \cos^3 x \, dx$

$$= \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$$

$$= \int (1 - u^2) \, du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c$$

ب) $I = \int \sin^{۳} x \cos^{۸} x \, dx$

$= \int \sin^{۲} x \cos^{۸} x \sin x \, dx$ $= \int (۱ - \cos^{۲} x) \cos^{۸} x \sin x \, dx$

حال از تغییر متغیر $u = \cos x$ استفاده می‌کنیم لذا $du = -\sin x \, dx$ پس

$= -\int (۱ - u^{۲}) u^{۸} \, du$ $= \int u^{۱۰} - u^{۸} \, du$ $= \frac{u^{۱۱}}{۱۱} - \frac{u^{۹}}{۹} + c$ $= \frac{\cos^{۱۱} x}{۱۱} - \frac{\cos^{۹} x}{۹} + c$

مثال ۱۶: انتگرالهای زیر را حساب کنید.

الف) $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} dx$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \tan x + \cot x \, dx = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| + c$$

$$= \ln|\tan x| + c$$

ب) $\int \sin x \tan x \, dx$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \quad = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx \quad = \int \sec x - \cos x \, dx$$

$$= \ln |\sec x + \tan x| - \sin x + c$$

ج) $\int (\sin^{11} x \cos x)^{-\frac{1}{3}} dx$

$$= \int \frac{1}{\sin^{11/3} x \cos^{1/3}\ x} dx = \int \frac{1}{\frac{\sin^{11/3} x}{\cos^{11/3}\ x}\ \cos^{12/3}\ x} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x \sec^2 x}{\tan^{11/3} x} dx = \int \frac{(1+\tan^2 x)}{\tan^{11/3} x} \sec^2 x\, dx$$

اگر از تغییر متغیر $u = \tan x$ استفاده کنیم داریم $du = \sec^2 x\ \ dx$ و

$$= \int \frac{1+u^2}{u^{11/3}} du = \int u^{-11/3} + u^{-5/3} du = \frac{u^{-\frac{8}{3}}}{-\frac{8}{3}} + \frac{u^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + c$$

$$= -\frac{3}{8} \tan^{-\frac{8}{3}} x + -\frac{3}{2} \tan^{-\frac{2}{3}} x + c$$

محاسبه انتگرال‌های به فرم $\int \tan^m x \sec^n x dx$:

حالت اول: اگر توان $\sec x$ زوج باشد، یک عامل $\sec^2 x$ را کنار گذاشته و با استفاده از فرمول $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ عامل های باقیمانده را برحسب $\tan x$ بیان می کنیم. بنابراین

$$\int \tan^m x \sec^n x \ dx = \int \tan^m x \, (\sec^2 x)^{k-1} \ \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \tan^m x \, (\tan^2 x + 1)^{k-1} \ \sec^2 x \, dx$$

حال از تغییر متغیر $u = \tan x$ استفاده می‌کنیم و انتگرال فوق به سادگی محاسبه خواهد شد.

مثال: انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int \tan^8 x \sec^4 x \; dx$$

$$= \int \tan^8 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \int \tan^8 x \, (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x \; dx$$

$$= \int u^8 (1 + u^2) \, du = \int u^8 + u^{10} \; du$$

$$= \frac{u^9}{9} + \frac{u^{11}}{11} + c \quad = \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^{11} x}{11} + c$$

حالت دوم: اگر توان تانژانت فرد باشد $(m = 2k + 1)$، یک عامل $\sec x \tan x$ را نگه می داریم و با استفاده از فرمول $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ بقیه جملات تانژانت را برحسب سکانت می نویسیم:

$$\int \tan^{2k+1} x \sec^n x \, dx = \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx$$

$$u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x \, dx$$

$$\Rightarrow \int \tan^{2k+1} x \sec^n x \, dx = \int (u^2 - 1)^k u^{n-1} \, du$$

مثال: انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$\int \tan^5 x \sec^3 x \, dx$$

$$= \int \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x \; dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \tan x \; dx$$

$$u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x \; dx$$

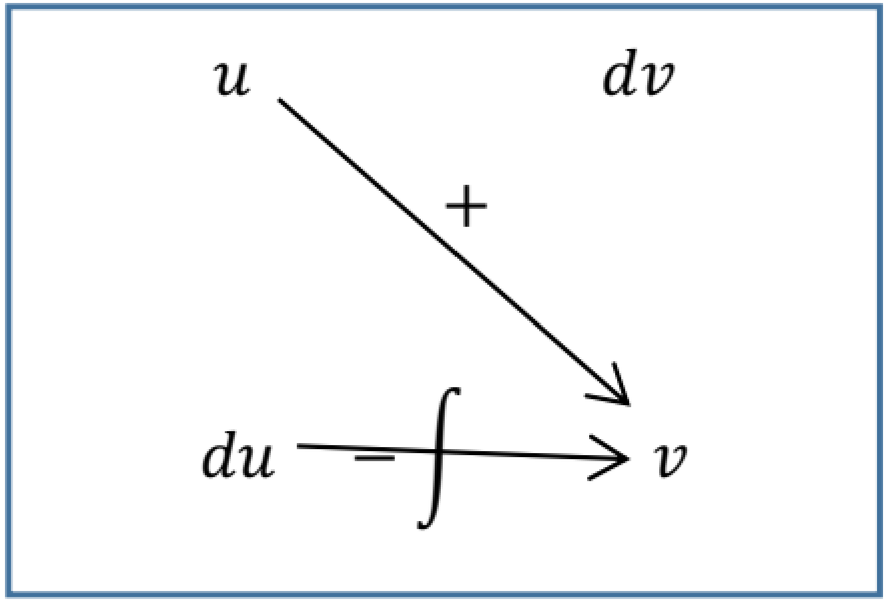
$$= \int (u^2 - 1)^2 u^2 du = \int u^6 - 2u^3 + u^2 du$$

$$= \frac{u^7}{7} - \frac{2u^4}{4} + \frac{u^3}{3} + c \quad = \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{2\sec^4 x}{4} + \frac{\sec^3 x}{3} + c$$

انتگرال گیری جز به جز

یکی دیگر از روش های انتگرال‌گیری، روش جز به جز است که معادل با مشتق حاصل ضرب در حساب دیفرانسیل است . فرمول روش جز به جز به صورت زیر است:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$



انتگرال گیری جز به جز

معمولاً انتگرال های به صورت $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ ، $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$ ، $\int e^{\alpha x}P(x)\,dx$ که $P(x)$ یک چند جمله ای است را باید با روش جز به جز محاسبه نمود همچنین انتگرال های به صورت $\int \ln x\,dx$ ، $\int \arctan x\,dx$ و .....نیز با این روش محاسبه می‌شوند.

انتگرال گیری جز به جز

یکی از توابع را u قرار می‌دهیم و یک تابع دیگر را dv قرار می-

دهیم از u مشتق و از dv انتگرال می‌گیریم. توجه کنید عاملی را به عنوان dv انتخاب کنید که به راحتی بتوانید

از آن انتگرال بگیرید.

انتگرال گیری جز به جز

مثال ۱۷: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I = \int x e^x \, dx$

$$= xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + c$$

انتگرال گیری جز به جز

ب) $I = \int \ln x \, dx$

$$= x \ln x - \int x \frac{۱}{x} dx$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

انتگرال گیری جز به جز

ج) $I = \int \arctan x \, dx$

$$= x \arctan x - \int \frac{x}{۱ + x^{۲}} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{۱}{۲} \ln(x^{۲} + ۱) + c$$

انتگرال گیری جز به جز

مثال ۱۸: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int \sec^{۳} x\,dx$$

$$=\int \sec x\ \sec^{۲} x\ \ dx = \sec x\tan x-\int \tan^{۲} x\sec x\,dx$$

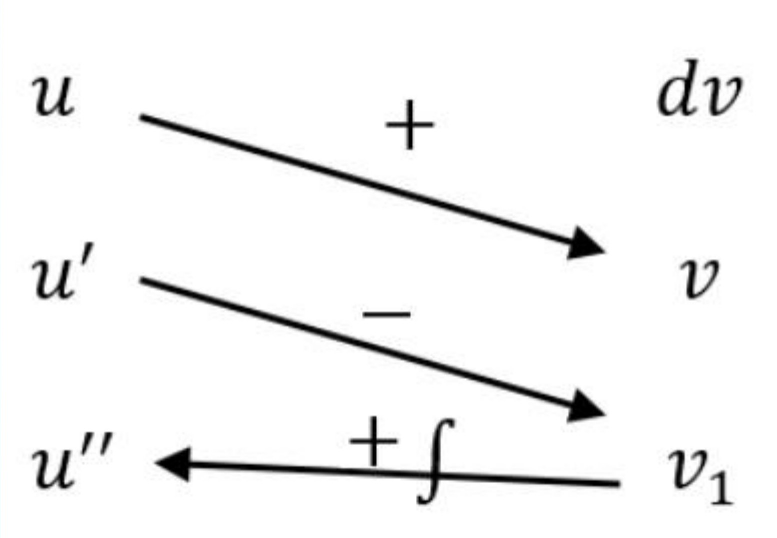
$$=\sec x\tan x-\int (\sec^{۲} x-۱)\sec x\,dx$$

$$=\sec x\tan x-\int \sec^{۳} x\,dx+\int \sec x\,dx$$

$$I=\sec x\ \tan x-I+\ln|\sec x+\tan x|+c$$

$$\Rightarrow\ I=\frac{۱}{۲}(\sec x\ \tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+c$$

نکته: برخی از مواقع در محاسبه برخی از انتگرالها نیاز داریم چند بار پشت سر هم از روش جز به جز استفاده کنیم. به عنوان مثال در محاسبه انتگرالهای $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ و $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$ نیاز داریم دو بار پشت سر هم از روش جز به جز استفاده کنیم. در این حالت



$$\int u\,dv = uv - u'v_1 + \int v_1 u'' dx$$

انتگرال گیری جز به جز

مثال ۱۹: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I=\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$

مشتق		انتگرال
$e^{\alpha x}$	$+$	$\sin\beta\, x$
$\alpha e^{\alpha x}$	$-$	$-\frac{1}{\beta}\cos\beta x$
$\alpha^2 e^{\alpha x}$	$+\int$	$-\frac{1}{\beta^2}\sin\beta x$

$$=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$$

$$=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\right]+c\Rightarrow$$

$$=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha^2}{\beta^2}I+c$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)+c$$

انتگرال گیری جز به جز

به طریق مشابه

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+c$$

انتگرال گیری جز به جز

$$I = \int e^{-x} \operatorname{arccot}(e^{x})\,dx$$

ابتدا از تغییر متغیر $u = e^{-x}$ استفاده می‌کنیم لذا $du = -e^{-x}dx$ بنابراین

$$I = \int u \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{du}{u}\right)du = -\int \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{u}\right)du$$

چون $\tan^{-1} x - \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ لذا

$$I = -\int \tan^{-1} u\,du = -u \tan^{-1} u + \frac{1}{2}\ln(u^{2}+1) + c = -e^{-x} \tan^{-1}(e^{-x}) + \frac{1}{2}\ln(e^{-2x}+1) + c$$

انتگرال گیری جز به جز

$$\int \frac{x \ln x \,(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\underbrace{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}_{u}dx$$

$$=\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int\sqrt{x^2+1}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-x+c$$

روش جدولی

روش جدولی حالت خاصی از روش جز به جز است. انتگرال های به فرم $\int p(x)\sin x\,dx$ ، $\int p(x)\cos x\,dx$ یا $\int p(x)e^{x}dx$ که p(x) یک چند جمله ای است را بهتر است به جای روش جز به جز با روش جدولی محاسبه نمود، چون در این حالت این روش بسیار ساده تر از روش جز به جز است.

در این روش از چندجمله‌ای درجه n پشت سر هم مشتق می‌گیریم n+1 مرتبه مشتق می‌گیریم و به همین اندازه از دیگر تابع انتگرال می‌گیریم. این روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۲۱: انتگرال های زیر را حساب نمایید.

الف) $I = \int (x^{۲}+۱)e^{x}\,dx$

x^2+1	$+$	e^x
$2x$	$-$	e^x
2	$+$	e^x
0		e^x

$$= (x^{۲}+۱)e^{x} - ۲xe^{x} + ۲e^{x} + c$$

ب) $I = \int (2x+1)\cos 2x \, dx$

$2x+1$		$\cos 2x$
	$+$	
2		$\frac{1}{2}\sin 2x$
	$-$	
0		$-\frac{1}{4}\cos 2x$

$$= \frac{2x+1}{2}\sin 2x - \frac{2}{4}\cos 2x + c$$

$$\int \sin \sqrt[4]{x-1}\, dx$$

تغییر متغیرهای معکوس مثلثاتی

بسیاری از انتگرال های شامل عباراتی هم چون $\sqrt{a^۲ - x^۲}$ ، $\sqrt{x^۲ - a^۲}$ یا $\sqrt{x^۲ + a^۲}$ را می‌توان با استفاده از تغییر متغیرهای مثلثاتی به صورت زیر محاسبه نمود.

حالت اول: اگر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^۲ - x^۲}$ باشد باید از تغییر متغیر $x = a\sin\theta$ استفاده نمود .

حالت دوم: اگر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{x^۲ - a^۲}$ باشد باید از تغییر متغیر $x = a\sec\theta$ استفاده نمود .

حالت سوم: اگر انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^۲ + x^۲}$ باشد باید از تغییر متغیر $x = a\tan\theta$ استفاده نمود.

مثال ۲۲: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I = \int \frac{x^{۲}}{\sqrt{۴-x^{۲}}} dx$

$x = ۲\sin\theta \Rightarrow dx = ۲\cos\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{۴\sin^{۲}\theta}{\sqrt{۴-۴\sin^{۲}\theta}} ۲\cos\theta\, d\theta = ۴\int \frac{\sin^{۲}\theta\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta} = ۴\int \sin^{۲}\theta\, d\theta = ۴\int \frac{۱-\cos ۲\theta}{۲} d\theta$$

$$= ۲(\theta - \frac{۱}{۲}\sin ۲\theta) + c = ۲\theta - ۲\sin\theta\cos\theta + c$$

$$= ۲\theta - ۲\sin\theta\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta} + c = ۲\sin^{-۱}\frac{x}{۲} - x\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{۴}} + c$$

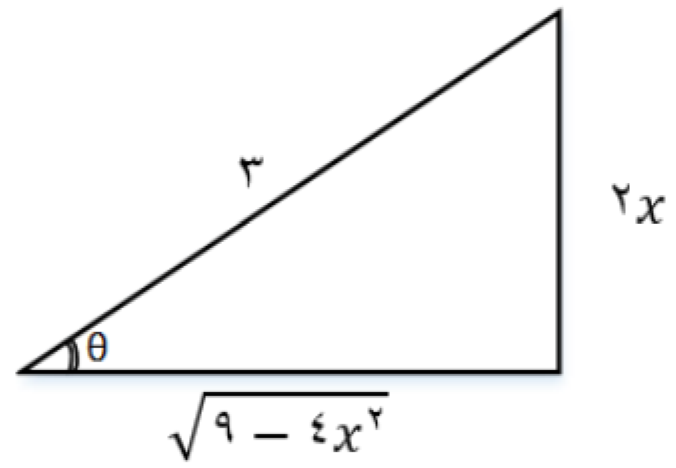
$$\text{ب)}\quad I=\int \frac{dx}{x\sqrt{۹-۴x^{۲}}}dx$$

$$x=\frac{۳}{۲}\sin\theta \quad \Rightarrow dx=\frac{۳}{۲}\cos\theta\, d\theta$$

$$=\int \frac{\frac{۳}{۲}\cos\theta\, d\theta}{\frac{۳}{۲}\sin\theta\sqrt{۹-۹\sin^{۲}\theta}}=\frac{۱}{۳}\int\frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{۱}{۳}\int\frac{۱}{\sin\theta}d\theta=\frac{۱}{۳}\int\csc\theta\, d\theta$$

$$=-\frac{۱}{۳}\ln|\csc\theta+\cot\theta|+c$$

$$\sin\theta=\frac{۲x}{۳}$$



$$=-\frac{۱}{۳}\ln\left|\frac{۳}{۲x}+\frac{\sqrt{۹-۴x^{۲}}}{۲x}\right|+c$$

$$\csc\theta=\frac{۱}{\sin\theta}=\frac{۳}{۲x}$$

$$\cot\theta=\frac{\sqrt{۹-۴x^{۲}}}{۲x}$$

مثال ۲۳: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$

$x = a\sec\theta \qquad dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

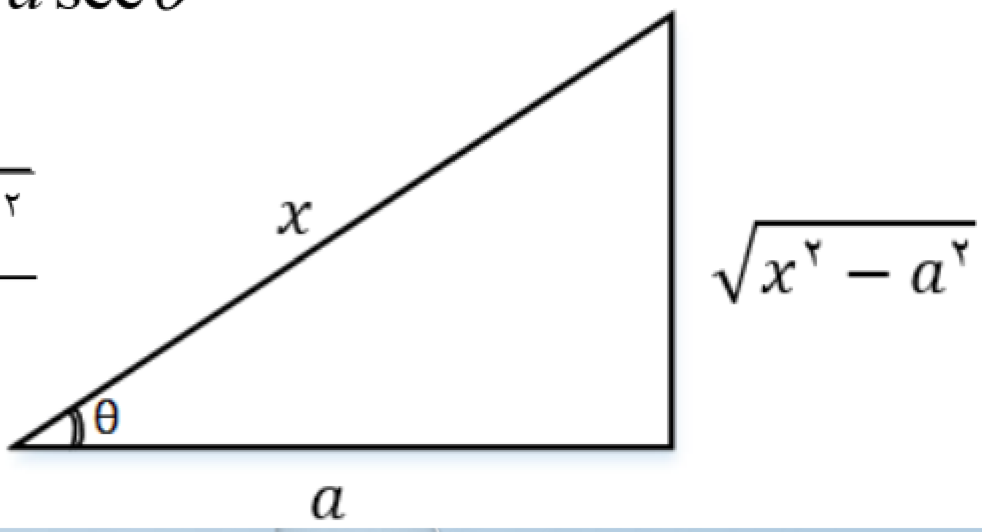
$$= \int \frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{a^2\sec^2\theta\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}} = \int \frac{\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{a\sec^2\theta\, a\tan\theta} = \frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sec\theta}d\theta = \frac{1}{a^2}\int\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{a^2}\sin\theta + c$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + c$$

$x = a\sec\theta$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$



مثال ۲۴: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

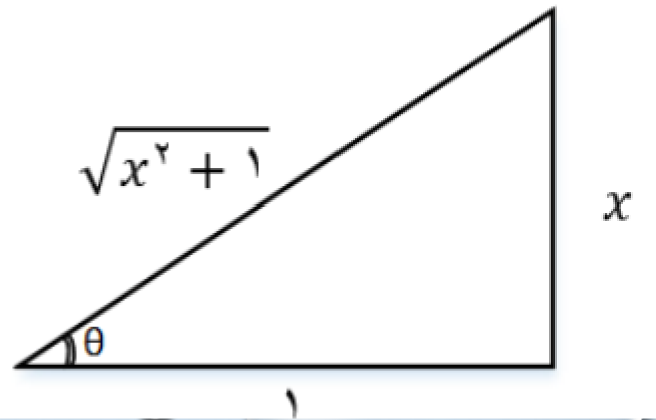
الف) $I=\int \frac{dx}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$

$$x=\tan\theta \Rightarrow dx=\sec^{۲}\theta\, d\theta$$

$$=\int \frac{\sec^{۲}\theta\, d\theta}{(\tan^{۲}\theta+۱)}=\int \frac{\sec^{۲}\theta}{\sec^{۴}\theta}d\theta=\int \frac{۱}{\sec^{۲}\theta}d\theta=\int \cos^{۲}\theta\, d\theta=\int \frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}d\theta=$$

$$=\frac{\theta}{۲}+\frac{۱}{۴}\sin ۲\theta=\frac{\theta}{۲}+\frac{۱}{۲}\sin\theta\cos\theta+c$$

$$\tan\theta=\frac{x}{۱}$$



$$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$$

$$\cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$$

$$=\frac{\tan^{-۱}x}{۲}+\frac{۱}{۲}\frac{x}{x^{۲}+۱}+c$$

کامل کردن مجذور

در انتگرال هایی که یک عبارت درجه دوم تجزیه ناپذیر $(\Delta < 0)$ دارند می‌توان عبارت درجه دوم را مربع کامل نموده که با این کار محاسبه انتگرال ساده تر می‌شود. در این حالت نصف ضریب x را به توان دو رسانده به عبارت اضافه و کم می‌کنیم

مثال ۲۵: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$2x-x^2=-(x^2-2x)=-(x^2-2x+1-1)=-\left[(x-1)^2-1\right]=1-(x-1)^2$$

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\sin^{-1}(x-1)+c$$

$$\text{ب)}\ \int \frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۲x-۳}}\,dx$$

$$x^{۲}+۲x-۳ = x^{۲}+۲x+۱-۴ = (x+۱)^{۲}-۴$$

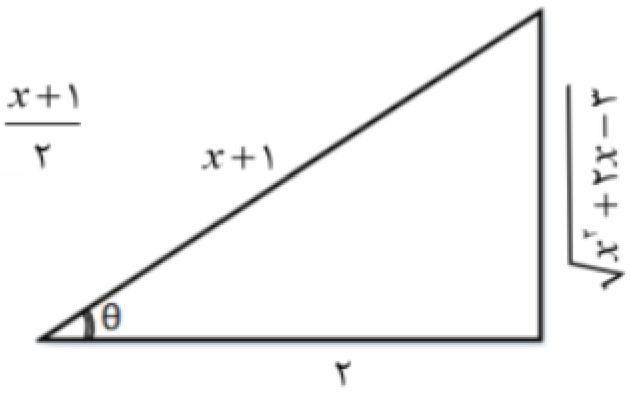
$$= \int \frac{x}{\sqrt{(x+۱)^{۲}-۴}}\,dx$$

$$x+۱ = ۲\sec\theta \qquad dx = ۲\sec\theta\tan\theta$$

$$= \int \frac{۲\sec\theta-۱}{\sqrt{۴\sec^{۲}\theta-۴}}\,۲\sec\theta\tan\theta\,d\theta = \int \frac{۲\sec\theta-۱}{\tan\theta}\sec\theta\tan\theta\,d\theta = ۲\int \sec^{۲}\theta\,d\theta - \int \sec d\theta$$

$$= ۲\tan\theta - \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

$$\sec\theta = \frac{x+۱}{۲}$$



$$= \sqrt{x^{۲}+۲x-۳} - \ln\left|\frac{x+۱}{۲} + \frac{\sqrt{x^{۲}+۲x-۳}}{۲}\right| + c$$

روش تجزیه کسرها

این روش برای محاسبه انتگرال توابع گویا به صورت $\int \frac{p(x)\,dx}{Q(x)}$ بکار برده می‌شود. اگر درجه صورت بزرگتر یا مساوی درجه مخرج باشد صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم در غیر این صورت کسر را تجزیه می‌کنیم.

مثال ۲۶: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int \frac{x^{۳}+۳x^{۲}}{x^{۲}+۱}dx$$

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^3+3x^2 & x^2+1 \\ \cline{3-3}
- & x^3+x & x+3 \\ \cline{1-2}
 & 3x^2-x & \\
- & 3x^2+3 & \\ \cline{1-2}
 & -x-3 &
\end{array}$$

$$x^{۳}+۳x^{۲}=(x^{۲}+۱)(x+۳)-(x+۳)$$

$$I=\int \frac{(x^{۲}+۱)(x+۳)-(x+۳)}{x^{۲}+۱}dx$$

$$=\int x+۳-\frac{x+۳}{x^{۲}+۱}dx$$

$$=\frac{x^{۲}}{۲}+۳x-\int \frac{x}{x^{۲}+۱}dx-۳\int \frac{dx}{x^{۲}+۱}$$

$$=\frac{x^{۲}}{۲}+۳x-\frac{۱}{۲}Ln(x^{۲}+۱)-۳\tan^{-۱}x+c$$

اگر درجه مخرج بیشتر از درجه صورت باشد سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم .

حالت اول: اگر مخرج کسر تنها شامل عامل های خطی باشد مثلا $Q(x)=A(x+a_1)\ldots(x+a_n)$ کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$

را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم .

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x+a_1}+\frac{A_2}{x+a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x+a_n}$$

حال باید ضرایب مجهول $A_1, A_2, \ldots A_n$ را محاسبه نماییم.

مثال ۲۷: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I=\int \frac{x+۴}{x^{۲}-۵x+۶}dx$

$$x^{۲}-۵x+۶=(x-۲)(x-۳)$$

$$\frac{x+۴}{x^{۲}-۵x+۶}=\frac{A}{x-۲}+\frac{B}{x-۳}=\frac{A(x-۳)+B(x-۲)}{(x-۲)(x-۳)}$$

$$x+۴=A(x-۳)+B(x-۲)$$

اگر $x=۲ \Rightarrow ۶=A(۲-۳)+B(۲-۲) \Rightarrow A=-۶$

اگر $x=۳ \Rightarrow ۷=A(۳-۳)+B(۳-۲) \Rightarrow B=۷$

$$I=\int \frac{-۶}{x-۲}+\frac{۷}{x-۳}dx=-۶\ln|x-۲|+۷\ln|x-۳|+c$$

ب) $\int \frac{۲x+۱}{x(x^{۲}-۱)}dx$

$$\frac{۲x+۱}{x(x^{۲}-۱)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-۱}+\frac{C}{x+۱}=-\frac{۱}{x}+\frac{۳}{۲(x-۱)}-\frac{۱}{۲(x+۱)}$$

$$I=\int -\frac{۱}{x}+\frac{۳}{۲(x-۱)}-\frac{۱}{۲(x+۱)}dx=-\ln|x|+\frac{۳}{۲}\ln|x-۱|-\frac{۱}{۲}\ln|x+۱|+c$$

حالت دوم : اگر مخرج گسر شامل عبارات درجه دوم تجزیه ناپذیر باشد به صورت زیر عمل می‌کنیم .

مثلا کسرهای زیر را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم .

$$\frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

عبارت های درجه دو به صورت x^2+a^2 ، $x^2\pm x+1$ عبارت های درجه دوم تجزیه ناپذیر هستند . در حالت کلی در تجزیه کسرها اگر مخرج کسر درجه یک (خطی) باشد صورت کسر یک چند جمله ای درجه صفر مجهول است و اگر مخرج کسر درجه دوم (تجزیه ناپذیر) باشد باید صورت کسر درجه اول مجهول باشد.

مثال ۲۸: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I=\int \frac{x^۴+x^۲+۱}{x^۳+x}dx$

$$\frac{x^۴+x^۲+۱}{x(x^۲+۱)}=\frac{x^۳}{x^۲+۱}+\frac{x^۲+۱}{x(x^۲+۱)}=\frac{x^۳}{x^۲+۱}+\frac{۱}{x}=x-\frac{x}{x^۲+۱}+\frac{۱}{x}$$

$$I=\int x-\frac{x}{x^۲+۱}+\frac{۱}{x}dx=\frac{x^۲}{۲}-\frac{۱}{۲}\ln(x^۲+۱)+\ln|x|+c$$

ب) $I=\int \frac{dx}{x^۳+۱}$

$$\frac{۱}{x^۳+۱}=\frac{۱}{(x+۱)(x^۲-x+۱)}=\frac{A}{x+۱}+\frac{Bx+C}{x^۲-x+۱}=\frac{A(x^۲-x+۱)(x+۱)(Bx+C)}{(x+۱)(x^۲-x+۱)}$$

$$A(x^۲-x+۱)+(x+۱)(Bx+C)=۱$$

اگر $x=-۱ \Rightarrow A(۱-(-۱)+۱)=۱ \Rightarrow A=\frac{۱}{۳}$

اگر $x=۰ \Rightarrow A+C=۱ \Rightarrow C=\frac{۲}{۳}$

$x=۱ \Rightarrow B=-\frac{۱}{۳}$

$$I=\frac{۱}{۳}\int \frac{۱}{x+۱}+\frac{۲-x}{x^۲-x+۳۱}dx$$

$$\frac{۲-x}{x^۲-x+۱}=-\frac{x-۲}{x^۲-x+۱}=-\frac{x-\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}}{x^۲-x+۱}=-\frac{۱}{۲}\frac{۲x-۱}{x^۲-x+۱}+\frac{۳}{۲}\frac{۱}{(x-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}$$

$$I=\frac{۱}{۳}\ln|x+۱|+\frac{۱}{۳}\left(-\frac{۱}{۲}\ln(x^۲-x+۱)+\frac{۳}{۲}\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\tan^{-۱}\left(\frac{x-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\right)\right)+c$$

حالت سوم : هرگاه یکی از عوامل خطی یا درجه دوم مخرج چند بار تکرار شده باشد . به عنوان مثال کسر $\frac{۱}{x^{۴}(x^{۲}+۲x+۲)^{۲}}$ را در نظر بگیرید، تجزیه آن به صورت زیر می‌باشد .

$$\frac{۱}{x^{۴}(x^{۲}+۲x+۲)^{۲}}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^{۲}}+\frac{C}{x^{۳}}+\frac{D}{x^{۴}}+\frac{Ex+F}{x^{۲}+۲x+۲}+\frac{Gx+H}{(x^{۲}+۲x+۲)^{۲}}$$

مثال ۲۹: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow A(-1)^2 = 1 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow C \times 1 = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow 1(1)^2 + B \times 2 \times 1 + 1 \times 2 = 1 \Rightarrow B = -1$$

$$I = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

$$= Ln\,|x| - Ln\,|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

نکته: در حالتی که مخرج کسر تنها شامل دو عبارت باشد که اختلاف آنها مقدار ثابتی است، فرمول زیر در تجزیه کسرها می‌تواند مفید باشد.

$$\frac{۱}{(f(x)+a)(f(x)+b)}=\frac{۱}{b-a}\left(\frac{۱}{f(x)+a}-\frac{۱}{f(x)+b}\right)$$

مثال: انتگرال زیر را بیابید:

$$I = \int \frac{1}{x^4 - a^4} dx \qquad |x| > |a|$$

$$\frac{1}{x^4 - a^4} = \frac{1}{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{x^2 - a^2} - \frac{1}{x^2 + a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2a^2}\frac{1}{(x - a)(x + a)} - \frac{1}{2a^2}\frac{1}{x^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{2a^2} \times \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right) - \frac{1}{2a^2}\frac{1}{x^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4a^3}(\ln(x - a) - \ln(x + a)) - \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$$

روش تغییرمتغیر گویا

در محاسبه انتگرالها هنگامی‌که انتگرالده شامل توان های گویای مختلف باشند، می‌توان از این تغییر متغیر استفاده نمود . در واقع اگر در یک انتگرال رادیکالی های با فرجه های مختلف داشته باشیم از تغییر متغیر $x = t^m$ استفاده می‌کنیم که m ک.م.م فرجه ها است. .

مثال ۳۰: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x}}$

$x = t^{۶}$ $\quad dx = ۶t^{۵}dt$

$$I = \int \frac{۶t^{۵}\, dt}{t^{۳} + t^{۲}} = ۶\int \frac{t^{۳}}{t+۱} dt$$

$$\frac{t^{۳}}{t+۱} = \frac{(t^{۳}+۱)-۱}{t+۱} = \frac{(t+۱)(t^{۲}-t+۱)-۱}{t+۱} = t^{۲} - t + ۱ - \frac{۱}{t+۱}$$

$$I = ۶\int (t^{۲} - t + ۱ - \frac{۱}{t+۱})dt = ۲t^{۳} - ۳t^{۲} + ۶t - ۶\ln|t+۱| + C$$

$t = \sqrt[۶]{x}$

$$I = ۲\sqrt{x} - ۳\sqrt[۳]{x} + ۶\sqrt[۶]{x} - ۶\ln|\sqrt[۶]{x} + ۱| + C$$

تغییر متغیر $z = \tan\frac{\theta}{2}$

برخی از انتگرال ها که تابع انتگرالده در آنها تابعی کسری بر حسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ است را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر $z = \tan\frac{\theta}{2}$ حل نمود در این حالت

$$\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\sin\theta = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}$$

مثال ۳۱: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $I=\int \frac{۱-\sin\theta}{۱+\cos\theta}d\theta$

قرار می‌دهیم $z=\tan\frac{\theta}{۲}$ لذا $\sin\theta=\frac{۲z}{۱+z^{۲}}$ و $\cos\theta=\frac{۱-z^{۱}}{۱+z^{۲}}$ و $d\theta=\frac{۲dz}{۱+z^{۲}}$ بنابراین

$$I=\int\frac{۱-\frac{۲z}{۱+z^{۲}}}{۱+\frac{۱-z^{۲}}{۱+z^{۲}}}\ \frac{۲dz}{۱+z^{۲}}=\int\frac{۱+z^{۲}-۲z}{۱+z^{۲}+۱۰z^{۲}}\ \frac{۲}{۱+z^{۲}}dz=\int\frac{۱+z^{۲}-۲z}{۱+z^{۲}}dz$$

$$=\int ۱-\frac{۲z}{z^{۲}+۱}dz=z-\ln(z^{۲}+۱)+C=\tan\frac{\theta}{۲}-\ln(\tan^{۲}\frac{\theta}{۲}+۱)+C$$