به نام خدا

کاربردهای معادله لاپلاس در مهندسی عمران

استاد: **جناب آقای دکتر ...**

دانشجو: **...**

شماره دانشجویی: **...**

نیمسال ...

فهرست

1.مقدمه

2.معادلات لاپلاس

3.کاربرد معادلات لاپلاس در حرکت سیال در یک محیط متخلخل

4.کاربرد معادلات لاپلاس در انتشار حرارت در محیط

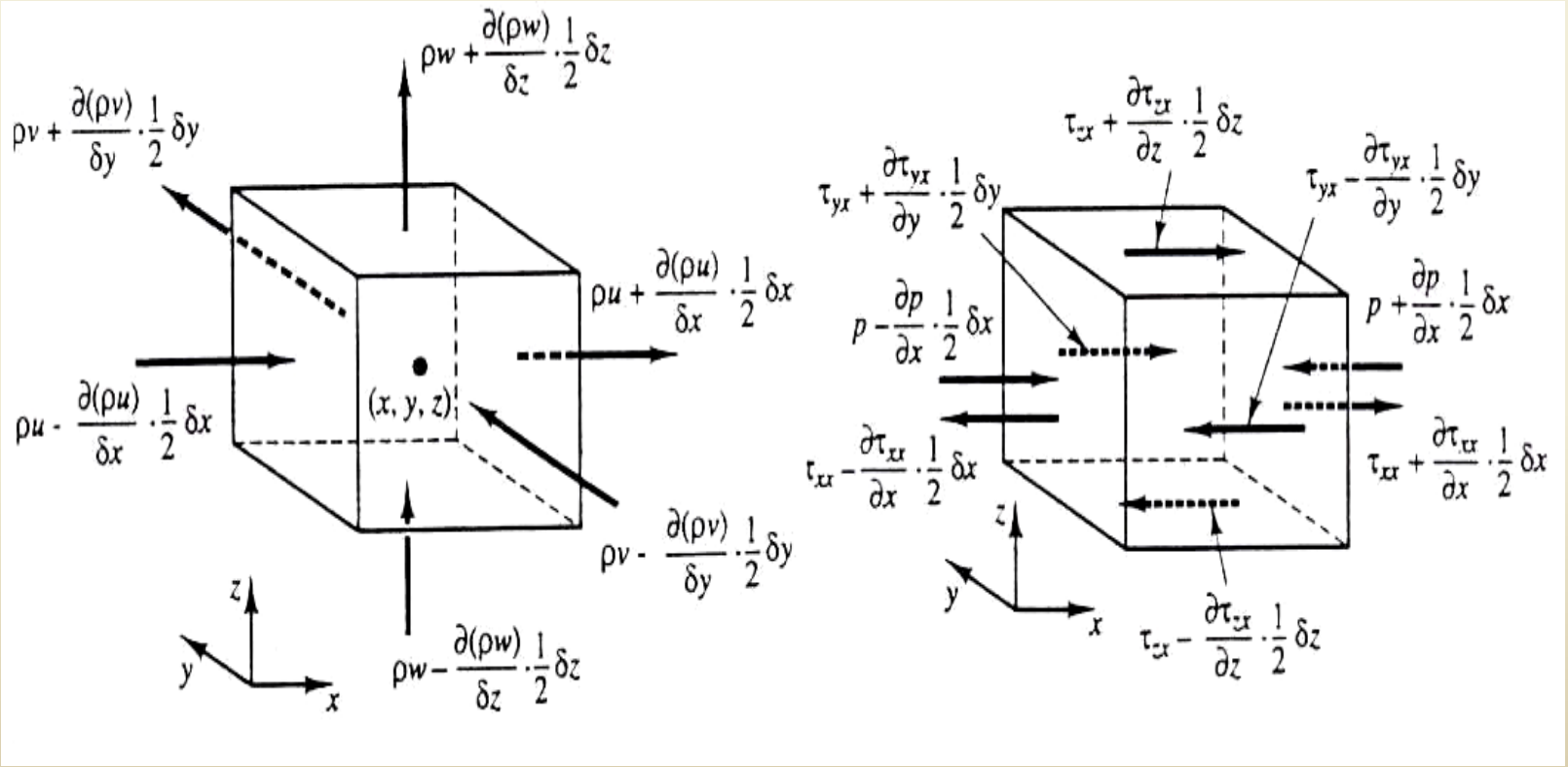
مقدمه

- پیتر سیمون لاپلاس ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، اخترشناس و فیلسوف که در ۲۳ مارس ۱۷۴۹ در حوالی پون لوک فرانسه متولد شد.
- گذشته از معادله لاپلاس که در تمام شاخه‌های ریاضی فیزیک استفاده می‌شود، نگاشت خطی دیفرانسیلی لاپلاس نیز به نام او نامیده شده‌است.
- معادله لاپلاس یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که از اهمّیّت و کاربرد فراوانی در ریاضیّات، فیزیک، و مهندسی برخوردار است.
- به عنوان چند نمونه می‌شود به زمینه‌هایی همچون الکترومغناطیس، ستاره‌شناسی، و دینامیک سیالات اشاره کرد که حلّ این معادله در آن‌ها کاربرد دارد. در سه بعد می‌شود آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

معادله لاپلاس

برای توصیف جریان در محیط های متخلخل از قوانین بقاء جرم اندازه حرکت و انرژی استفاده می‌شود.



المان‌های مفروض سیال برای توصیف قوانین بقاء

معادله لاپلاس

- **معادله پیوستگی (بقاء جرم)**

قانون بقاء جرم بیان میکند که نرخ خالص جرم به المان سیال با نرخ افزایش جرم در المان سیال برابر است. شکل ریاضی معادله پیوستگی برای المان مفروض سیال به صورت رابطهٔ ذیل بیان می شود.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

برای سیال غیر قابل تراکم (Incompressible flow) چگالی ثابت باشد به صورت رابطهٔ ذیل خلاصه میشود:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}}=۰$$

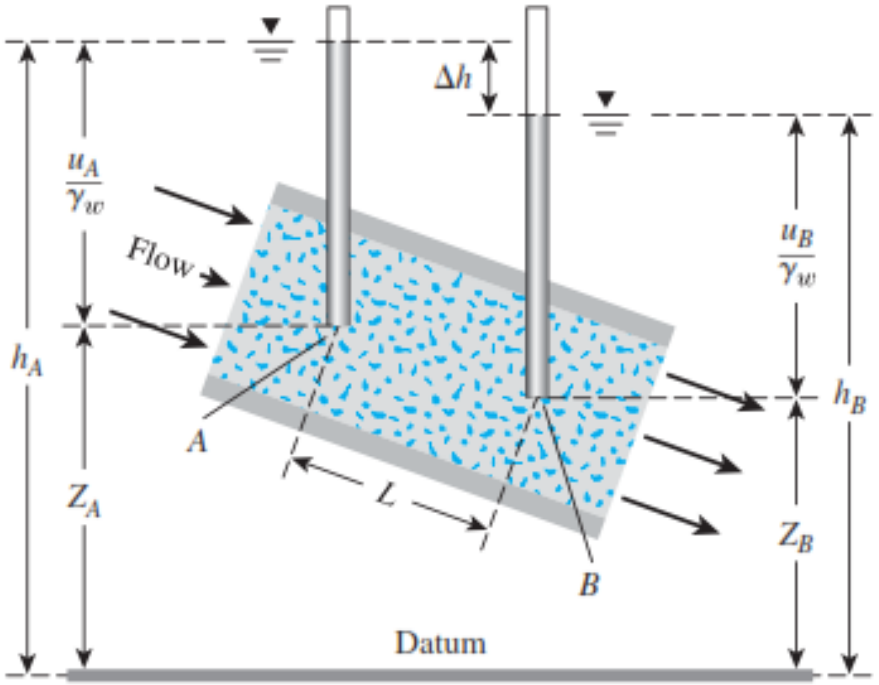
بکارگیری معادله لاپلاس در حرکت سیال

قانون دارسی

$$\Delta h = h_A - h_B = \left(\frac{u_A}{\gamma_w} + Z_A\right) - \left(\frac{u_B}{\gamma_w} + Z_B\right)$$

$$i = \frac{\Delta h}{L}$$

$$v = ki$$



بکارگیری معادله لاپلاس در حرکت سیال

- رابطه بقای جرم (دبی ورودی = دبی خروجی)

$$q_x + q_y + q_z = (q_z + dq_x) + (q_y + dq_y) + (q_z + dq_z)$$

معادله لاپلاس برای تراوش آب در محیط سه بعدی غیر ایزوتروپیک

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

معادله لاپلاس برای تراوش دو بعدی آب در محیط ایزوتروپیک

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

بکارگیری معادله لاپلاس در حرکت سیال

حل معادله لاپلاس در حالت دو بعدی

توابع (خطوط) جریان

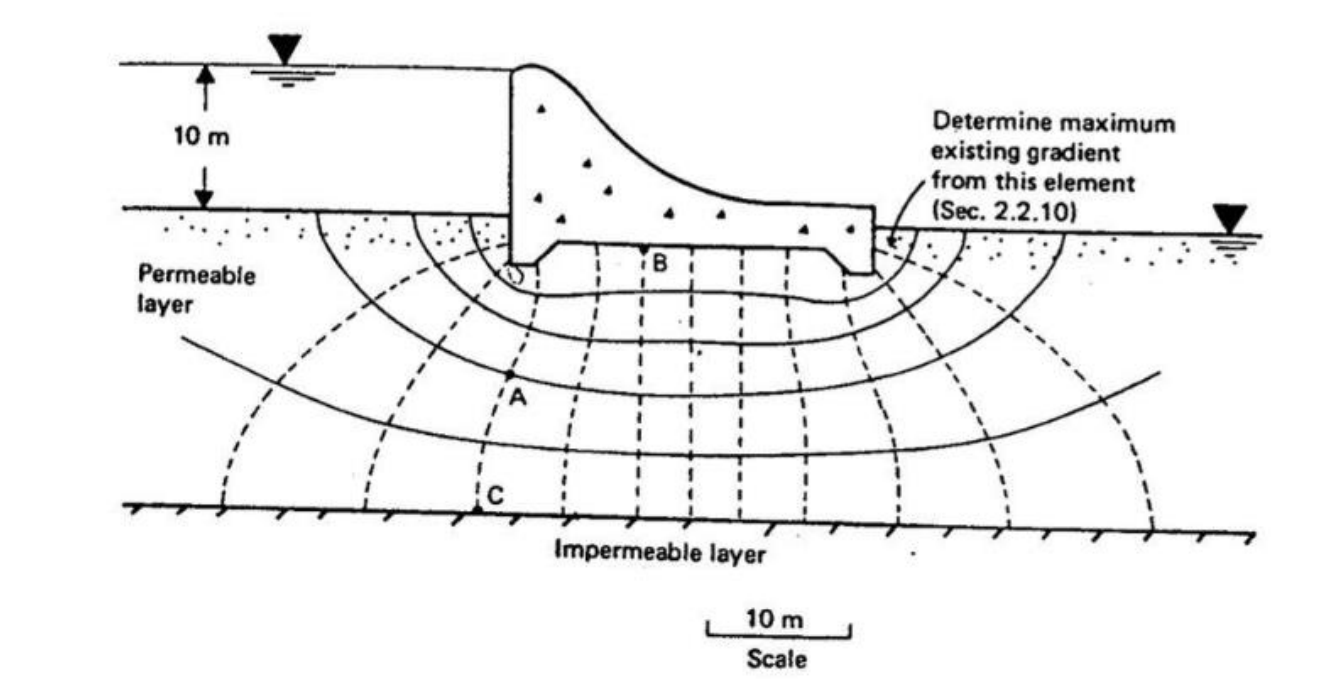
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x = -k\frac{\partial h}{\partial x} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = v_z = -k\frac{\partial h}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

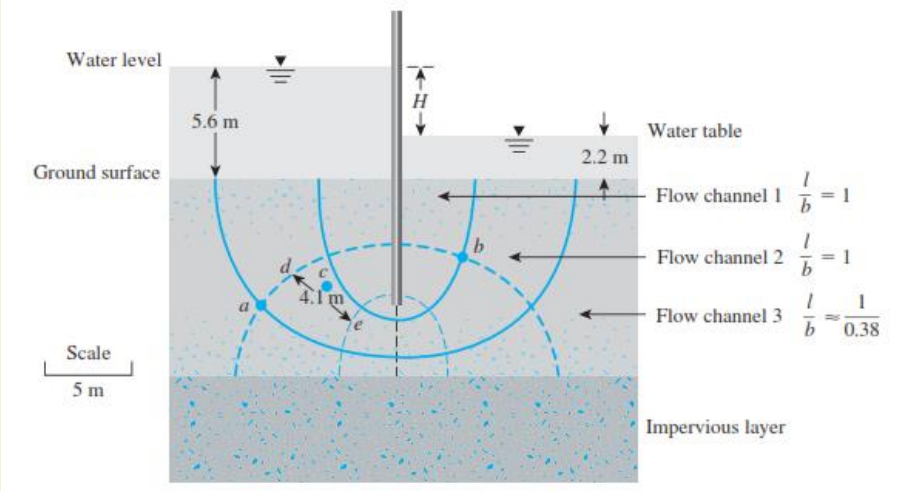
توابع (خطوط) هم پتانسیل

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = v_x = -k\frac{\partial h}{\partial x} \qquad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_z = -k\frac{\partial h}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

بکارگیری معادله لاپلاس در حرکت سیال

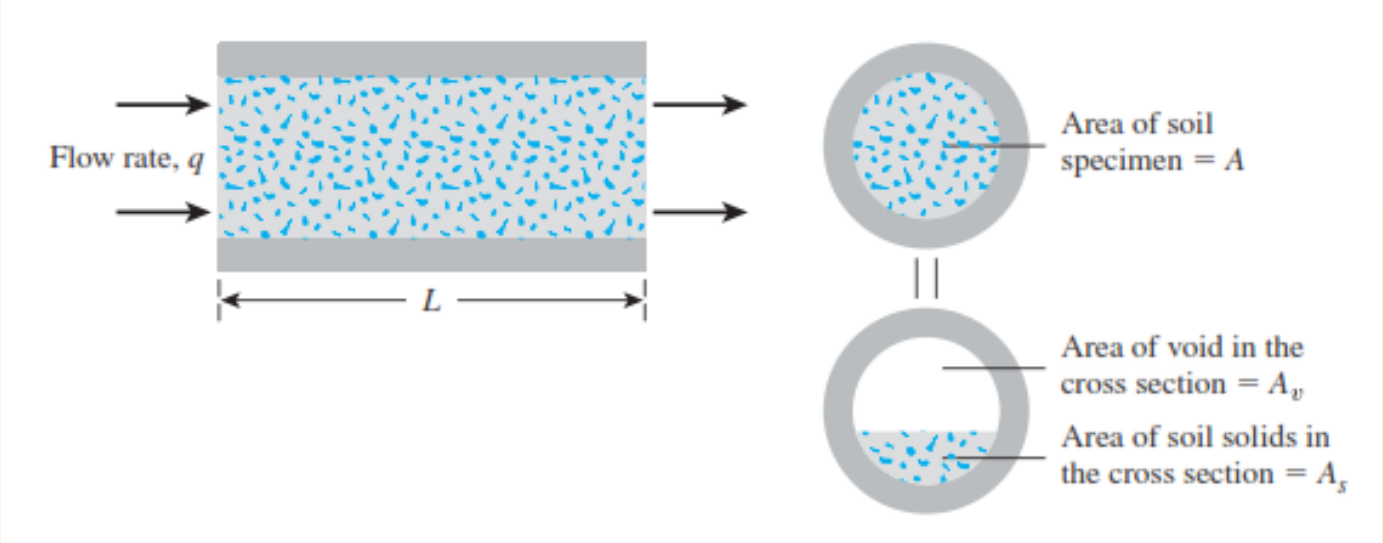
حل معادله لاپلاس در حالت دو بعدی





بکارگیری معادله لاپلاس در حرکت سیال

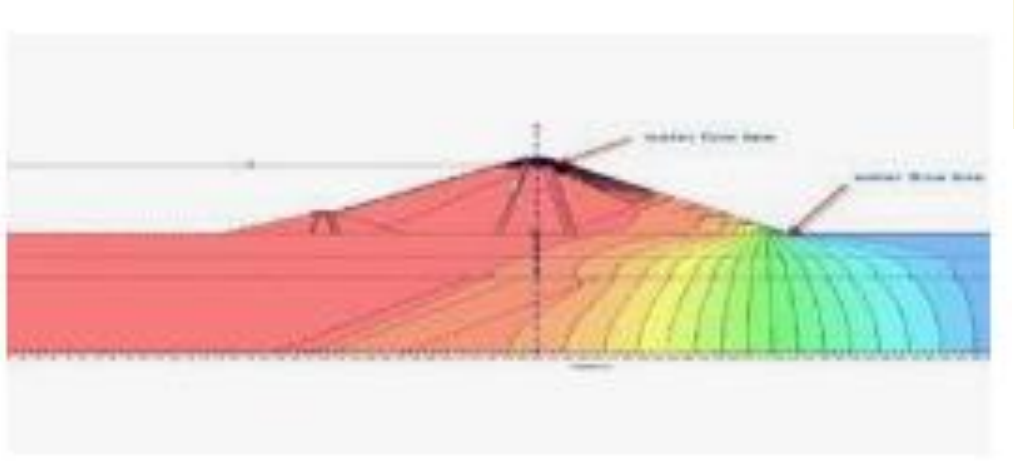
محیط متخلخل



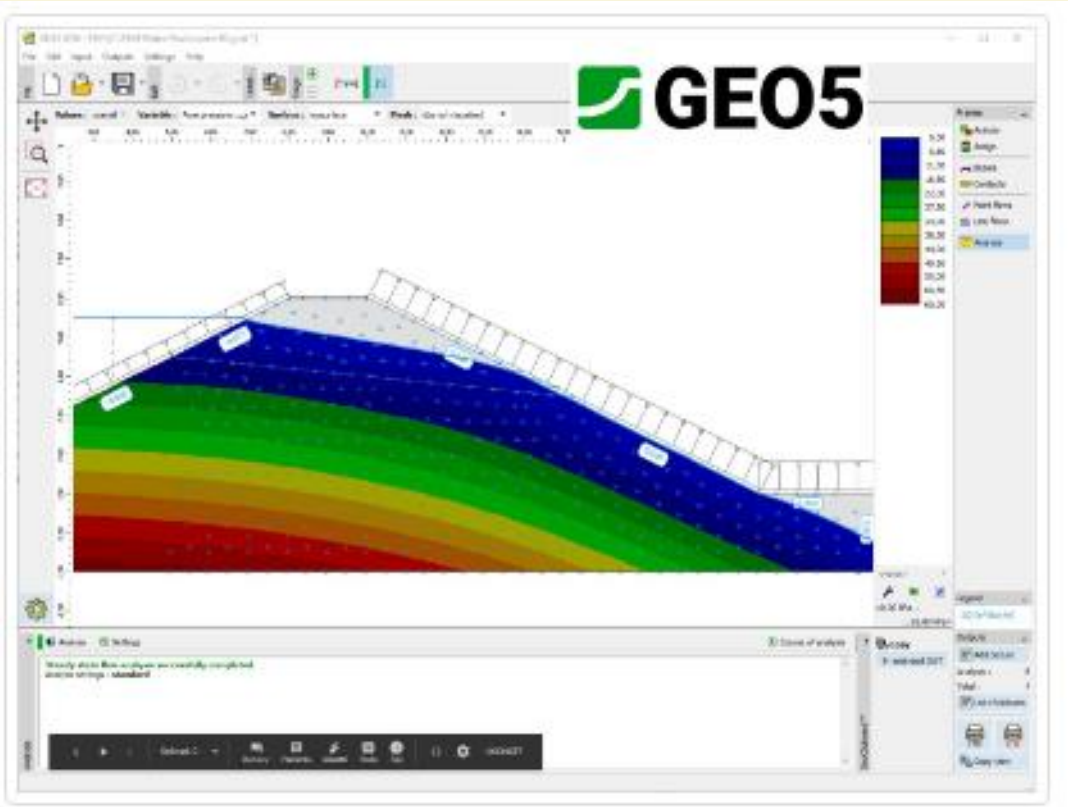
$$v_s = v\left[\frac{1+\left(\frac{V_v}{V_s}\right)}{\frac{V_v}{V_s}}\right] = v\left(\frac{1+e}{e}\right) = \frac{v}{n}$$

بکارگیری معادله لاپلاس در حرکت سیال

محیط متخلخل



نرم افزارها

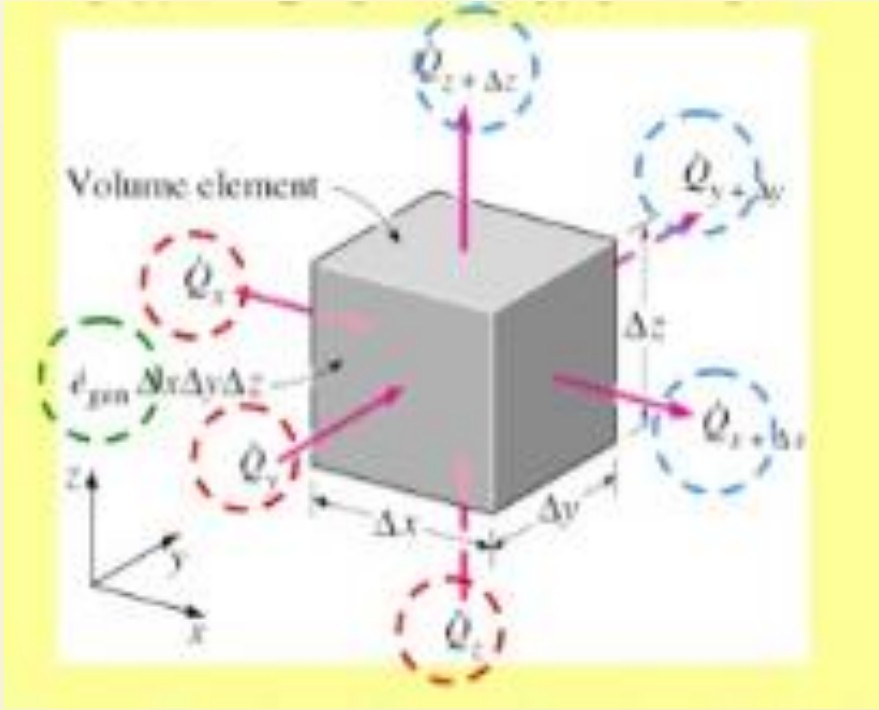


بکارگیری معادله لاپلاس در انتشار حرارت

$$Q = hA(T_2 - T_1)$$

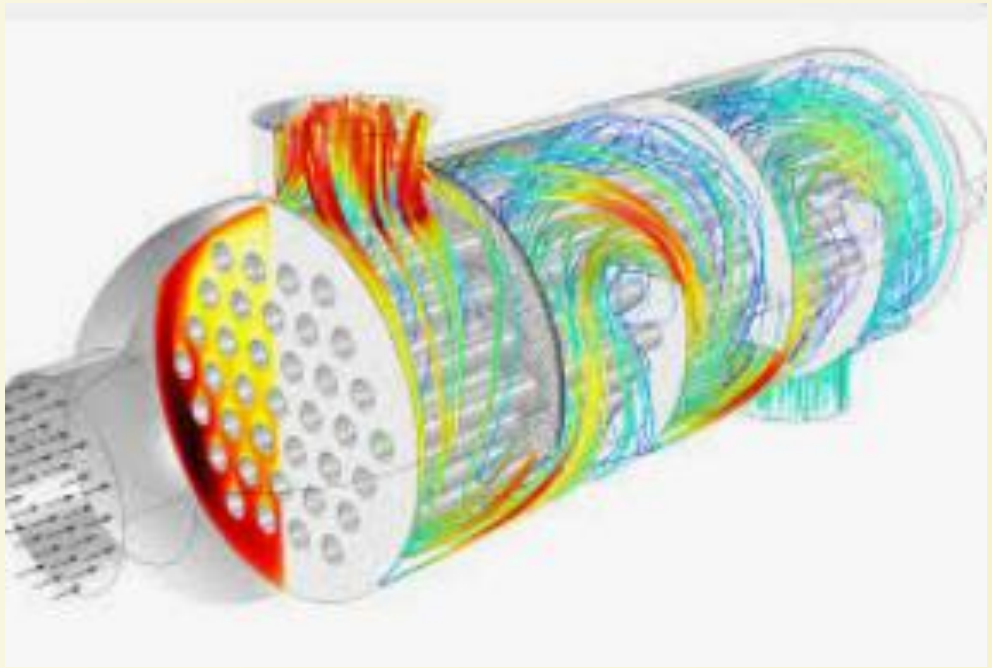
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_V = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$k\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) = 0$$



بکارگیری معادله لاپلاس در انتشار حرارت

انتقال دما توسط نرم افزاردر اگزوز ماشین



Thank You For Your Attention