سئوالات امتحاني پايان نيمسال اول سال تحصيلي ۸۹-۱۳۸۸
دانشكده فني واحد تهران جنوب

نام درس :معادلات ديفرانسيل — نام استاد: كليه اساتيد — كد درس: ۳۰۳۸ — گروه آموزشي: رياضي تاريخ امتحان: ۸۸/۱۱/۷ — مدت امتحان: ۲ساعت — نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ■ ساير موارد	
استفاده از ماشين حساب: مجاز ☐ غير مجاز ■ — به پيوست: برگه فرمول ضميمه است ☐ نيست ■	بارم سئوالات

۱ -معادلات زير را حل كنيد: ۴ نمره

i) $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$, $y(0) = 1$ حل ۲۵

ii) $y'\sin y = (1 - x\cos y)\cos y$

iii) $y = xp^2 + p^3$, $(p = y')$ خاص

۲- معادله مسيرهاي قائم (متعامد) بر دسته منحني هاي $x = ce^{y^2}$ (c ثابت دلخواه حقيقي است) را بيابيد. ۱نمره

۳- با فرض $y_1 = \sin(e^x)$ يك جواب خصوصي معادله $y'' - y' + e^{2x}y = 0$ باشد جواب عمومي معادله زير را بدست آوريد. ۲نمره

$$y'' - y' + e^{2x}y = e^{2x}$$

حل ص۲۲ جزوه

۴- تنها فرم جواب خصوصي معادله $y^{(5)} - y^{(4)} = xe^x - 2x^3$ را بروش ضرايب نامعين (بدون محاسبه ضرايب) بدست آوريد. ۱نمره

۵- جواب عمومي معادله $y''' + y' = \sin(2x)$ كه جواب خصوصي آن بروش اپراتور معكوس محاسبه شود را بيابيد. ۲نمره

۶- حاصل عبارات زير را بيابيد: ۲/۵نمره

i) $L^{-1}\left[\frac{1}{s}arctg\left(\frac{1}{s}\right)\right]$ حل ص۴۲ جزوه

ii) مطلوب است محاسبه $L(f(t))$ كه در آن :

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & \frac{\pi}{2} \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$$

حل ص۳۵ جزوه

۷- يك جواب به روش سري تواني براي معادله ديفرانسيل $2x^2y'' + x(2x+1)y' - y = 0$ را حول نقطه $x = 0$ بدست آوريد. ۲/۵نمره

۸- مسئله زير را بكمك تبديل لاپلاس حل كنيد: ۳نمره

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = \sin(t) + U(t-\pi) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

تذكر: كار كلاسي و ميان ترم جمعا ۲ نمره

موفق وپيروز باشيد
گروه رياضي

به نام خدا

سئوالات امتحاني پايان نيمسال دوم سال تحصيلي ۹۰-۱۳۸۹
دانشكده فني واحد تهران جنوب

نام درس :معادلات ديفرانسيل | نام استاد: كليه اساتيد | كد درس: ۳۰۳۸ | گروه آموزشی: ریاضی

تاریخ امتحان: ۹۰/۴/۲۳ | مدت امتحان: ۲ساعت | نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ■ سایر موارد

استفاده از ماشین حساب: مجاز ☐ غیر مجاز ■ | به پیوست: برگه فرمول ☐ ضمیمه اینک ☐ پیوست ■

بارم سئوالات

۱- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید: (۳ نمره)

$$(2xy + 2x^2y^3)y' = 1 \qquad (a$$

$$y = 2xy' + \frac{1}{y'^2} \qquad (b$$

انتگرال ساز

۲- معادله دیفرانسیل $2sin(y^2)dx + xycos(y^2)dy = 0$ دارای عامل انتگرال ساز به صورت تابعی از x می باشد. جواب عمومی آن را بیابید. (۱/۵ نمره)

۳- معادله دیفرانسیل دسته منحنی های قائم بر دسته منحنی $x^2 + y^2 = 2cx$ را بیابید. (۱/۵ نمره)

* در هیچ یک از حالات فصل دوم نمی گنجد؟ پس باید [illegible] تغییر پارامتر [illegible]
[illegible] معادله [illegible] می شود

۴- جواب عمومی معادله $(1 - x^2)y'' + 2xy' = x^3$ را بدست آورید. قابعی (۲ نمره)

۵- جواب خصوصی معادله $y^{(4)} + 2y'' + y = sinx$ رابه کمک اپراتور معکوس مشخص کنید. تغییر پارامتر 27 جزوه (۲ نمره)

۶- معادله بازگشتی متناظر با جواب تحلیلی معادله $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$ حول $x = 0$ را بیابید. 92/10/22 (۳ نمره)

44 حل شده

۷- اگر $F(s) = L(\int_0^t \frac{cosx - e^x}{x}dx)$ باشد مقدار $F(2)$ را بدست آورید. (۲ نمره)

۸- اگر $\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = f(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ که $f(t) = \begin{cases} 1, & ۱ \le t \le ۲ \\ 0, & \text{نقاط سایر} \end{cases}$ آنگاه $L(y(t))$ را بیابید. حل شده 71 (۲ نمره)

■ کار کلاسی و میان ترم جمعا ۲ نمره

سر بلند باشید
گروه ریاضی

به نام خدا

سئوالات امتحانی پایان نیمسال اول سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰
دانشکده فنی واحد تهران جنوب

نام درس :معادلات دیفرانسیل   نام استاد: کلیه اساتید   کد درس: ۳۰۳۸   گروه آموزشی: ریاضی

تاریخ امتحان ۹۰/۱۰/۲۹   مدت امتحان: ۲ساعت   نحوه امتحان: جزوه باز □ جزوه بسته ■ سایر موارد

استفاده از ماشین حساب مجاز □ غیر مجاز ■ به پیوست برگه فرمول ضمیمه است □ نیست ■

بارم سئوالات

۱- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید: ۲ نمره

$(xy^2+yx^3)dy-2dx=0$ (a $\sqrt{1+y'^2}=xy'$ (b   معادله لاگرانژ

۲- اگر $\mu=\dfrac{5}{xy^2}$ عامل انتگرالساز معادله $(Axy-2y^2)dx+(3xy-x^2)dy=0$ باشد A را بدست آورید و سپس به ازای آن معادله را حل کنید. ۲/۵ نمره

۳- جواب عمومی معادله $yy''=2y'^2-2y'$ را بدست آورید. ۲ نمره

۴- به روش تغییر پارامتر جواب خصوصی معادله $(D^2-1)y=\dfrac{1}{(1+e^{-x})^2}$ را مشخص کنید. ۲ نمره

۵- i) ریشه های معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $x^2(x+1)y''+x(x-4)y'+4y=0$ حول $x=-1$ را بیابید. ۳ نمره

ii) اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ جواب معادله $(x^2+1)y''+xy'-4y=0$ باشد. یک جواب آن را حول $x=0$ بیابید.

۶- i) بکمک تبدیل لاپلاس نشان دهید: $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin at}{t}=\dfrac{\pi}{2}$, $(a>0)$ ۲ نمره

ii) مطلوب است محاسبه: $L^{-1}\{\dfrac{1}{s-2}\ln\left(\dfrac{s-2}{s+1}\right)\}$

۷- اگر $\begin{cases}y''+y=f(t)+t^3\sigma(t-2)\\ y(0)=0\,,\ y'(0)=1\end{cases}$ که $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<1\\ t, & t\geq 1\end{cases}$ آنگاه $y(t)$ را بیابید. ۲ نمره

۸- معادله مسیرهای قائم بر دسته منحنی $y^2=\dfrac{x^3}{c-x}$ را بدست آورید. ۱/۵ نمره

کار کلاسی و میان ترم جمعا ۲ نمره

سر بلند باشید
گروه ریاضی

اداره امتحانات

دانشکده صنایع

نیمسال دوم ۹۱-۹۰

به نام خدا

سئوالات امتحانی پایان نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰

دانشکده فنی واحد تهران جنوب

نام درس : معادلات دیفرانسیل   نام استاد: کلیه اساتید   کد درس: ۳۰۳۸   گروه آموزشی: ریاضی

۹۰/۴/۱۱ دانشکده فنی

تاریخ امتحان: ۹۱/۴/۱۱   مدت امتحان: ۲ساعت   نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ☒ سایر موارد

استفاده از ماشین حساب: مجاز ☐ غیر مجاز ☒   به پیوست: برگه فرمول ضمیمه است ☐ نیست ☒

سئوالات	بارم سئوالات
۱-- معادله مسیرهای قائم (متعامد) بر دسته منحنی های $x^2+2y=\ln(cy)$ (c ثابت دلخواه حقیقی است) را بیابید.	۲ نمره
۲- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید: i) $\frac{y}{y'}+\ln(y')=x$ (مرتبه اول ناقص) ii) $xy'=y+x^2\sec\left(\frac{y}{x}\right)$ (همگن) iii) $y'\cos y-x\sin y=x\sqrt{\sin y}$ (برنولی)	۴ نمره
۳- اگر $y_1=\sqrt{1-x}$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y''+\frac{1}{4(x-1)^2}y=0$ باشد، جواب مستقل خطی y_2 را بیابید. $f(x)$	۲ نمره
٤- اگر جواب معادله همگن متناظر با معادله دیفرانسیل $(1-x)y''+xy'-y=2(x-1)^2.e^{-x}$ برابر x و e^x باشند، جواب خصوصی معادله را بیابید. $f(x)=2(1-x)e^{-x}$	۲ نمره
٥- نشان دهید $x_0=0$ نقطه غیر عادی معادله دیفرانسیل $4xy''+2(1-x)y'-y=0$ است. سپس یک جواب آن را به روش سری توانی حول $x_0=0$ بیابید.	۳ نمره
٦- اگر $F(s)=L\left(\int_0^x \frac{\cos t-e^t}{t}dt\right)$ باشد، مقدار $F(2)$ را بیابید.	۲ نمره
۷- معادله انتگرالی $y'-e^t\int_0^t e^{-u}y''(u)du=y+u_1(t)$ را با شرط $y'(0)=y(0)=0$ حل کنید.	۳ نمره

✓ کار کلاسی و میان ترم جمعا ۲ نمره

موفق وپیروز باشید

گروه ریاضی

به نام خدا

سئوالات امتحاني پايان نيمسال تابستان سال تحصيلي ۹۱-۱۳۹۰

دانشكده فني واحد تهران جنوب

	نام درس: معادلات ديفرانسيل نام استاد: كليه اساتيد كد درس: ۳۰۳۸ گروه آموزشي: رياضي
	تاريخ امتحان: ۹۱/۶/۱۲ مدت امتحان: ۲ساعت نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ☒ ساير موارد
بارم سئوالات	استفاده از ماشين حساب: مجاز ☐ غير مجاز ☒ به پيوست: برگه فرمول ضميمه است ☐ نيست ☒

۵ نمره — ۱ - هر یک از معادلات مرتبه اول زیر را حل کنید. (مورد الف و ب ۱,۵ نمره مورد ج ۲ نمره)

الف) $y' = \frac{y}{x} + 2e^{\frac{-y}{x}}$ همگن

ب) $y' = y - xy^3 e^{-2x}$ برنولی نوع ۱

ج) $y = -xy' + (y')^2$ حل کردم P در y و x معادلات کامل

۴ نمره — ۲ - هر یک از معادلات مرتبه دوم زیر را حل کنید. (هر مورد ۲ نمره)

الف) $y'' + 4y = \sec x \tan x$ ناهمگن با ضرایب ثابت مرتبه دو — تغییر پارامتر — حل در جزوه

ب) $x^2y'' + xy' - y = 16x^3$ حل کردم با ضرایب x مرتبه دو اویلر

به ضرایب مرتبه دوم که عدد نیست

۱ نمره — ۳ - اگر $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ یک جواب خصوصی معادله $xy'' + 2y' + xy = 0$ باشد جواب عمومی آن را بیابید. مکاتب — با داده شده

۱ نمره — ۴ - لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید. حل کردم

$F(s) = \ln\left(\frac{s^2+1}{s(s+1)}\right)$ حل ۴۱

۴ نمره — ۵ - هر یک از معادلات زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. (هر مورد ۲ نمره)

الف) $y = 1 - \int_0^t (t-u)y(u)\,du$

ب) $\begin{cases} y'' - y' = e^{2x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

۳ نمره — ۶ - معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری توانی حول $x = 0$ حل کنید.

$y'' + 3xy' + 3y = 0$

نكته: كار كلاسي و ميان ترم جمعا ۲ نمره

موفق وپيروز باشيد

گروه رياضي

اداره امتحانات
دانشکده مهندسی صنایع
نیمسال اول ۹۲ - ۹۱

به نام خدا

سئوالات امتحاني پايان نيمسال اول سال تحصيلي 92-1391

مشترک با دانشکده فنی

	نام درس : معادلات ديفرانسيل — نام استاد : اساتيد گروه رياضي — كد درس : 3038 — گروه آموزشي : رياضی
	تاريخ امتحان : 1391/11/8 — مدت امتحان : 2ساعت — نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ■ — سایر موارد
بارم سئوالات	استفاده از ماشين حساب: مجاز ☐ غير مجاز ■ — به پيوست: برگه فرمول ضميمه است ☐ نيست ■

۱.معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

1.5 نمره — a) $x^2y' = 3\left(x^2+y^2\right)\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)+xy$

2 نمره — b) $y' = \dfrac{2x}{x^2\cos y+\sin(2y)}$ حل کردم

1.5 نمره — c) $y = 2xy' + \dfrac{1}{(y')^2}$ حل کردم — مرتبه اول ناقص

1.5 نمره — d) $x^2y''-2xy'+2y = x^4$ حل کردم

1.5 نمره — e) $y''' - y = e^{2x}$ ص 22 جزوه

2 نمره — ۲.اگر $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ یک جواب خصوصی معادله همگن $xy''+2y'+xy=0$ باشد، جواب عمومی معادله غیرهمگن $xy''+2y'+xy=1$ را بیابید. غیرهمگن جواب خصوصی هم بخواهد. صفحه 24 جزوه

1.5 نمره — ۳. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\int_0^t u^2e^{-2u}\sin(3u)du$ را بیابید.

۴. معادلات زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

1.5 نمره — a) $y = 1-\int_0^t (t-u)y(u)du$ حل ص 45 جزوه

2 نمره — b) $\begin{cases} y''-y=e^{2x}+x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ حل کردم

3 نمره — ۵. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+3xy'+3y=0$ را به روش سری توانی حول $x_0=0$ به دست آورید.

نکته: کارکلاسی ۲ نمره

موفق وپیروز باشید

نمونه سوالات معادلات استاد طاهری

سئوالات امتحانی پایان نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱

دانشکده صنایع واحد تهران جنوب

نام درس : معادلات دیفرانسیل　　نام استاد : اساتید گروه ریاضی　　کد درس : ۳۰۳۸　　گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ امتحان : ۱۳۹۲/۳/۱۲　　مدت امتحان : ۲ساعت　　نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ☒ سایر موارد

استفاده از ماشین حساب: مجاز ☐ غیر مجاز ☒　　به پیوست: برگه فرمول ضمیمه است ☐ نیست ☒

بارم سئوالات	
۲ نمره	۱. معادلات دیفرانسیل همگن زیر را حل کنید. $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$
۲ نمره	۲. α و β را بیابید به طوریکه $\mu=x^\alpha y^\beta$ عامل انتگرالساز معادله دیفرانسیل زیر باشد سپس معادله را حل کنید. $y(4x+3y^3)\,dx+x(2x+5y^3)\,dy=0$
۲ نمره	۳. با فرض $y'=p$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید. $y=2px+\arctan(xp^2)$ حل نکردم در تیپ اول خاص
	۴. جواب عمومی هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.
op ۲ نمره	الف) $y''+3y'+2y=\sinh x$ ص ۲۲ جزوه
۲ نمره	ب) $x^2y''+xy'+y=5$ حل کردم
۲ نمره	۵. یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید. $y'''+y''+y'+y=3e^{-x}+4\sin x$
	۶. هر یک از موارد زیر را بیابید.
۲ نمره	الف) $L\left(t^2e^t\int_0^t\frac{\sin u}{u}du\right)$ حل ص ۴۲
۲ نمره	ب) $L^{-1}\left(e^{-\pi s}\ln\left(\sqrt[3]{\frac{s+a}{s+b}}\right)\right)$ حل ص ۴۱
۲ نمره	۷. معادله دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. $\begin{cases}y''+4y=\sin t+u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi)\\ y(0)=y'(0)=0\end{cases}$ حل جزوه ص ۵۴
	کارکلاسی ۲نمره　　　موفق وپیروز باشید

اداره امتحانات
دانشکده مهندسی صنایع
نیمسال اول ۹۳ - ۹۲

به نام خدا

سئوالات امتحاني پايان نيمسال اول سال تحصيلي 93-1392

دانشکده صنایع واحد تهران جنوب

نام درس : معادلات دیفرانسیل   نام استاد : اساتيد گروه رياضي   كد درس : 3038   گروه آموزشي : رياضي

تاریخ امتحان : 1392/10/22   مدت امتحان : 2ساعت   نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ☒   سایر موارد

استفاده از ماشین حساب: مجاز ☐ غیر مجاز ☒   به پیوست: برگه فرمول ضمیمه است ☐ نیست ☒

بارم سئوالات

۱-معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

2 نمره — الف) $y' = \dfrac{x^2 - 2y^2}{xy}$

2 نمره — ب) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{x-1}y^2$

2 نمره — ج) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 + 1$

2 نمره — د) $y''' + y'' + y' + y = e^{-x}$

2 نمره — 2-ابتدا α و β را بیابید به طوریکه $\mu = x^\alpha y^\beta$ عامل انتگرالساز معادله دیفرانسیل زیر باشد سپس معادله را حل کنید.

$y(y^2+1)dx + x(y^2-1)dy = 0$

1 نمره — 3- هرگاه $y_1(x) = x$ يك جواب خصوصي معادله $y'' + 2xy' - 2y = 0$ باشد جواب عمومي آنرا بيابيد.

4- مطلوب است محاسبه هر يك از موارد زير:

1 نمره — الف) $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+5s-1}\right)$

1 نمره — ب) $L\left(\int_0^t e^{-2u}\cos(3u)du\right)$

2 نمره — 5- معادله زیر را به کمك تبدیل لاپلاس حل کنید.

$y'' + 4y = 2t, \qquad y(0) = y'(0) = 0$

3 نمره — 6- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + 3xy' + 3y = 0$ را به روش سری توانی حول $x_0 = 0$ به دست آورید.

موفق وپیروز باشید

نکته: کارکلاسی ۲نمره

وحید عباسی

$(x^2+1)y''+xy'-4y=0$ ← حول $x=0$ 90/10/29

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, $y'=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}$, $y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}$ جایگذاری

$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$ ضریب سیگما را به داخل می آوریم :

$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_n x^n=0$ باید توان تمام x ها n باشد

$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^n+\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_n x^n=0$ حالا پایین سیگما ها باید بزرگترین عدد n باشد.

$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n+2a_2\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^n+a_1+\sum_{n=2}^{\infty}n a_n x^n-4a_0+4a_1+\sum_{n=2}^{\infty}4a_n x^n=0$ یکی کردن سیگماها :

$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n(n-1)+(n+2)(n+1)+n+4\right]a_n x^n+2a_2+a_1+4a_0+4a_1=0$ نوشتن معادله بازگشتی

$2x^2y''+x(2x+1)y'-y=0 \rightarrow$ حل در $x=0$ 88/11/17

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \;,\; y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \;,\; y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ جایگذاری

$2x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x(2x+1)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$ جهت سیگماها به داخل می‌آوریم

$x(2x)+\sum_{n=2}n(n-1)a_nx^n\cdot\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}}_{2a_2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n\cdot\underbrace{\sum_{n=1}2na_nx}_{2a_1}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+2a_2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+2a_1\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+2a_2\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n\cdot 2a_1+\sum_{n=2}^{\infty}2na_nx^n+a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n-a_0+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=0$

یکی کردن سیگماها :

$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)a_n\cdot(n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n+2na_n+na_n+a_n\right]x^n+2a_2+a_1+2a_1+a_1+a_0=0$

نوشتن معادله بازگشتی

وحید عباسی

92/10/22

$y'' + 3xy' + 3y = 0 \longrightarrow$ حول $x=0$.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 3 \sum a_n x^n = 0$$ پشت سیگماها را به داخل می‌بریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n x^n = 0$$ توان تمام x ها باید یکی باشد

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \underset{3a_1}{\sum_{n=1}^{\infty}} 3n a_n x^n + \underset{3a_0}{\sum_{n=0}^{\infty}} 3 a_n x^n = 0$$

$$2a_2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 3a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + 3a_0 \sum_{n=1}^{\infty} 3 a_n x^n = 0$$ یکی کردن سیگماها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + 3n a_n + 3a_n \right] x^n + 2a_2 + 3a_1 + 3a_0 = 0$$

نوشتن معادله بازگشتی:

$$4xy'' + 2(1-x)y' - y = 0 \longrightarrow \text{dar } x=0$$ 91, 4, 11

جایگذاری می‌کنیم :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;,\; y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \;,\; y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

ضریب سیگما را داخل می‌آوریم :

$$4x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\cancel{2a_2 + \sum_{n=2}^{\infty} 4(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 2a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2n a_n x^n - 2a_1 \sum_{n=2}^{\infty}}$$

حالا بین سیگماها یکی باشه.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - 2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[4(n+2)(n+1) a_{n+1} + 2n a_n + 2n a_n + a_n \right] x^n + 2a_2 + 2a_0 - 2a_1 + a_0 = 0$$

نوشتن ~~جمله~~ رابطه بازگشتی :

وحید عباسی

$y''+3xy'+3y=0 \longrightarrow$ حول $x=0$ 92/10/22

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \ , \ y'=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1} \ , \ y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}$$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}+3\sum a_n x^n=0$$ پشت سیگماها را به داخل می‌بریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}3n a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}3a_n x^n=0$$ توان تمام x ها باید یکی باشد

$$2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}3n a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}3a_n x^n=0$$

$3a_1$ $3a_0$

$$2a_2\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+3a_1+\sum_{n=1}^{\infty}3n a_n x^n+3a_0\sum_{n=1}^{\infty}3a_n x^n=0$$ یکی کردن سیگماها:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+3n a_n+3a_n\right]x^n+2a_2+3a_1+3a_0=0$$

نوشتن معادله بازگشتی:

جواب تمرینات کلاس:

۲ / ۱۱ / 88.

$$y = xp^2 + p^3 \quad , (y' = p)$$

$$y = xy'^2 + y'^3 = x\underbrace{p^2}_{f} + \underbrace{p^3}_{g} \to x' - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)} \Rightarrow x' - \frac{2p}{p - p^2}x = \frac{3p^2}{p - p^2}$$

$$x' + \frac{2}{p-1}x = \frac{3p}{1-p} \to \mu_{(p)} = e^{\int \frac{2}{p-1}dp} = e^{2\ln(p-1)} \to x = \frac{1}{\mu_{(p)}}\left(\int \mu_{(p)} \cdot q_{(p)}\, dp + c\right)$$

$$= e^{\ln(p-1)^2} = (p-1)^2 \to x = \frac{1}{\mu(p)}\left(\int \cancelto{1-p}{(p-1)^2}\,\frac{3p}{1-p}\, dp + c\right.$$

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(\int 3p - 3p^2\, dp + c\right) = \frac{1}{(p-1)^2}\left(\frac{3p^2}{2} - p^3 + c\right)$$

$$\to \begin{cases} y = xp^2 + p^3 \\ x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(\frac{3p^2}{2} - p^3 + c\right) \end{cases} \to \begin{cases} y = \frac{p^2}{(p-1)^2}\left(\frac{3p^2}{2} - p^4 + c\right) \\ x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(\frac{3p^2}{2} - p^3 + c\right) \end{cases}$$ جواب پارامتری

4) ب) $L\left[\int_0^t e^{-2u}\cos(3u)\,du\right)$

$$L\left[\int_0^t e^{-2a}\cos 3a\,da\right]$$

① لاپلاس $\rightarrow \frac{s}{s^2+9}$

② s ها را با (s+2) عوض $\rightarrow \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$

③ $1/s$ ضرب کن

$$\frac{1}{s}\times\frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

5) $y'' + 4y = 2t \qquad , y(0) = y'(0) = 0$

$$L(y'') + 4L(y) = 2L(t)$$

$$s^2 L(y) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + 4L(y) = \frac{2}{s^2}$$

$$L(y)(s^2+4) = \frac{2}{s^2}$$

$$L(y) = \frac{2}{s^2(s^2+4)} \rightarrow y = L^{-1}\left[\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1/2}{s^2} + \frac{-1/2}{s^2+4}\right]$$

$\frac{1/2}{s^2} \rightarrow 1/2 \times t$; $\frac{-1/2}{s^2+4} \rightarrow -1/2 \times 1/2 \sin 2t$

$$\boxed{y = 1/2\left(t - 1/2 \sin 2t\right)}$$

92 , 10 , 22

1) تغییر متغیر $y = vx$ و $y' = v'x + v$ همگن الف) $y' = \dfrac{x^2 - 2y^2}{xy}$

$$v'x + v = \frac{x^2 - 2v^2x^2}{x(vx)} \rightarrow v'x + v = \frac{1-2v^2}{v} - v \rightarrow v'x + v = \frac{1-2v^2}{v} \rightarrow$$

$$v'x = \frac{1-2v^2}{v} - v \rightarrow \frac{1-3v^2}{v} \rightarrow v'x = \frac{1-3v^2}{v} \rightarrow \frac{dv}{dx}x = \frac{1-3v^2}{v} \rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{v\,dv}{1-3v^2} \rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{v\,dv}{1-3v^2} \rightarrow \ln x = -\tfrac{1}{6}\ln(1-3v^2) + c \rightarrow$$

$$\ln x = \tfrac{1}{6}\ln\left(1 - \frac{3y^2}{x^2}\right) + c$$

ب) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{x-1}y^2$ برنولی $\rightarrow$ ضرب y^{-2}

$$y^{-2}y' + \frac{2}{x}y' = \frac{1}{x-1} \quad \begin{cases} u = y^{-1} \\ u' = -y^{-2}y' \\ y^{-2}y' = \dfrac{u'}{-1} \end{cases} \Longrightarrow \frac{u'}{-1} + \frac{2}{x}u = \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\text{ضرب } -1}$$

$$u' - \frac{2}{x}u = -\frac{1}{x-1} \rightarrow u\,e^{\cancel{-}\int \cancel{-}\frac{2}{x}dx}\left[\int e^{-\int \frac{2}{x}dx} \cdot \frac{-1}{x-1}\,dx + c\right]$$

$$u = x^2\left[\int \frac{-1}{x^2(x-1)}\,dx + c\right] \rightarrow u = x^2\left[\int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{c}{x-1}\right)dx + c\right]$$

$$\overset{1/y}{\cancel{u}} = x^2\left[A\ln x - \frac{B}{x} + c\ln(x-1) + c\right]$$

ج) $\underline{x^2}y'' - 2\underline{x}y' + 2y = x^3 + 1$ اویلر

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (-2-1) + 2y = e^{3z} + 1 \begin{cases} y_h = \text{جواب عمومی معادله همگن} \\ y_p = \text{ضرایب نامعین} \end{cases}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \rightarrow (t-2)(t-1) = 0 \rightarrow t_1 = 2,\ t_2 = 1$$

ادامه پشت صفحه

$y_h = c_1 e^{2z} + c_2 e^{z}$ احاطهر جواب ج

$y_{p_1} = z^m e^{3z} . A \rightarrow y_{p_1} = e^{3z} . A \quad \rightarrow m=0$

$y_{p_2} = z^m . B \quad , y_p = y_{p_1} + y_{p_2} \quad , \quad y = y_h + y_p$

7) $y''' + y'' + y' + y = e^{-x} \left\langle \begin{array}{l} y_h = \text{جواب عمومی معادله همگن} \\ y_p = \text{جواب خصوصی} \end{array} \right.$

$t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \rightarrow t^2(t+1) + (t+1) = 0 \rightarrow t_1 = -1 , t_2 = -i , t_3 = +i$

$y_h = c_1 e^{-x} + e^{x}(A\cos x + B\sin x)$

$y_p = x^{+1} e^{-x} \rightarrow y_p = x^{+1} e^{-x} . D \rightarrow y = y_h + y_p$

$m = +1$

4) الف) $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-Ms}}{s^2+5s-1}\right)$

$L^{-1}\left[e^{-Ms} \times \dfrac{1}{s^2+5s-1} \right] \rightarrow +\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$

② $U_M(t)$ بگذار و t ها را با t-M عوض کن

① لاپلاس معکوس میگیریم

$L \rightarrow \dfrac{1}{(s+\frac{5}{2})^2 - \frac{29}{4}}$

$e^{-\frac{5}{2}t}$ s جدید و ضرب در

$\dfrac{2}{\sqrt{29}} \sinh \dfrac{\sqrt{29}}{2} \times e^{-\frac{5}{2}t}$

$U_M(t) \times \dfrac{2}{\sqrt{29}} \sinh \dfrac{\sqrt{29}}{2}(t-M) \times e^{-\frac{5}{2}(t-M)}$

1) تغییر متغیر $y=vx \,,\; dy=vdx+xdv$ همگن $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$

$(x^2-x(vx)+vx)^2dx-x(vx)(vdx+xdv)=0$

$x^2(1-v+v^2)dx-x^2v(vdx+xdv)=0 \to (1-v+v^2)dx-v^2dx+vxdx=0 \to$

$\to (1-v)dx+vxdv=0 \to \frac{dv}{dx}=\frac{v}{1-v}x \to \int\frac{1-v}{v}dx=\int xdv \to \boxed{\ln|v|-v=\frac{x^2}{2}+c}$

2)

جدید $P=x^\alpha y^\beta y(4x+3y^3)=4x^{\alpha+1}y^{\beta+1}+3x^\alpha y^{\beta+4}$

جدید $Q=x^\alpha y^\beta x(2x+5y^3)=2x^{\alpha+1}y^{\beta}+5x^{\alpha+1}y^{\beta+3}$

$\frac{\partial P}{\partial y}=4(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta}+3(\beta+4)x^{\alpha}y^{\beta+3}$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta}+5(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+3}$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \to \begin{cases}4(\beta+1)=2(\alpha+2)\\ 3(\beta+4)=5(\alpha+1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=1\\ \alpha=2\end{cases}$

مقادیر α و β را در P و Q جدید جایگذاری می‌کنیم.

3) مرتبه اول ناصن $y=2px+\arctan(xp^2)$

مشتق نسبت به x $\quad p=2p+2xp'+\frac{p^2+2xpp'}{1+x^2p^4} \to \left(1+\frac{p}{1+x^2p^4}\right)(p+2xp')=0$

$p'+\frac{1}{2x}p=0 \to xp^2=c \to \begin{cases}xp^2=c\\ y=2xp+\arctan(xp^2)\end{cases}$ فرم جواب عمومی

$\begin{cases}1+\frac{p}{1+x^2p^4}=0\\ y=2xp+\arctan(xp^2)\end{cases}$ فرم جواب خصوصی

4)

الف) $y'' + 3y' + 2y = \sinh x$ (4

$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = 1/2\, e^{x} - 1/2\, e^{-x} \rightarrow y'' + 3y' + 2y = 0 \rightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \rightarrow (t+1)(t+2) = 0$

$t_1 = -1 \ , \ t_2 = -2 \rightarrow y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

$y_{p_1} = \underset{m=0}{x^m} e^{x} \cdot A \rightarrow y_{p_1} = e^{x} \cdot A \quad , y_{p_2} = \underset{m=1}{x^m} e^{-x} B \rightarrow y_{p_2} = x e^{-x} \cdot B$

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} \quad , y = y_h + y_p$

ب) $x^2 y'' + x y' + y = 5$ اویلر

$\frac{d^2y}{dz^2} + (-1-1)\frac{dy}{dz} + y = 5 \rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + y = 5 \rightarrow t^2 + 1 = 0 \rightarrow t = \pm i$

$y_h = c_1 \cos z + c_2 \sin z \quad , y_p = \underset{m=0}{z^m} \cdot A \rightarrow y_{p_1} = A \rightarrow y = y_h + y_p$

12 تیر 92

7) $\begin{cases} y'' + 4y = \sin t + u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

$$L(y'') + 4L(y) = L(\sin t) + L(\underbrace{u_{2\pi}}_{\downarrow\, e^{-2\pi s}}(t)\, \sin(t-2\pi))$$

t را با 2π جمع کن و از sint
لاپلاس بگیریم

$$\frac{1}{s^2+1}$$

$$s^2L(y) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + 4L(y) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

$$L(y)(s^2+4) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} \longrightarrow L(y) = \frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)} + e^{-2\pi s}\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{-1/3}{s^2+4} + \frac{+1/3}{s^2+1}\right] + L^{-1}\left[e^{-2\pi s}\underbrace{\left(\frac{1/3}{s^2+1} - \frac{1/3}{s^2+4}\right)}_{4}\right]$$

1: $\boxed{-1/3 \times 1/2 \sin 2t}$

2: $\boxed{+1/3 \sin t}$

3: $\boxed{u_{2\pi}(t)}$

4: لاپلاس معکوس بعد t ها را با $(t-2\pi)$ عوض می کنیم.

لاپلاس معکوس

$\hookrightarrow 1/3 \sin t - 1/6 \sin 2t$

جای t را با $(t-2\pi)$ عوض

4 $\boxed{1/3 \sin(t-2\pi) - 1/6 \sin 2(t-2\pi)}$

$$y = 1 + 2 + 3 \times 4$$

6) $L\left[t^2 e^t \int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right]$

$$L\left[t^2 \quad e^t \quad \int_0^t \quad \frac{1}{u} \quad \sin u\,du\right]$$

① لاپلاس $\frac{1}{s^2+1}$

② $\int_s^\infty$ → $\int_s^\infty \frac{1}{s^2+1} = \text{Arctan}\, s\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(s)$

③ ضرب $\frac{1}{s}$ → $\frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(s)\right)$

④ s را با $(s-1)$ عوض کن → $\frac{1}{s-1}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(s-1)\right) = A$

⑤ دوبار مشتق بگیر → A''

ب) $L^{-1}\left(e^{-\pi s} \ln\left(\sqrt[3]{\frac{s+a}{s+b}}\right)\right)$

$$L^{-1}\left[e^{-\pi s} \quad \ln \sqrt[3]{\frac{s+a}{s+b}}\right]$$

لاپلاس → $\frac{1}{3}\left[\ln(s+a) - \ln(s+b)\right]$

① مشتق → $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right)$

② لاپلاس معکوس → $\frac{1}{3}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$

③ تقسیم بر $-t$ → $\frac{1}{3}\left[\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{-t}\right]$

④ $u_\pi(t)$ بگذار و جای t را با $t-\pi$ عوض کن

→ $u_\pi(t)\,\frac{1}{3}\left(\frac{e^{-a(t-\pi)} - e^{-b(t-\pi)}}{-(t-\pi)}\right)$

12 تیر 92

7) $\begin{cases} y'' + 4y = \sin t + u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

$$L(y'') + 4L(y) = L(\sin t) + L(u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi))$$

$u_{2\pi} \to e^{-2\pi s}$

t را با 2π جمع کن و از sint لاپلاس بگیره

$\to \dfrac{1}{s^2+1}$

$$s^2L(y) - \cancel{s\,y(0)} - \cancel{y'(0)} + 4L(y) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

$$L(y)(s^2+4) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} \longrightarrow L(y) = \frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)} + e^{-2\pi s}\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{-1/3}{s^2+4} + \frac{+1/3}{s^2+1}\right] + L^{-1}\left[e^{-2\pi s}\underbrace{\left(\frac{1/3}{s^2+1} - \frac{1/3}{s^2+4}\right)}_{4}\right]$$

1) $\boxed{-1/3 \times 1/2 \sin 2t}$

2) $\boxed{+1/3 \sin t}$

3) $\boxed{u_{2\pi}(t)}$

4) لاپلاس معکوس جای t ها را با (t-2π) عوض می کنیم.

لاپلاس معکوس

$\to 1/3 \sin t - 1/6 \sin 2t$

جای t را با (t-2π) عوض

4) $\boxed{1/3 \sin(t-2\pi) - 1/6 \sin 2(t-2\pi)}$

$$y = 1 + 2 + 3 \times 4$$

12 آذر 92

6) $L\left[t^2 e^t \int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right]$

$$L\left[\; t^2 \quad e^t \quad \int_0^t \quad \frac{1}{u} \quad \sin u\, du \;\right]$$

① لاپلاس $\frac{1}{s^2+1}$

② $\int_s^\infty$

$\int_s^\infty \frac{1}{s^2+1} \to \text{Arctan}\, s\Big|_s^\infty \to \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(s)$

③ ضرب $\frac{1}{s}$

$\to \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(s)\right)$

④ s را با (s-1) عوض کن

$\to \frac{1}{s-1}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(s-1)\right) = A$

⑤ دوبار مشتق بگیر $= A''$

$\to A''$

ب) $L^{-1}\left(e^{-\pi s} \ln\left(\sqrt[3]{\frac{s+a}{s+b}}\right)\right)$

$$L^{-1}\left[\; e^{-\pi s} \quad \ln \sqrt[3]{\frac{s+a}{s+b}} \;\right]$$

لاپلاس $\to \frac{1}{3}\left[\ln(s+a) - \ln(s+b)\right]$

① مشتق $\to \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right)$

② لاپلاس معکوس $\to \frac{1}{3}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$

③ تقسیم بر -t $\to \frac{1}{3}\left[\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{-t}\right]$

④ $u_\pi(t)$ بگذار و جای t را با t-π عوض کن

$\to u_\pi(t)\, \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-a(t-\pi)} - e^{-b(t-\pi)}}{-(t-\pi)}\right)$

(2

$y_1 = \frac{\sin x}{x}$, $\frac{xy''}{x} + \frac{2y'}{x} + \frac{xy}{x} = 0 \xrightarrow{\text{همگن}} y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$?

$$y_2 = u(x)\, y_1 \;,\; u(x) = \int \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \cdot e^{-\int \frac{2}{x}dx}\, dx = \int \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot e^{-2\ln x}\, dx \qquad x^{-2}$$

$$\to = \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = \int (1+\cot^2 x)\, dx = -\cot x$$

$$y_2 = u(x)\, y_1 = -\cot x \cdot \frac{\sin x}{x} = -\frac{\cos x}{x}$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \frac{\sin x}{x} - c_2 \frac{\cos x}{x}$$ تا اینجا ① نمره

$xy'' + 2y' + xy = 1 \left\langle \begin{array}{l} y_h \\ y_p \text{ تغییر پارامتر} \end{array} \right.$ $\xrightarrow{\text{تقسیم بر } x} y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}\; f(x)$

$$w = \begin{vmatrix} \frac{\sin x}{x} & -\frac{\cos x}{x} \\ \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \frac{x\sin x + \cos x}{x^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\cos x}{x}\right)^2 + \frac{\sin x \cos x}{x^3} - \frac{\sin x \cos x}{x^3}$$

$$\to = \frac{1}{x^2} \;,\; u(x) = -\int \frac{-\frac{\cos x}{x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\, dx = \int \cos x\, dx = \boxed{\sin x}$$

$$v(x) = \int \frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\, dx = \int \sin x\, dx = \boxed{-\cos x}$$

$$y_p = u(x) y_1 + v(x) y_2 \to \sin x \frac{\sin x}{x} + \cos x \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x}$$

$$y = y_h + y_p$$

4) الف) $\begin{cases} y'' - y = e^{2x} + x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

حل پشت صفحه

91 / 11 / 8

$$L(y'') - L(y) = L(e^{2x}) + L(x)$$

$$s^2 L(y) - s y(0) - \cancel{s y'(0)}^{\,0} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2} \rightarrow L(y)(s^2-1) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2}$$

$$L(y) = \frac{1}{(s-2)(s^2-1)} + \frac{1}{s^2(s^2-1)}$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}\right] + L^{-1}\left[\underbrace{\frac{Ds+E}{s^2}}_{\frac{D}{s}+\frac{E}{s^2}} + \frac{F}{s-1} + \frac{G}{s+1}\right]$$

$$y = Ae^{2t} + Be^{t} + ce^{-t} + D + Et + Fe^{t} + Ge^{-t}$$

91/11/8

1) تغییر متغیر $v=\frac{y}{x},\ y'=x\frac{dv}{dx}+v$ همگن الف) $x^2y'=3(x^2+y^2)\tan^{-1}(\frac{y}{x})+xy$

$$y'=3(1+(\frac{y}{x})^2)\tan^{-1}(\frac{y}{x})+(\frac{y}{x})\to x\frac{dv}{dx}+\cancel{v}=3(1+v^2)\tan^{-1}(v)+\cancel{v}$$

$\frac{dx}{x}=\frac{1}{\tan^{-1}(v)(1+v^2)3}$ تفکیک پذیر $\ln x+\ln c=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{1+v^2}}{\tan^{-1}(v)}dv\to$

$$\ln(cx)=\frac{1}{3}\tan^{-1}(v)\to\tan^{-1}(v)=(cx)^3\to\tan^{-1}(\frac{y}{x})=cx^3$$

ب) $y'=\frac{2x}{x^2\cos y+\sin(2y)}\to\frac{dx}{dy}=\frac{x^2\cos y+2\sin y\cos y}{2x}$

$\frac{1}{2}x\cos y+\frac{1}{x}\sin y\cos y$ یا $\frac{dx}{dy}-x\frac{\cos y}{2}=x^{-1}\sin y\cos y$ برنولی $\xrightarrow{\div x^{-1}}$

$x\frac{dx}{dy}-x^2\frac{\cos y}{2}=\sin y\cos y$ (A) $\xrightarrow{u=x^2}$ $\frac{du}{dy}=2x\frac{dx}{dy}$ (B)

خطی مرتبه 1 نسبت به u و متغیر y $\leftarrow$ $\frac{du}{dy}-u\cos y=2\sin y\cos y$ جایگذاری (B) در (A)

$$F(y)=-\cos y,\ q(y)=2\sin y\cos y\to g(y)=\int F(y).dy=-\int\cos y\,dy\to-\sin y$$

$$u=e^{-g(y)}\left[\int q(y)e^{g(y)}dy+c\right]\to e^{\sin y}\left[2\int\sin y\cos y\,e^{-\sin y}dy+c\right]$$

$$e^{\sin y}\left[-2\sin y\,e^{-\sin y}-2e^{-\sin y}+c\right]\to ce^{\sin y}-2(\sin y+1)$$

$$\boxed{x^2=ce^{\sin y}-2(\sin y+1)}$$

ج) $y=2xy'+\frac{1}{(y')^2}$ مرتبه اول خاص $y'=p \to y=2xp+\frac{1}{p^2}$

$y'=p=2p+(2x-\frac{2}{p^3})\frac{dp}{dx} \to \frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p}=\frac{2}{p^2} \to f(p)=\frac{2}{p}$

$q(p)=\frac{2}{p^2} \to q(p)=2\ln p \to x=\frac{1}{p^2}(\int\frac{2}{p^2}dp+c)=p^{-3}(cp-2)$

یا $x=\frac{c}{p^2}-\frac{2}{p^3} \to \begin{cases} x=\frac{c}{p^2}-\frac{2}{p^3} \\ y=\frac{2c}{p}-\frac{3}{p^2} \text{ یا } 2xp+\frac{1}{p^2} \end{cases}$

د) $x^2y''-2xy'+2y=x^4$ اویلر

$\frac{d^2y}{dz^2}+(-2-1)+2y=e^{4z} \to t^2-3t+2=0 \to (t-2)(t-1)=0 \to t_1=2, t_2=1$

$y_h=c_1e^{2z}+c_2e^{z} \quad , y_p=e^{4z}A \quad , y=y_h+y_p$

ه) $y'''-y=e^{2x}$

$t^3-1=0 \to (t-1)(t^2+t+1)=0 \to t_1=1, t_{2,3}=-1/2\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\,i$

$y_h=c_1e^{-1/2x}\cos x(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+c_2e^{-1/2x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+c_3e^{x}$

یا $y_h=c_1e^{x}+e^{-1/2x}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2})$

$y_p=Ax^me^{px} \to y_p=Ae^{2x} \quad , y=y_h+y_p$

91 / 6 / 12

1) الف) $y' = \frac{y}{x} + 2e^{-y/x}$ همگن $y = vx$, $y' = v'x + v$ تغییر متغیر

$v'x + v = \frac{vx}{x} + 2e^{-v} \rightarrow \frac{dv}{dx}x = 2e^{-v} \rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{2e^{-v}} \rightarrow$

$\rightarrow \ln x = \frac{1}{2}\int e^{v} dv \rightarrow \boxed{\ln x = \frac{1}{2}e^{v} + c}$

ب) $y' = y - xy^3 e^{-2x}$ برنولی نوع 1 $y' - y = -xe^{-2x}y^3 \xrightarrow{\times y^{-3}}$

$y^{-3}y' - y^{-2} = -xe^{-2x} \rightarrow -\frac{u'}{2} - u = -xe^{-2x} \rightarrow \underbrace{u' + 2u}_{f(x)} = \underbrace{2xe^{-2x}}_{g(x)}$

$\begin{cases} u = y^{-2} \\ u' = -2y^{-3}y' \end{cases} \Rightarrow y^{-3}y' = -\frac{u'}{2}$, $u = e^{-\int 2dx}\left[\int e^{\int 2dx}(2xe^{-2x})dx + c\right]$

$u = e^{-2x}\left[\int e^{2x}(2xe^{-2x})dx + c\right] \rightarrow u = e^{-2x}\left[\int 2x dx + c\right] \rightarrow u = e^{-2x}\left[x^2 + c\right]$

$\xrightarrow{u = y^{-2}} y^{-2} = e^{-2x}\left[x^2 + c\right]$

ج) $y = -xy' + (y')^2$. $y' = p \rightarrow y = -xp + p^2$

$p = -p + (-x + 2p)\frac{dp}{dx} \rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{x}{2p} = 1 \rightarrow x = p^{-1/2}\left(\int p^{1/2}dp + c\right) = \frac{c}{\sqrt{p}} + \frac{2p}{3}$

$\begin{cases} x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{\sqrt{p}} \\ y = -xp + p^2 \end{cases}$ یا $\begin{cases} 3x = 2p + \frac{c}{\sqrt{p}} \\ 3y = p^2 - c\sqrt{p} \end{cases}$

2) الف) $y'' + 4y = \sec x \tan x$ $\begin{cases} y_h = \text{جواب عمومی (ریشه مشخصه)} \\ y_p = \text{از روش تغییر پارامتر} \end{cases}$

$y'' + 4y = 0 \rightarrow t^2 + 4 = 0 \rightarrow t = \pm 2i \rightarrow y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$

$y_1 = \cos 2x \;,\; y_2 = \sin 2x$ ادامه‌ی سوال 2 قسمت الف)

$$w = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$$

$$u(x) = -\int \frac{\sin 2x \cdot \sec \cdot \tan}{2} dx = -\int \frac{\cancel{2}\sin\cos \cdot \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x}}{\cancel{2}} dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx =$$

$$\rightarrow = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx = -\int \sec dx + \int \cos x\, dx = -\operatorname{Ln}\left|\sec x + \tan x\right| + \sin x$$

$$V(x) = \int \frac{\cos 2x \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}}{2} dx = 1/2 \int (2\cos^2 x - 1)\frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = 1/2 \int 2\sin x - 1/2 \int \rightarrow$$

$$\rightarrow \int \sin x \cos^{-2} x\, dx \rightarrow -\cos x - 1/2 \frac{\cos^{-1} x}{-1} = -\cos x + \frac{1}{2\cos x}$$

$$y_p = u(x)y_1 + V(x)y_2 \;,\; y = y_p + y_h$$

ب) $x^2 y'' + xy' - y = 16x^3$ اویلر

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (1-1)\frac{dy}{dz} - y = 16e^{3z} \rightarrow t^2 - 1 = 0 \rightarrow t = \pm i$$

$$y_h = e^{3z}(A\cos z + B\sin z) \;,\; y_{p_1} = e^{3z} \cdot c \;,\; y_{p_2} = 16e^{3z} \;,$$

$$y_p = y_{p_1} + y_2 \;,\; y = y_p + y_h$$

(3

$$y_2 = y_1\left(\int \frac{1}{y_1^2} e^{\int p(x)\,dx} dx\right) \rightarrow y_2 = \frac{\sin x}{x}\left(\int \frac{x^2}{\sin^2 x} e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx\right) = \frac{\sin x}{x}\Big(\rightarrow$$

$$\rightarrow \int \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{x^2} dx\Big) \rightarrow y_2 = \frac{\sin x}{x}\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \frac{\sin x}{x}\int (1+\cot^2 x)\,dx$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{x} x - \cot x = -\frac{\cos x}{x} \rightarrow y_2 = \frac{-\cos x}{x}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \frac{\sin x}{x} + c_2\left(\frac{-\cos x}{x}\right)$$

91/6/12

4) $F(s) = Ln\left(\frac{s^2+1}{s(s+1)}\right) \rightarrow Ln(s^2+1) - Ln\, s - Ln(s+1) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{2s}{s^2+1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$

$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} 2\times\cos t - 1 - e^{-t} \xrightarrow{\text{تقسیم بر } -t} \frac{2\cos t - 1 - e^{-t}}{-t}$

91/4/11 صنایع - 90/4/11 دانشکده فنی

2) الف) $\frac{y}{y'}+Ln(y')=x$ مرتبه اول خاص $y'=P$

$\frac{y}{P}+LnP=x \xrightarrow{\times P} y+PLnP=Px \to y'+P'LnP+P\frac{P'}{P}=P+P'x \to$

$P'LnP+P'-P'x=0 \to P'(LnP+1-x)=0 \to P'=0 \to LnP+1-x=0 \to P'=0 \to y''=0$

$y'=c \to y=\int c\,dx \to \boxed{\underline{y=cx}}$

ب) $xy'=y+x^2\sec(\frac{y}{x})$ همگن $v=\frac{y}{x}$, $y'=v'x+v$ تغییر متغیر

$v'x+v=v+x\sec(v) \to \cos v\,dv=dx \to \sin v=x+c \to y=x\sin^{-1}(x+c)$

ج) $y'\cos y-x\sin y=x\sqrt{\sin y}$ $u=\sin y$, $u'=\cos y$

$u'-xu=xu^{1/2} \xrightarrow{\times u^{-1/2}} u'u^{-1/2}-xuu^{-1/2}=xu^{1/2}u^{-1/2} \to \begin{cases} t=u^{1/2} \\ t'=1/2\,u'u \end{cases} \to t'-xt=x$

$t=e^{-\int -x\,dx}\left[\int e^{\int -x\,dx}x\,dx+c\right] \to t=e^{1/2x^2}\left[\int e^{-1/2x^2}x\,dx+c\right]$

$u=x \to du=dx$, $dv=e^{-1/2x^2}dx \to v=-e^{-x}$

$t=e^{-1/2x^2}\left[xe^{-x}-\int e^{-x}dx+c\right] \to t=e^{1/2x^2}\left[xe^{-x}+e^{-x}+c\right]$

1) الف) $(2xy+2x^2y^3)y'=1$ برنولی

$$(2x^2y^3+2xy)=\frac{1}{y'} \to -\frac{1}{y'}=(2x^2y^3+2xy') \to \frac{1}{y'}-2xy=2y^2x^2$$

$$\to x^{-2}\frac{1}{y'}-2yx^{-2}x=2y^3 \to x^{-2}\frac{1}{y'}-2yx^{-1}=2y^3 \to \begin{cases} u=x^{-1} \\ u'=-x^{-2}\frac{1}{y'} \end{cases}, \quad -u'-2yx=2y^3, \quad u'+2yu=-2y^3$$

$$u=e^{-\int 2y\,dy}\left[\int e^{\int 2y\,dy}\cdot(-y^3)\,dy+c\right] \to u=e^{-y^2}\left[-\int e^{y^2}\cdot 2y^3\,dy+c\right] \to$$

$$u=e^{-y^2}\left[-\int \underbrace{e^{y^2}\cdot 2y\,\overset{u}{(y^2)}\,dy}_{dV}+c\right] * \quad u=y^2 \to du=2y\,dy \to dV=2ye^{y^2}dy$$

$$V=e^{y^2} \to \int e^{y^2}(2y)(y^2)\,dy=uV-\int V\,du=y^2e^{y^2}-\int 2ye^{y^2}dy \Rightarrow \underbrace{y^2e^{y^2}-e^{y^2}} \quad (A)$$

* در A جایگذاری $\to u=e^{-y^2}\left[-(y^2e^{y^2}-e^{y^2})+c\right] \to \frac{1}{x}=u=-y^2+1+ce^{-y^2}$

ب) $y=2xy'+\frac{1}{y'^2}$

4) $(1-x^2)y'' + 2xy' = x^3$ مرتبه دوم خاص $y' = p , y'' = p'$

$(1-x^2)p' + 2xp = x^3$ خطی مرتبه اول $\rightarrow p' + \frac{2x}{1-x^2}p = \frac{x^3}{1-x^2} \rightarrow$

$p = e^{-\int \frac{2x}{1-x^2}dx}\left[\int \frac{x^3}{1-x^2}dx + c . \int e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}\right] \rightarrow$

$p = \cancel{e}^{\cancel{Ln}(1-x^2)}\left[\int e^{\ominus Ln(1-x^2)} \cdot \frac{x^3}{1-x^2}dx + c\right] \rightarrow p = (1-x^2)\left[\int \frac{\cancel{x^3}^{\,x^2 \times x}}{(1-x^2)^2}dx + c\right]$

$1-x^2 = t \rightarrow -2xdx = dt$

$\int \frac{x^2 . x}{(1-x^2)^2}dx = \int \frac{(1-t)}{t^2} = 1/2\, dt \rightarrow 1/2 \int \left[\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\right]dt \Rightarrow$

$-1/2\left(-\frac{1}{t} - Ln t\right) = +1/2\left(\frac{1}{1-x^2} + Ln(1-x^2)\right)$

$p = \frac{(1-x^2)}{2}\left[\frac{1}{1-x^2} + Ln(1-x^2)\right]$ برای امتحان تا اینجا

$\cancel{y'}p = 1/2 + 1/2(1-x^2)Ln(1-x^2) \rightarrow y = \int\left[1/2 + 1/2(1-x^2)Ln(1-x^2)\right]dx$

5) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$ ضرایب ثابت - تغییر پارامتر

$t^4 + 2t + 1 = 0 \rightarrow (t^2+1)^2 = 0 \rightarrow t_{1,2} = +i \;, t_{3,4} = -i$

$y_h = (A\cos x + B\sin x) + x(A_2\cos x + B_2\sin x)$

$y_p = x^m(A\cos x + B\sin x) \rightarrow y_p = x^2(A_3\cos x + B_3\sin x)$

$m = 2 , n = 1$

$y = y_h + y_p$

(1 الف) $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$, $y(0)=1$ کامل

$(2y\ln y + y - x)dy = y\,dx \to \underbrace{(2y\ln y+y-x)\,dy}_{Q}\ \underbrace{-y}_{P}\,dx=0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$

$u=\int -y\,dx + F(y) \to u = -xy + F(y) \to \frac{\partial u}{\partial y} = -x+F'(y)$

$2y\ln y + y - \cancel{x} = -\cancel{x}\, F(y) \to F(y)=\int(2y\ln y+y)\,dy$

$F(y) = 2\int y\ln y\,dy + \int y\,dy = 2y\ln y - \cancel{\frac{y}{2}} + \cancel{\frac{y}{2}} \to \begin{cases} u=\ln y \to du = 1/y\,dy \\ du = y \to u = \frac{y^2}{2} \end{cases}$

ب) $y'\sin y = (1-x\cos y)\cos y$ $\qquad u=\cos y$, $u' = -y'\sin y$

$-u = (1-xu)u \to -u' = u - xu^2 \to u'+u = xu^2 \to$ تغییر متغیر $V = y^{1-n}$

$V = u^{-1}$, $V' = -u^{-2}u' \to u^{-2}u' + u^{-1} = x \to -V'+V = x \to V'-V=x$ خطی

$u = e^{-x} \to V = \frac{1}{e^{-x}}\left(\int -e^{-x}x\,dx + c\right) \to V = e^{x}(xe^{-x}+e^{-x}+c)$

$\to u^{-1} = (\cos y)^{-1} \to \frac{1}{\cos y} = \boxed{x+1\ ce^{x}}$

ج) $y = xp^2+p^3$, $(p=y')$ $\to y = xy'^2 + y'^3 = x\underbrace{p^2}_{f} + \underbrace{p^3}_{g} \to x' - \frac{F'(p)}{p-F(p)}x = \frac{g'(p)}{p-F(p)}$

$x' + \frac{2}{p-1}x = \frac{3p}{1-p} \to \mu(p) = e^{\int\frac{2}{p-1}dp} = e^{2\ln(p-1)} \to$ ادامه پشت صفحه

88/11/17

$$x=\frac{1}{\mu(P)}\left(\int \mu_{(P)}\cdot q_{(P)}\,dP+C\right)=e^{\ln(P-1)^2}=(P-1)^2\rightarrow$$

$$x=\frac{1}{\mu(P)}\left(\int \cancel{(P-1)}^{2}\,\frac{3P}{1-P}\,dP+C\rightarrow x=\frac{1}{(P-1)^2}\left(\int 3P-3P^2\,dP+C\right)=\frac{1}{(P-1)^2}\left(\frac{3P^2}{2}-P^3+C\right)\right.$$

$$\rightarrow\begin{cases} y=xP^2+P^3 \\ x=\frac{1}{(P-1)^2}\left(\frac{3P^2}{2}-P^3+C\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=\frac{P^2}{(P-1)^2}\left(\frac{3P^2}{2}-P^4+C\right) \\ x=\frac{1}{(P-1)^2}\left(\frac{3P^2}{2}-P^3+C\right)\end{cases}$$ جواب پارامتری

2)

$$x=ce^{y^2}$$

$$1=2cyy'e^{y^2}\xrightarrow{\text{حذف } c}\begin{cases} x=ce^{y^2} \\ 1=2cyy'e^{y^2}\end{cases}\Rightarrow c=xe^{-y^2}$$

$$1=2\left[xe^{-y^2}\right]yy'e^{y^2}\rightarrow 2xyy'=1\xrightarrow{-1/y'}2xy\left(-\frac{1}{y'}\right)=1\rightarrow \boxed{y'=-2xy}$$

$$\frac{dy}{dx}=-2xy\rightarrow\frac{dy}{y}=-2x\,dx\rightarrow \ln y-\ln c=-x^2\rightarrow \ln\left(\frac{y}{c}\right)=x^2\rightarrow\frac{y}{c}=e^{-x^2}$$

$$\boxed{y=ce^{-x^2}}$$ خانواده مسیر

3)

$$y_2(x)=u(x)\,y_1(x)\quad ,u(x)=\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{\int P(x)\,dx}\,dx\rightarrow$$

$$\rightarrow u(x)=\int\frac{1}{\sin^2(e^x)}e^{-\int -dx}\,dx=\int\frac{e^x}{\sin^2(e^x)}\,dx=-\cot(e^x)\rightarrow y_2(x)=-\cot(e^x)\times\sin\rightarrow$$

$$\rightarrow(e^x)=-\cos(e^x)\rightarrow y_p=c_1(x)\sin(e^x)-\cos(e^x)\,c_2(x)$$

$$c_1'(x)\sin(e^x)-\cos e^x\,c_2'(x)=0\;,\;c_1'(x)e^x\cos(e^x)+e^x\sin(e^x)c_2'(x)=e^{2x}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\,e^x\cos(e^x)+c_2'(x)\,e^x\rightarrow c_2'(x)=e^x\sin(e^x) \\ c_1'(x)\,e^x\cos(e^x)+c_2'(x)\sin e^x\rightarrow c_2'(x)=e^x\sin(e^x)\end{cases}$$ ادامه ص 3

(2)

ادامه سوال ۳

$$\begin{cases} c_2(x) = -\cos(e^x) \\ c_1(x) = \sin(e^x) \end{cases} \Longrightarrow y_p = \sin^2(e^x) + \cos^2(e^x) = 1$$

$$y = c_1\sin(e^x) - c_2\cos e^x + 1$$

4) $y^{(5)} - y^{(4)} = xe^x - 2x^3$ ضرایب نامعین

$y^5 - y^4 = 0 \to t^5 - t^4 = 0 \to t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$

$y_h = c_1 e^x + xc_2 + x^2c_3 + x^3c_4 + ce^x$

$y_{p_1} = x^m e^x(Ax+B) = xe^x(Ax+B)$, $y_{p_2} = x^4(Ax^3 + Bx^2 + cx + D)$

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, $y = y_p + y_h$

6) الف. $L^{-1}\left[\frac{1}{s}\arctan\left(\frac{1}{s}\right)\right]$

① مشتق $\longrightarrow \dfrac{-1/s}{1+\left(\frac{1}{s}\right)^2} = \dfrac{-1}{s^2+1}$

② لاپلاس معکوس $\longrightarrow -\sin t$

③ تقسیم بر $-t$ $\longrightarrow \dfrac{-\sin t}{-t}$

④ $\int_0^t$ بگیر $\longrightarrow \displaystyle\int_0^t \frac{\sin t}{t}\,dt$

ب)
$$\begin{cases} t & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2} \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$$

$$F(t) = t(U_0(t)) - U_{\pi/2}(t) + \sin t(U_{\pi/2}(t)) - U_\pi(t) + 0$$

ادامه پشت صفحه

88 / 11 / 7

$F(t) = U_0(t)\,t \;-\; U_{\pi/2}(t)\,t \;+\; U_{\pi/2}(t)\sin t \;-\; U_{\pi}(t)\sin t$

$U_0(t)\,t$:

① $\boxed{e^{-0s}}$

② t را با صفر جمع و از t لاپلاس می‌گیریم

$\boxed{\frac{1}{s^2}}$

$-U_{\pi/2}(t)\,t$:

① $\boxed{e^{-\pi/2\, s}}$

② t را با $\frac{\pi}{2}$ جمع و از $(t+\pi/2)$ لاپلاس می‌گیریم

$\boxed{\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{s}}$

$+U_{\pi/2}(t)\sin t$:

① $\boxed{e^{-\pi/2\, s}}$

② t را با $\pi/2$ جمع کرده و از $\sin(t+\pi/2)$ لاپلاس

ربع سوم

$L(-\sin t)$

$\boxed{\frac{-1}{s^2+1}}$

$-U_{\pi}(t)\sin t$:

① $\boxed{e^{-\pi s}}$

② t را با π جمع کرده و از $\sin(t-\pi)$ لاپلاس می‌گیریم

ربع چهارم

$L(-\sin t)$

$\boxed{\frac{-1}{s^2+1}}$

صفحه اول 18/ ۱/ 93

نمونه سؤالات معادلات دیفرانسیل (فصل اول)

۱- معادلات تفکیک پذیر داده شده را حل کنید

1) $y' \ln x - \dfrac{y}{x} = 0$

2) $x y' = (1 - x^2) \cot y$

3) $x y' + (1 + y^2) \tan^{-1} y = 0$

4) $\sqrt{1+y^2}\, dx - y (1 + x^2)\, dy = 0$

۲- معادلات همگن داده شده را حل کنید

1) $x\, dy - y\, dx = \sqrt{xy}\, dx$

2) $(x e^{\frac{y}{x}} + y)\, dx - x\, dy = 0$

3) $x y' - y - x^2 \tan \dfrac{y}{x} = 0$

4) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin \dfrac{y}{x}$

5) $(x^2 + 1)\, y\, (x y' - y) = x^3$

۳- معادلات کامل داده شده را حل کنید

1) $(x^2 + y)\, dx + (x - 2y)\, dy = 0$

2) $x (1 - y^2)\, dx + y (8 - x^2)\, dy = 0$

3) $2x \sin 3y\, dx + 3x^2 \cos 3y\, dy = 0$

4) $y' = -\dfrac{y e^x + e^y}{e^x + x e^y}$

5) $(\dfrac{y}{x} + 6x)\, dx + (\ln x - 2)\, dy = 0$

6) $(\dfrac{\sin 2x}{y} + x)\, dx + (y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2})\, dy = 0$

۴- با پیدا کردن عامل انتگرال ساز مناسب معادلات داده شده را حل کنید

1) $y (2x + y^3)\, dx - x (2x - y^3)\, dy = 0$

2) $(x^2 + y^2 + x)\, dx + xy\, dy = 0$

[illegible]

۳) $e^{x}(x+1)\,dx + (ye^{y} - xe^{x})\,dy = 0$

۴) $y' = e^{2x} + y - 1$

۵) $y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0$

۶) $(y + \ln x)\,dx - x\,dy = 0$

۵ـ معادلات خطی مرتبه اول داده شده را حل کنید

۱) $y' - 3y\tan x = 2$

۲) $y' - 2xy = 2x\,e^{x^2}$

۳) $y' + y\cos x = e^{x^2}$

۴) $xy' - y = x^2\sin x$

۵) $y' = \dfrac{1}{y(1-x)}$

۶) $y' = \dfrac{y}{x+y^3}$

۷) $(1+x^2)\,y' = 2xy + (1+x^2)^2$

۸) $y' + \tan y = \dfrac{x}{\cos y}$

۶ـ معادلات برنولی داده شده را حل کنید

۱) $xy' + xy^2 = y$

۲) $y' + \dfrac{1}{x}y = 2y^2\ln x$

۳) $2xyy' + x = y^2$

*۴) $y' = y(y^3\cos x + \tan x)$

۵) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - 4}$

۶) $y'x^3\sin y + 2y = xy'$

۷) $2\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{y} + x^3\cos y = 0$

۸) $y' + 4xy = 2x\,e^{-x^2}\sqrt{y}$

۹) $y' + 1 = 4e^{-y}\sin x$

۷ـ معادلات داده شده را حل کنید معادلات مرتبه اول نوع خاص

۱) $y = (y' - 1)\,e^{y'}$

۲) $x = y'^3 - y' + 2$

۳) $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$

۴) $y = 2xy' + \sin y'$

۵) $y = x(1+y') + y'^2$

۶) $y^2y'^2 + 3xy' - y = 0$

9013210783 تمرینات درس معادلات دیفرانسیل

محمدسعید عباسی

93/1/18

تمرین 1

1) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x\ln x} \rightarrow \ln y = \ln|\ln x| + \ln c \rightarrow y = c\ln x$

ملاحظه شد

2) $\frac{dy}{\cot y} = \frac{(1-x^2)dx}{x} \rightarrow \int \frac{dy}{\cot y} = \int (\frac{1}{x} - x)dx \rightarrow \ln|\sec y| = \ln x - \frac{1}{2}x^2 + \ln c$

3) $\int \frac{dy}{(1+y^2)\tan^{-1}y} + \int \frac{dx}{x} = 0 \rightarrow \ln \tan^{-1}y + \ln x = \ln c \rightarrow y = \tan\frac{c}{x}$

4) $\frac{dx}{(1+x^2)} - \frac{y\,dy}{1+y^2} \rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{y}{1+y^2}dy = 0 \rightarrow \tan^{-1}x - \sqrt{1+y^2} = c$

تمرین 2

تغییر متغیر: $dy = v\,dx + x\,dv$, $y = vx$, $y' = v + x\frac{dv}{dx}$ یا $y' = v + xv'$

1). $x(v\,dx + x\,dv) = (vx + \sqrt{vx^2})dx \rightarrow (v\,dx + x\,dv) = (v + \sqrt{v})dx \rightarrow$

$\rightarrow x\,dv = \sqrt{v}\,dx \rightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx}{x} \rightarrow 2\sqrt{v} = \ln x + c \rightarrow 2\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln x + c$

2). $(x e^{\frac{vx}{x}} + vx)dx - x(v\,dx + x\,dv) = 0 \rightarrow e^{v}dx - x\,dv = 0 \rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int e^{-v} \rightarrow$

$\ln x + c = -e^{-v} \rightarrow e^{-\frac{y}{x}} + \ln x + c = 0$

3). $v + xv' - v - x\tan v = 0 \rightarrow \cot v\,dv = dx \rightarrow \sin\frac{y}{x} = c e^{x}$

4). $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx}{x} + \sin\frac{vx}{x} \rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{\sin v} \rightarrow \ln x + \ln c = \ln\tan\frac{v}{2} \rightarrow$

$\rightarrow cx = \tan\frac{y}{2x} \rightarrow y = 2x\tan^{-1}cx$

5). $(x^2+1)vx[x(v+xv')-vx]=x^3 \to vv'(x^2+1)=1 \to v\,dv=\frac{dx}{x^2+1} \to$

$v^2=2\tan^{-1}x+c \to y^2=2x^2\tan^{-1}x+cx^2$

تمرين 3

1) $P=x^2+y\ ,\ Q=x-2y \to u(x,y)=u=\int(x^2+y)dy+f(y) \to$

$u=\frac{x^3}{3}+xy+f(y) \to \frac{\partial u}{\partial y}=x+\frac{df}{dy}=x-2y \to f(y)=-\int 2y\,dy=-y^2$

$u=\frac{x^3}{3}+xy-y^2=c$

2). $P=x(1-y^2)\ ,\ Q=y(8-x^2) \to u=\int P\,dx+f(y)=\frac{1}{2}x^2(1-y^2)+f(y) \to \frac{\partial u}{\partial y}=-yx^2$

$+f'(y)=y(8-x^2) \to f(y)=4y^2 \to u=x^2(1-y^2)+8y^2=c$

3). $P=2x\sin y\ ,\ Q=3x^2\cos 3y \to u=\int P\,dx+f(y)=x^2\sin 3y+f(y) \to$

$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2\cos 3y+f'(y)=3x^2\cos 3y \to f'(y)=0 \to f(y)=c_1 \to u=x^2\sin 3y=c$

4). $P=ye^x+e^y\ ,\ Q=e^x+xe^y \to u=\int P\,dx+f(y)=ye^x+xe^y+f(y) \to$

$\frac{\partial u}{\partial y}=e^x+xe^y+f'(y)=e^x+xe^y \to f'(y)=0\ ,\ f(y)=c_1 \to u=ye^x+xe^y=c$

5). $P=\frac{y}{x}+6x\ ,\ Q=\ln x-2 \to u=\int Q\,dy+f(x)=y(\ln x-2)+f(x) \to$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x}+f'(x)=\frac{y}{x}+6x \to f'(x)=6x\ ,\ f(y)=3x^2 \to u=y\ln x-2y+3x^2=c$

تمرینات درس ... وحید عباسی

93/8/18

6). $P = \frac{\sin 2x}{y} + x,\ Q = y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\sin 2x}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2\sin x\cos x}{y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = \frac{\sin 2x}{y} + x \rightarrow u = -\frac{1}{2}y\cos 2x + \frac{1}{2}x^2 f(y)$ *

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cos 2x}{y^2} + f'(y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \rightarrow f'(y) + \frac{\cos^2 - \sin^2 x}{y^2} = y - \frac{\sin 2x}{y^2}$

$\rightarrow f'(y) = y - \frac{\cos 2x}{y^2} \rightarrow f(y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\cos x \rightarrow c = -\frac{1}{2y}\cos 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\cos 2x$

تمرین 4

1) $P = y(2x+y^3),\ Q = -x(2x-y^3) \rightarrow \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \rightarrow$

$\frac{3(2x+y^3)}{\cancel{y}(2x+y^3)} = \frac{3}{y} \rightarrow F = e^{-\int 3y\,dy} = \frac{1}{y^3} \rightarrow P^* = y^{-2}(2x+y^3),\ Q^* = -2x^2y^{-3} + x$

$u = \int P^* dx + f(y) = x^2y^{-2} + xy + f(y) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -2x^2y^{-3} + x + f'(y) = -2x^2y^{-3}x$

$f'(y) = 0,\ f(y) = c_1,\ u = x^2y^{-2} + xy = c$

2). $P = x^2+y^2+x,\ Q = xy \rightarrow \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \rightarrow F = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$

$P^* = x^3 + xy^2 + x^2,\ Q^* = x^2y \rightarrow u = \int P^* dx + f(y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 + f(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2y + f'(y) = x^2y \rightarrow f'(y) = 0 \rightarrow f(y) = c_1 \rightarrow u = 3x^4 + 6x^2y^2 + 4x^3 = c$

3). $P = e^x(x+1),\ Q = ye^y - xe^x \rightarrow \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{e^x(x+1)}{e^x(x+1)} = 1$

$F = e^{-\int dy} = e^{-y} \rightarrow P^* = e^{x-y}(x+1),\ Q^* = y - xy^{x-y} \longrightarrow$ پشت صفحه

$$\rightarrow u = \int \overset{*}{P}\,dx + f(y) = x e^{x-y} + f(y) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -x e^{x-y} + f'(y) = y - x e^{x-y}$$

$$f'(y) = y,\ f(y) = \frac{1}{2} y^2 \rightarrow u = 2x e^{x-y} + y^2 = C$$

4) $$P = e^{2x} + y - 1,\ Q = -1 \rightarrow \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow F = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

$$\overset{*}{P} = e^{x} + e^{-x}(y-1),\ \overset{*}{Q} = -e^{-x} \rightarrow u = \int \overset{*}{Q}\,dy + f(x) = -y e^{-x} + f(x) \rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y e^{-x} + f'(x) = e^{x} + e^{-x}(y-1) \rightarrow f'(y) = e^{x} - e^{-x},\ f(y) = e^{x} + e^{-x}$$

$$u = -y e^{-x} + e^{x} + e^{-x} = C$$

5) $$P = y,\ Q = 2xy - e^{-2y} \rightarrow \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1-2y}{y} = \frac{1}{y} - 2 \rightarrow$$

$$F = e^{-\int\left(\frac{1}{y} - 2\right)dy} = \frac{1}{y} e^{2y} \rightarrow \overset{*}{P} = e^{2y},\ \overset{*}{Q} = 2x e^{2y} - \frac{1}{y} \rightarrow$$

$$u = \int \overset{*}{P}\,dx + f(y) = x e^{2y} + f(y) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 2x e^{2y} + f'(y) = 2x e^{2y} - \frac{1}{y} \Rightarrow f'(y) = \frac{-1}{y}$$

$$f(y) = -\operatorname{Ln} y,\ u = x e^{2y} - \operatorname{Ln} y = C$$

6) $$P = y + \operatorname{Ln} x,\ Q = -x \rightarrow \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2}{-x} \rightarrow F = e^{-\int\left(\frac{2}{x}\right)dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$\overset{*}{P} = \frac{y}{x^2} + \frac{\operatorname{Ln} x}{x^2},\ \overset{*}{Q} = -\frac{1}{x} \rightarrow u = \int \overset{*}{Q} + f(x) = \frac{-y}{x} + f(x) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + f'(x)$$

$$\rightarrow = \frac{y}{x^2} + \frac{\operatorname{Ln} x}{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{\operatorname{Ln} x}{x^2} \rightarrow f(x) = \frac{1 + \operatorname{Ln} x}{x} \rightarrow u = y + 1 + \operatorname{Ln} x = Cx$$

وحید عباسی … تمرینات

تمرین 5

93/1/18

1). $f(x) = -3\tan x$, $q(x) = 2$, $g(x) = \int f(x)\,dx = 3\ln\cos x \to$

$y = \cos^{-3}x\left(\int 2\cos^3 x\,dx + c\right) = \frac{2}{3}\frac{(3-\sin^2 x)\sin x}{\cos^3 x} + CSC^3 x$

2). $f(x) = -2x$, $q(x) = 2xe^{x^2}$, $g(x) = \int f(x)\,dx = -x^2 \to y = e^{x^2}\left(\int 2x\,dx + c\right)$

$= (x^2+c)e^{x^2}$

4) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = x\sin x$, $g(x) = \int f(x)\,dx = \ln x \to y = e^{\ln x}\left(\int \sin x\,dx + c\right)$

$= -x\cos x + cx$

3) $f(x) = \cos x$, $q(x) = e^{2x}$, $g(x) = \int f(x)\,dx = \sin x$, $y = e^{-\sin x}\left(\int e^{2x+\sin x}\,dx + c\right)$

5) $\frac{dx}{dy} + yx = y$ خطی نسبت به x $\to f(y) = y$, $q(y) = y$, $g(y) = \int f(y)\,dy = \frac{y^2}{2} \to$ ✗.

x تابع و y متغیر

$x = e^{-y^2/2}\left(\int y e^{-y^2/2}\,dy + c\right) = 1 + ce^{-y^2/2}$ *

6). $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = y^2 \to q(y) = y^2$, $f(y) = -\frac{1}{y}$, $g(y) = \int f(y)\,dy = -\ln y$

$x = y\left(\int y\,dy + c\right) = cy + \frac{y^3}{2}$

7) $f(x) = \frac{-2x}{x^2+1}$, $q(x) = 1+x^2$, $g(x) = \int f(x)\,dx = -\ln(x^2+1) \to y = (x^2+1)\left(\int dx + c\right)$

$= (x+c)(x^2+1)$

8) $y'\cos y+\sin y=x$, $u=\sin y$, $u'+u=x \to f(x)=1$, $q(x)=x$

$g(x)=\int f(x)\,dx=x$, $u=\sin y=e^{-x}\left(\int xe^{x}dx+c\right)=x-1+ce^{-x}$

تمرین 6

1) $y'-\frac{1}{x}y=-y^2 \to y^{-2}y'-\frac{1}{x}y^{-1}=-1 \to u=y^{-1}, u'=-y^{-2}y' \to u'+\frac{1}{x}u=1$

$f(x)=\frac{1}{x}, q(x)=1, g(x)=\int f(x)\,dx=\ln x \to u=e^{-\ln x}\left(\int x\,dx+c\right)=\frac{x}{2}+c\frac{1}{x}$

$y=\frac{2x}{x^2+c}$

4) $y'-y\tan x=y^4\cos x \to y^{-4}y'-y^{-3}\tan x=\cos x \to u=y^{-3}, u'=-3y^{-4}y'$

$u'+3u\tan x=-3\cos x \to f(x)=-3\tan x \to q(x)=-3\cos x, g(x)=\int f(x)\,dx$

$=-3\ln\cos x \to u=\cos^3 x\left(-3\int \sec^2 x\,dx+c\right)=\cos^3 x(-3\tan x+c)$

$\to y=(c-3\tan x)^{-1/3}\sec x$

5) $\frac{dx}{dy}-\frac{1}{2y}x=-\frac{y^2+4}{2y}x^{-1} \to 2x\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x^2=\frac{y^2+4}{y} \to u=x^2, \frac{du}{dy}=2x\frac{dx}{dy}$

$\frac{du}{dy}-\frac{1}{y}u=-\frac{y^2+4}{y} \to f(y)=-\frac{1}{y}, q(y)=-\frac{y^2+4}{y}, g(y)=\int f(y)\,dy=$

$-\ln y \to u=y\left(\int -\frac{y^2+4}{y^2}dy+c\right)=-y^2+4+cy \to x^2+y^2=4+cy$

وحید عباسی   تمرینات درس معادلات دیفرانسیل

93/1/18

7) $2x^{-3}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x^{-2} = -\cos y \to u = x^{-2},\ \frac{du}{dy} = -2x^{-3}\frac{dx}{dy} \to \frac{du}{dy} + \frac{1}{y}u = \cos y$

$u = x^{-2} = y^{-1}\left(\int y\cos y\,dy + c\right) \to \frac{y}{x^2} = \cos y + y\sin y + c$

8). $y' + 4yx = 2xe^{-x^2}\sqrt{y} \to y'y^{-1/2} + 4xy^{-1/2} = 2xe^{-x^2} \to u = y^{+1/2},\ u' = 1/2\, y^{-1/2}y'$

$u' + 2xu = xe^{-x^2} \to F(x) = 2x \to g(x) = xe^{-x^2},\ g(x) = \int F(x)\,dx = x^2$

$u = e^{-x^2}\left(\int x\,dx + c\right) = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \to y = e^{-2x^2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2$

9). $y'e^{y} + e^{y} = 4\sin x,\ u = e^{y},\ u' = y'e^{y} \to u' + u = 4\sin x \to u = e^{y} = e^{-x}\left(\int 4e^{x}\right.$

$\left.\sin x\,dx + c\right) \to e^{y} = ce^{-x} + 2(\sin 2x - \cos x)$

* تمرین 6 شماره‌های 2 و 6 حل نشده است.

تمرین 7

1) $y' = P,\ y = (P-1)e^{P} \to P\,dx = Pe^{P}dP \to P = 0,\ x = e^{P} + c$

$\begin{cases} y = (P-1)e^{P} \\ P = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -1$ جواب غیرعادی $\to \begin{cases} y = (P-1)e^{P} \\ x = e^{P} + c \end{cases}$ جواب عمومی به فرم پارامتری

2) $y' = P;\ x = P^3 - P + 2 \to dx = \frac{1}{x}dy = (3P^2 - 1)dP \to dy = (3P^3 - P)dP$

$y = \frac{3}{4}P^4 - \frac{1}{2}P^2 + c \to \begin{cases} x = P^3 - P + 2 \\ y = \frac{3}{4}P^4 - \frac{1}{2}P^2 + c \end{cases}$

3) $y = xy' - \frac{1}{y'} \to y = xc - \frac{1}{c}$ کلرو $\to \begin{cases} y = cx - \frac{1}{c} \\ 0 = x + \frac{1}{c^2} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{y^2}{4}$ جواب غیرعادی

4) $y' = P,\ y = 2xP + \sin P$ مشتق $\rightarrow P = 2P + (2x + \cos P)\dfrac{dP}{dx} \rightarrow \dfrac{dx}{dP} + \dfrac{2x}{P} = -\dfrac{\cos P}{P}$

$$x = -\frac{1}{P^2}(\sin P + \cos P - C) \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{P^2}(\sin P + \cos P - C) \\ y = \dfrac{2C}{P} - \dfrac{2\cos P}{P} - \sin P \end{cases}$$

5) $y' = P,\ y = x(1+P) + P^2$ مشتق $\rightarrow P = 1 + P + (x + 2P)\dfrac{dP}{dx} \rightarrow \dfrac{dx}{dP} + x = -2P$

$$x = e^{-P}\left(-\int Pe^{P}dP + C\right) = Ce^{-P} - 2P + 2 \rightarrow \begin{cases} x = Ce^{-P} - 2P + 2 \\ y = C(1+P)e^{-P} - P^2 + 2 \end{cases}$$

6) $x = \dfrac{y}{3y'} - \dfrac{1}{3}y^2 y' \rightarrow y' = P,\ x = \dfrac{y}{3P} - \dfrac{1}{3}y^2 P \rightarrow 3dx = 3\dfrac{dy}{P} = \dfrac{ydP - Pdy}{P^2}$

$- 2yPdy - y^2 dP \rightarrow (1 + yP^2)(2Pdy + ydP) = 0 \rightarrow 1 - yP^2 = 0$

$2Pdy + ydP = 0 \rightarrow Py^2 = C$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{3P} - \dfrac{1}{3}y^2 P \\ 1 + yP^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow 9x^2 + 4y^3 = 0$$ جواب غیرعادی

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{3P} - \dfrac{1}{3}y^2 P \\ Py^2 = C \end{cases} \Longrightarrow y^3 - 3xC - C^2 = 0$$