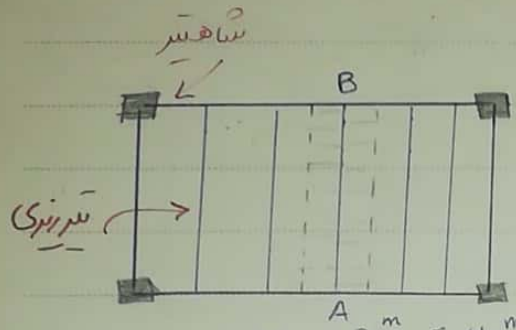
دانشجویان و اساتید توجه داشته باشید جزوه موجود به صورت اختصاصی توسط وب سایت جزوه باما تهیه شده است و تمامی حقوق مادی و معنوی آن برای این وب سایت محفوظ می باشد.

Jozvebama.ir

Subject

Date

مقاومت مصالح (تمرین)



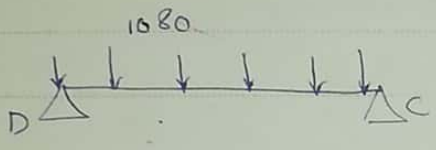
$6@0.90^{m} = 5.40^{m}$

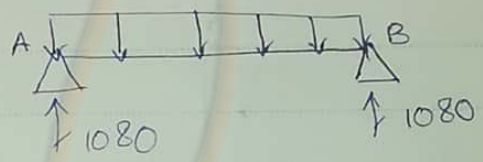
$DL = 600$

$L.L = \underline{200}$

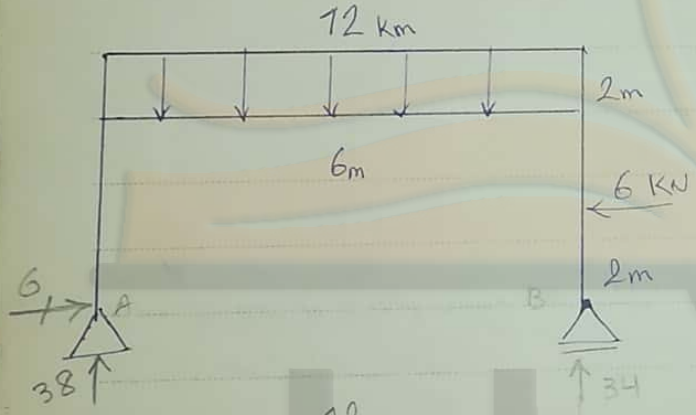
$800\ kg/m^2$

$800 \times 0.90 = 720\ kg/m$





دیاگرام های نیروی محوری، نیروی برشی، لنگر خمشی و همین منفی الاستیک سازه ذیل داده شده را رسم نمایید.

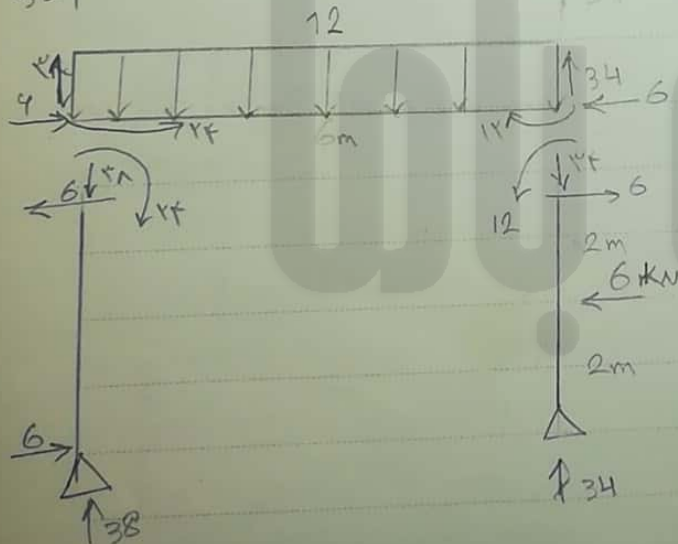


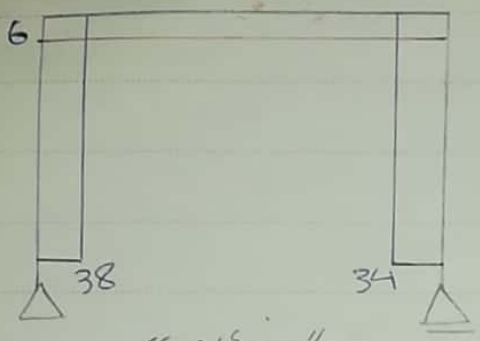
$\sum M_B = 0 \quad 4 \times 2 + R_{yA} \times 4 - (4 \times 12) \times 2 = 0$

$R_{yB} = 34$

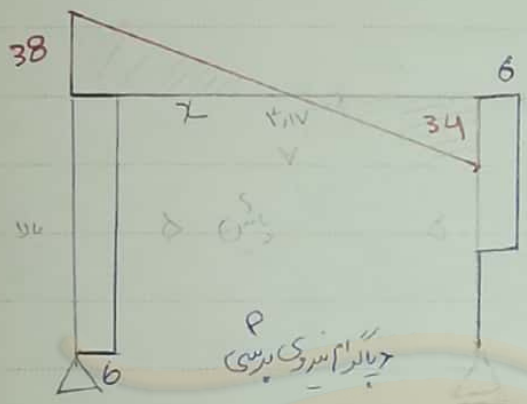
$\sum M_y = 0 \quad R_{yA} + 34 - 12 \times 4 = 38$

$R_{yA} = 38$





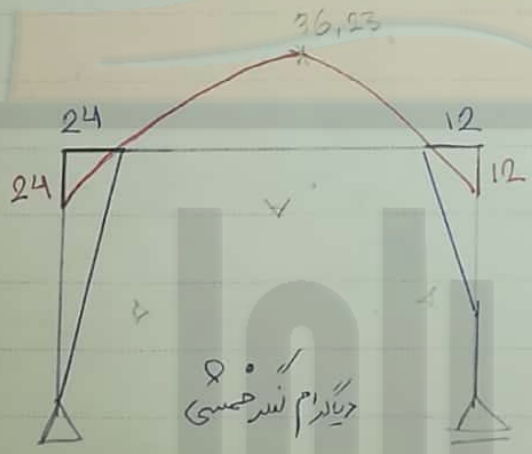
دیاگرام نیروی محوری



دیاگرام نیروی برشی

$$\frac{x}{34} = \frac{6-x}{34} \quad \text{و} \quad \frac{x}{38} = \frac{6}{38+34}$$

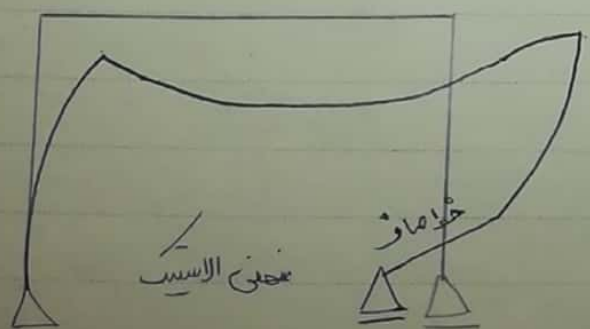
$$x = 3.17$$

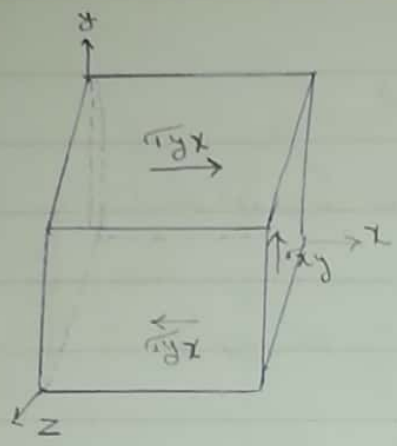


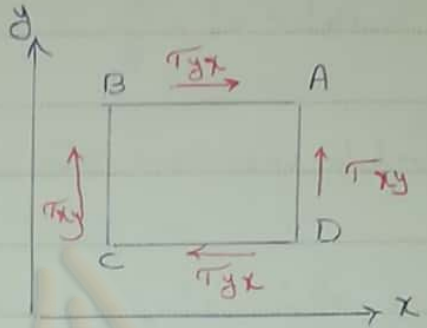
دیاگرام لنگر خمشی

دیاگرام لنگر خمشی در کتی رسم می‌شود نه تارها بنابراین جهت آن سمت راست است.

نوع پیکان در انتهای عضو که کتی بود لنگر هم همان سمت است.







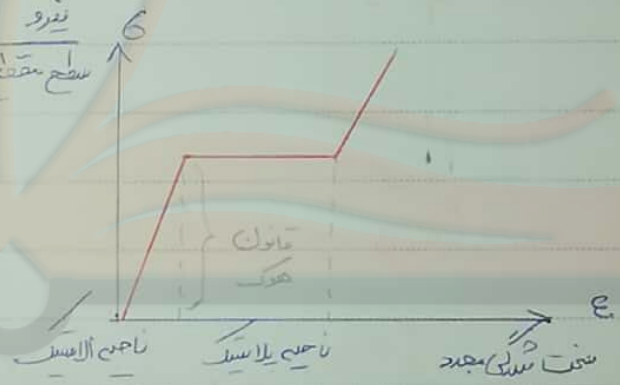
$$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow (\tau_{yx})(dx\,dz)dy - (\tau_{xy})(dy\,dz)\,dx = 0$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \Rightarrow \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح مقطع}}$$

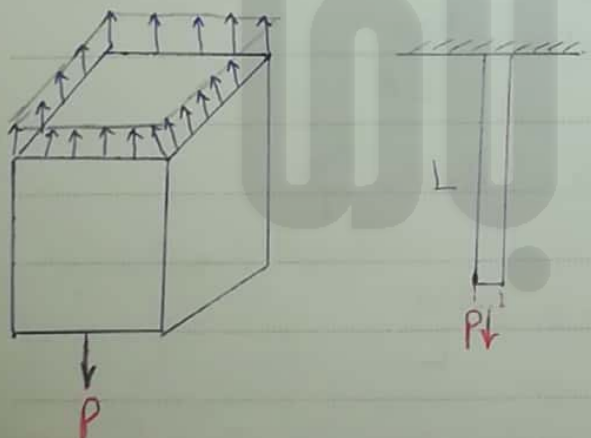
$$P = \sigma A$$

نمودار ایده‌آل:

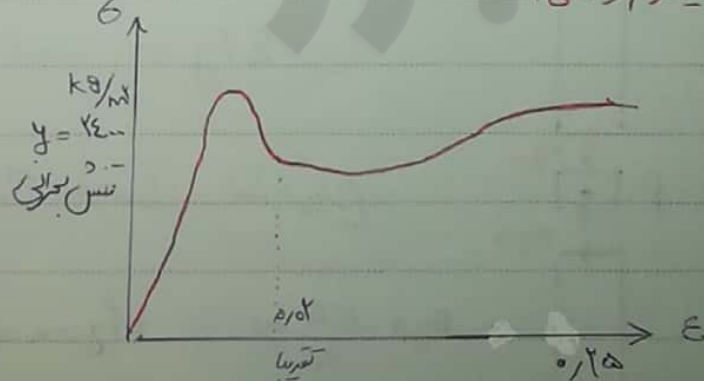


$$\varepsilon = \frac{\text{ازدیاد طول}}{\text{کل طول اولیه}}$$

واحد ندارد $\varepsilon = \frac{\Delta}{L} = \frac{\text{cm}}{\text{cm}}$



نمودار واقعی:

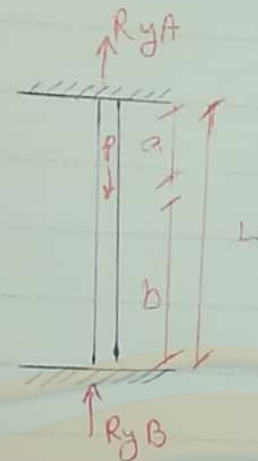


مدول الاستیسیته = مدول یانگ $= E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \simeq 2 \times 10^6 \ kg/cm^2$

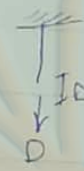
مصالح:
۱- غیر ایزوتروپیک ← هیزم، در جهات مختلف قدرت مختلف دارد (ساده‌ترین جنس است ← E)
۲- ایزوتروپیک ← در همه‌ی جهات قدرت یکسانی دارد. فولاد، بتن ← در حالت کلی

تحلیل سازه‌های هیپراستاتیک (نامعین)

۱) روش نیروها
۲) روش تغییر مکان



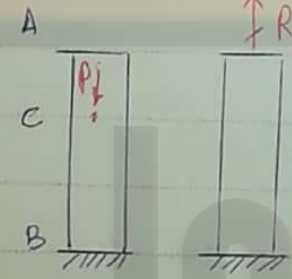
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{yA} + R_{yB} - P = 0$



$\Delta = \frac{PL}{EA}$

(فول: نیرو، تحوری: مدول یانگ، سطح مقطع)

۱. روش نیروها: یکی از نیروها به عنوان مجهول اولیه انتخاب می‌کنیم.

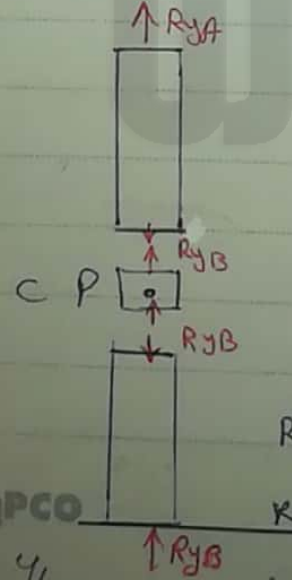


$\Delta_A = \frac{Pb}{EA}$ $\quad \Delta_A = \frac{R_{yA} L}{EA}$

$\frac{-Pb}{EA} + \frac{R_{yA} L}{EA} = 0 \Rightarrow R_{yA} = \frac{Pb}{L}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{yB} = \frac{Pa}{L}$

۲. تغییر مکان: تغییر مکان نقطه‌ای C را به عنوان مجهول در نظر می‌گیریم.



$R_{yA} = \frac{EA}{a} \Delta C$ $\quad \Sigma f_y = 0 \Rightarrow R_{yA} + R_{yB} - P = 0$

$R_{yB} = \frac{EA}{b} \Delta C$ $\quad \frac{EA}{a} \Delta C + \frac{EA}{b} \Delta C = P$

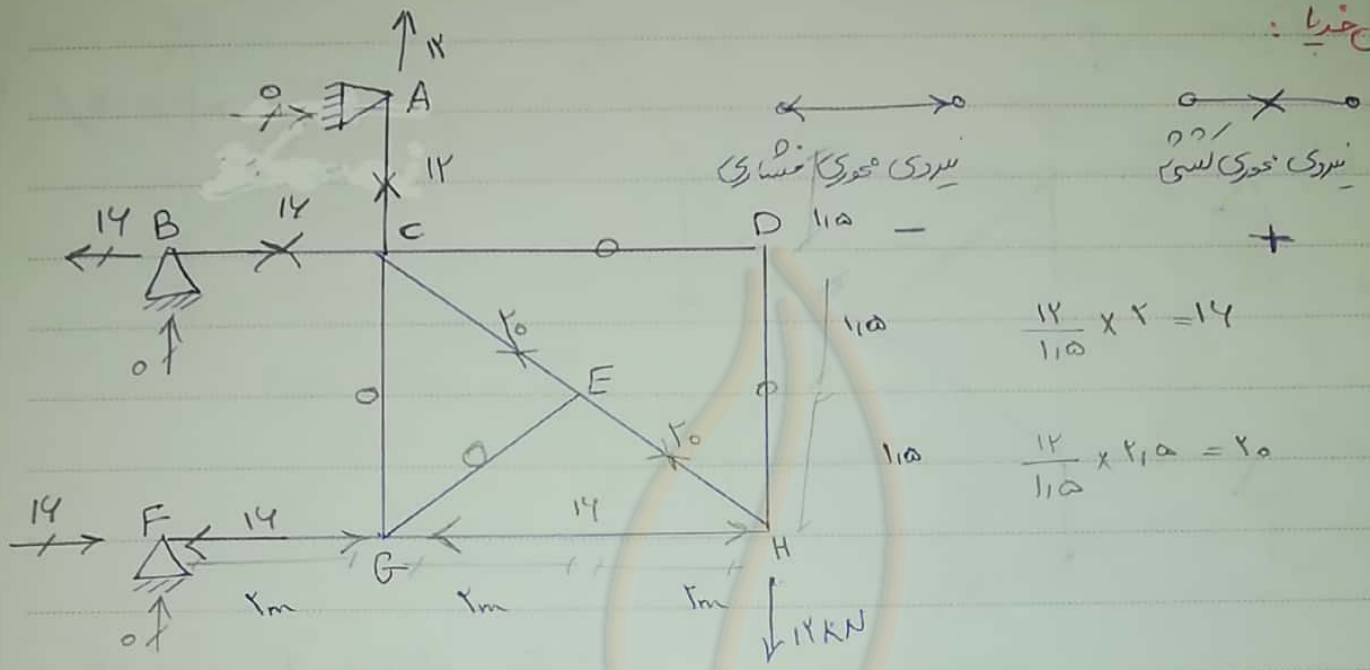
$R_{yA} = \frac{Pb}{L}$, $R_{yB} = \frac{Pa}{L}$ $\Rightarrow \Delta = \frac{Pab}{EAL}$

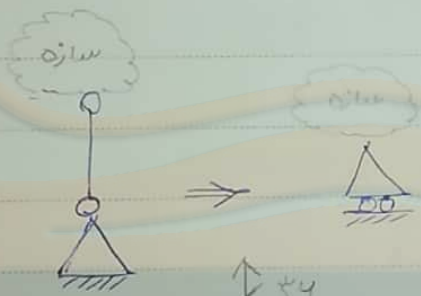
PqPCO

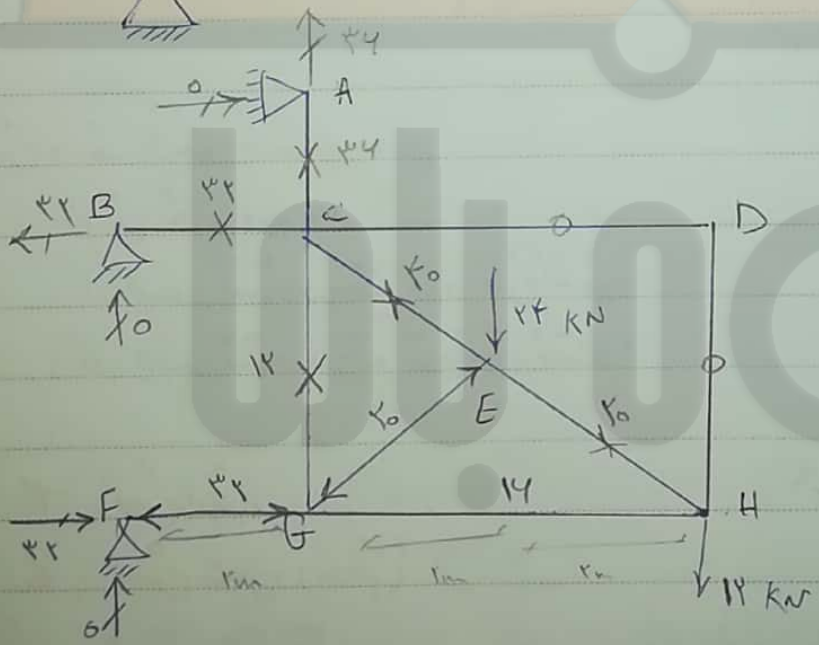
Subject

Date

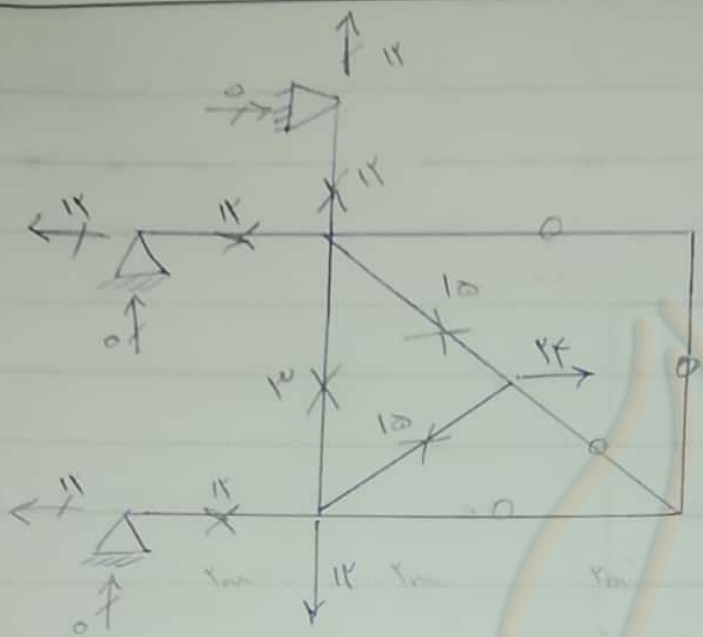
تحلیل خرپا :







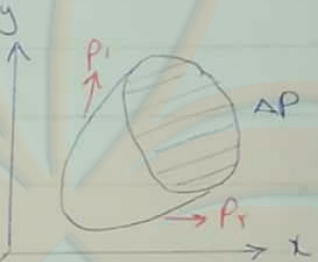
PAPCO



$\frac{۱۲}{۴} \times ۵ = ۱۵$

تنش و کنش : (strain _ stress)

تنش = $\frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}}$

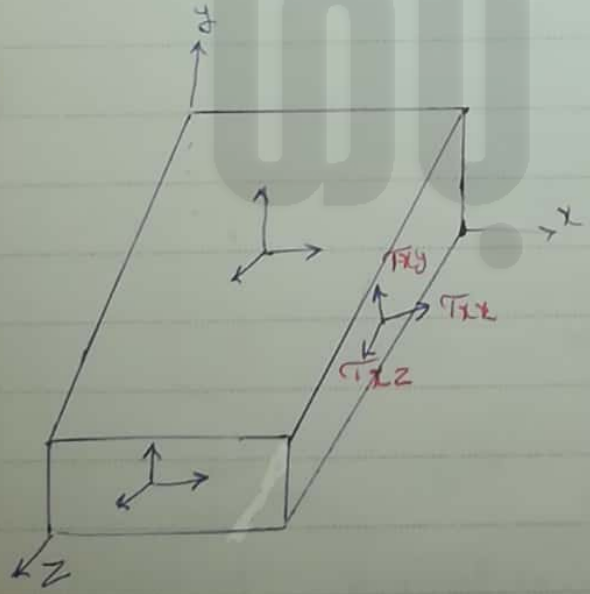


تنش: شدت نیرو عمود بر مقطع

تنش قائم نامیده می‌شود.

اگر ایجاد تنش در مقطع شود تنش کششی

اگر ایجاد فشار در مقطع شود تنش فشاری

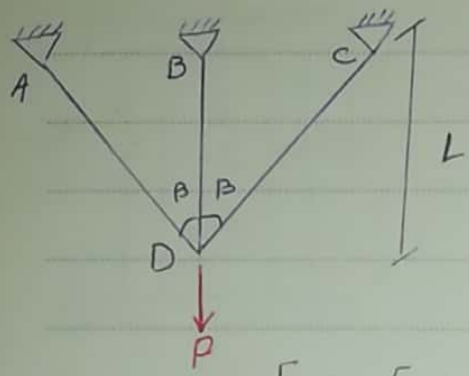


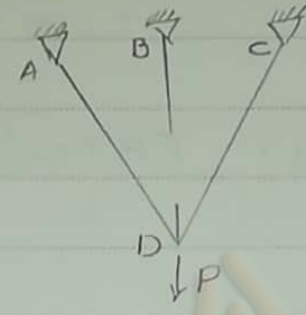
τ = تنش برشی

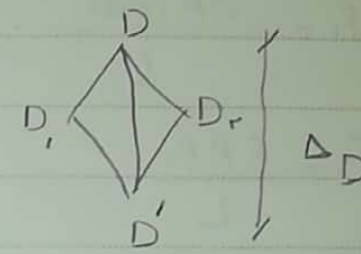
σ = تنش نرمال (قائم)

Subject
Date

مثال) روش نیروها:





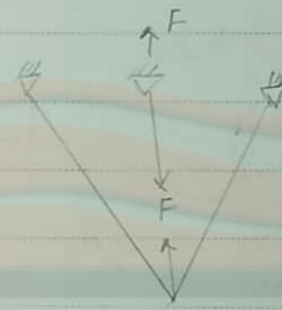


$$F_{AD} = F_{CD} = \frac{P}{2\cos\beta}$$

$$\overline{DD_1} = \overline{DD_2} = \frac{\frac{P}{2\cos\beta}\,\frac{L}{\cos\beta}}{EA} = \frac{PL}{2EA\cos^2\beta}$$

$$\downarrow \Delta_D = DD' = \frac{DD'}{\cos\beta} = \frac{PL}{2EA\cos^3\beta}$$ جابجایی نقطه P

$$\uparrow \Delta_{BD} = \frac{AL}{2EA\cos^2\beta}$$ F = جابجایی نقطه



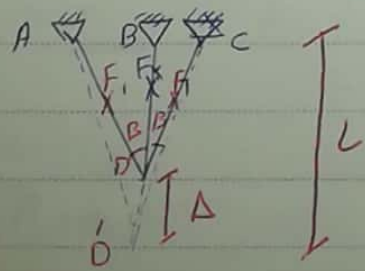
تغییرمکان نقطه یا نقاط مفصل D در راستا با افزایش طول میله‌ای BD

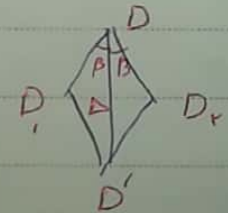
$$\downarrow \Delta_D - \uparrow \Delta_{BD} = \frac{FL}{EA} \quad (F = R_{yB}) \Rightarrow \frac{PL}{2EA\cos^3\beta} - \frac{R_{yB}}{2EA\cos^3\beta} = \frac{R_{yB}\,L}{EA}$$

$$F = R_{yB} = \frac{P}{1+2\cos^3\beta}$$

$$R_{yA} = R_{yC} = \frac{P\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}$$

روش تغییرمکان: مجهول تغییرمکان نقطه D





$DD_1 = DD_2 = \Delta \cos\beta$

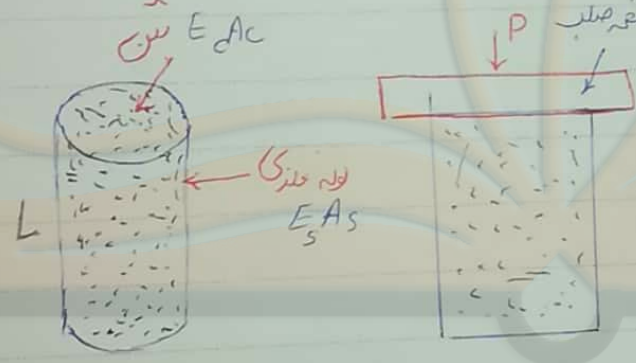
$$F_1 = \frac{EA\cos\beta}{L}(\Delta\cos\beta) = \frac{EA\,\Delta\cos^2\beta}{L}$$

$$F_2 = \frac{EA\Delta}{L}$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad 2F_1\cos\beta + F_2 = P \Rightarrow 2\left[\frac{EA\,\Delta\cos^3\beta}{L}\right] + \frac{EA\Delta}{L} = P$$

$$\Delta = \frac{PL}{EA}\,\frac{1}{1+2\cos^3\beta}$$

جابجایی F_1 و F_2 به دست آورید.

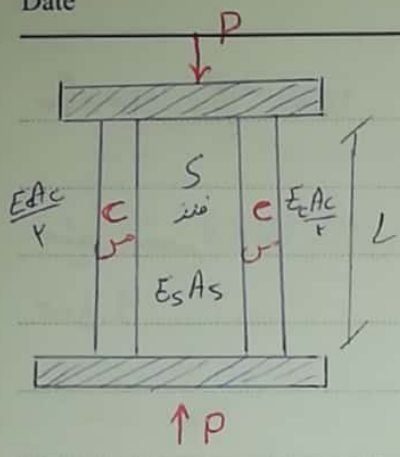


مثال) چه مقدار از نیروی P را بتن و چه مقدار لوله تحمل می‌کند.

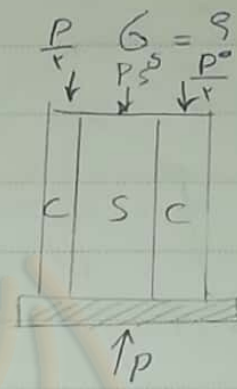
جزوه باما

Subject

Date



$\sigma_c = ?$



روش نیروها:

$\sum F_y = 0 \qquad P_s + P_c = P$

$\Delta_s = \Delta_c \Rightarrow \frac{P_s L}{EA} = \frac{P_c L}{E_c A_c}$ } دو معادله دو مجهول

$P_s = \frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c} P \quad , \quad P_c = \frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c} P$

$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{E_s}{E_s A_s + E_c A_c} P \qquad \sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = \frac{E_c}{E_s A_s + E_c A_c} P$

ε نشان‌ها $= \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{P}{E_s A_s + E_c A_c}$

روش تغییر طول: تغییر طول نشان‌دهنده Δ بین دو سطح انتهایی (کاهش طول استوانه فولادی، مس)

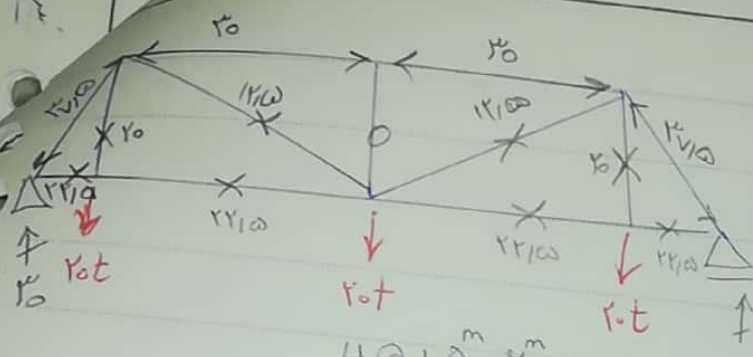
$P_s = \frac{E_s A_s \Delta}{L} \qquad P_c = \frac{E_c A_c \Delta}{L}$

$P_s + P_c = P$

$P \frac{E_s A_s \Delta}{L} + \frac{E_c A_c \Delta}{L} = P$

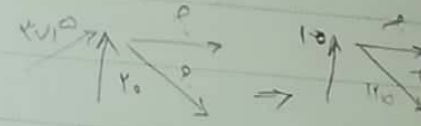
$\Delta = \frac{PL}{E_s A_s + E_c A_c}$ جایگذاری P_s و P_c بدست می‌آید.

P4PCO



تنش مجاز $1500\ kg/cm^2$

سطح مقطع لازم برای طراحی خربا؟



$\frac{۳۰}{۲} \times ۱.۵ = ۲۲.۵$

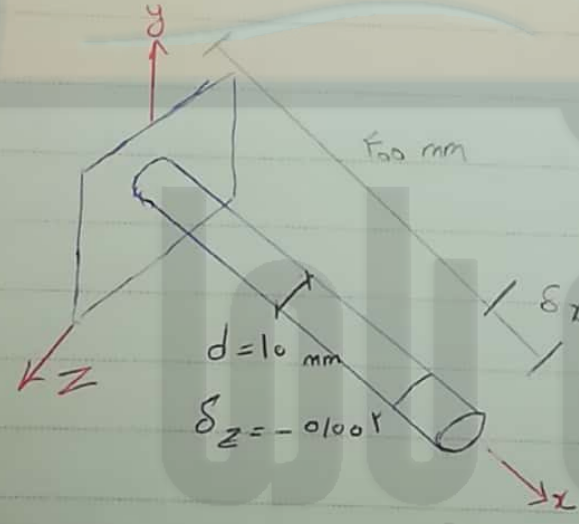
$\frac{۳۰}{۲} \times ۴.۵ = ۶۷.۵$

$F_{max} = ۶۷.۵$

$\sigma = \frac{P}{A}$

$\sigma_{مجاز} = 1500\ \frac{kg}{cm^2} = \frac{۶۷.۵ \times ۱۰^۳}{A} \Rightarrow A = ۴۵\ cm^2$ لازم

مثال) از قطعه میله به اندازه‌ی $0.002\ mm$ کشیده شده است. مطلوب است تعیین ضریب ارتجاعی E و ضریب پواسون ν



$A = \pi r^2 = ۳.۱۴ \times ۵^2 =$

$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{۲۰ \times ۱۰^۳}{۷۸.۵} = ۲۵۵\ N/mm$

$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{۰.۰۴}{۴۰۰} = ۰/۰۰۰۱\ \frac{mm}{mm}$

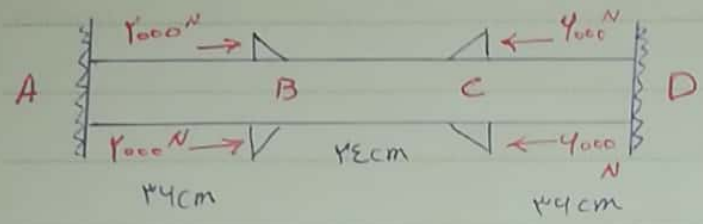
$\varepsilon_y = \frac{\delta_y}{L} = \frac{-۰.۰۰۰۲}{۱۰} = -۰/۰۰۰۰۲\ \frac{mm}{mm}$

$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{۲۵۵}{۰/۰۰۱} = ۲۵۵۰۰۰\ N/mm^2$

$\nu = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{-۰/۰۰۰۲}{۰/۰۰۱} = -۰/۲$

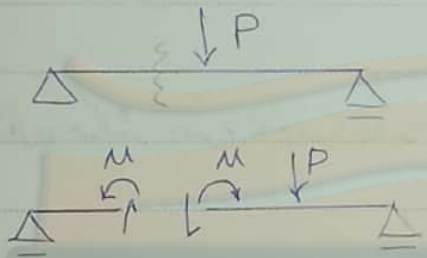
Subject
Date

نیروی کشش یا فشاری بین نقاط CD و CB , AB چقدر است؟



خمش خالص تیرها (تنش های خمشی)

خطوط مستقیم پس از خمش به صورت مستقیم باقی می مانند یعنی جابه جایی های مابین آن کوچک است. (اصل در لبه سوم)

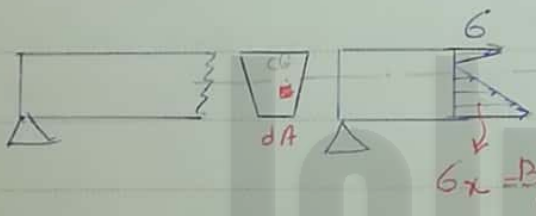


$\sigma_x = E\varepsilon_x$

$\sigma_x = By$

$\leftarrow$ عدد ثابت

یعنی تغییرات تنش به صورت خطی می باشد.



$\sum F_x = 0 \qquad \int_A \sigma_x \, dA = 0$

$\int_A (By)\, dA = B \overrightarrow{\neq 0} \int_A y \, dA = 0$

با استفاده از تعریف هندسی $\int_A y\,dA = \bar{y}A$ ($\bar{y}$ فاصله مرکز هندسی سطح A از محور خنثی)

$\bar{y}A \overrightarrow{\neq 0} = 0$ پس $\bar{y}$ باید صفر شود. بنابراین فاصله مرکز هندسی سطح مقطع از محور خنثی باید صفر باشد و به بیان دیگر:

« محور خنثی باید از مرکز هندسی سطح مقطع تیر عبور کند »

$\Sigma M_z = 0$

$M + \int_A (\sigma_x \, dA)\, y = 0$ (نیرو)

$\sigma_x = By$

$M = -B \int_A y^2 dA$

ممان اینرسی

$M = -By$

$B = -\frac{M}{I}$ مقدار ثابت

$\sigma_x = -\frac{My}{I}$

برای $M+$ و $y+$ تنش قائم منفی است.

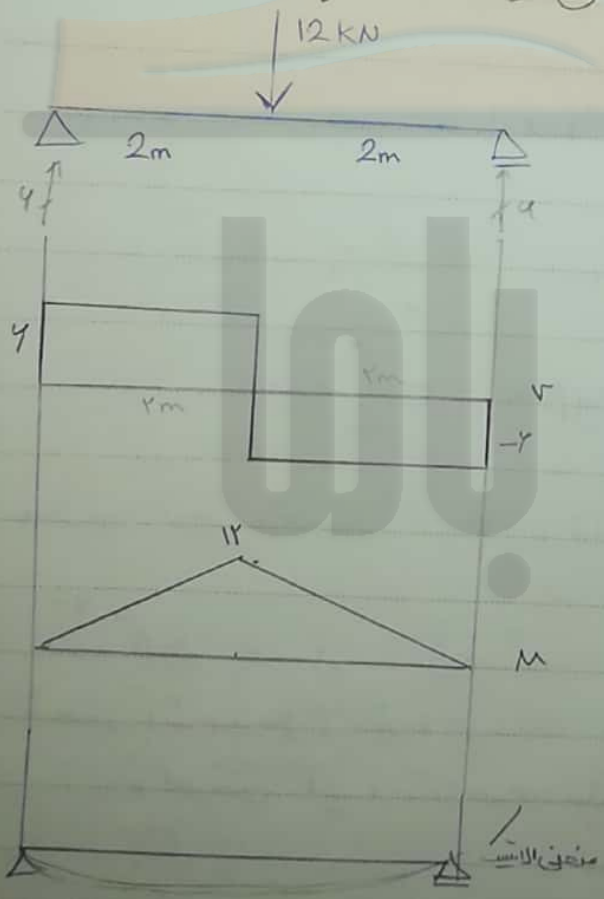
(به عبارت دیگر فشاری است)

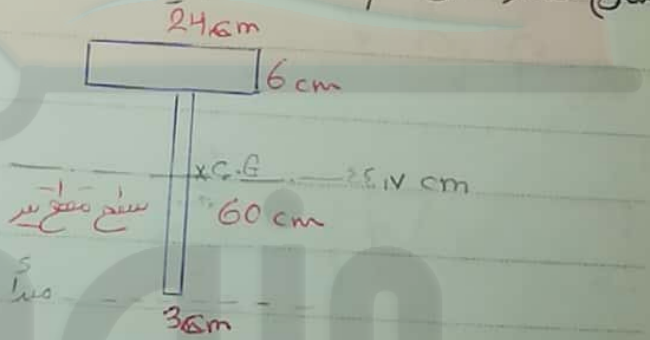
$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I}$ $\quad c = y_{max}$

$\sigma_{max} = \frac{M}{S}$ $\quad S = \frac{I}{c}$

اساس تیر مقطع ←

مثال: حداکثر تنش قائم فشاری و هم‌چنین کششی در سازه‌ی نشان داده شده را حساب کنید.





$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{(24\times6)(63)+(3\times60)(30)}{(24\times6)+(3\times60)}$

$= 44.17$ cm

$I_{N.A} = I^{\circ} + Ad^2$

$\frac{24\times6^3}{12} + (24\times6)(63-44.17)^2$

$+ \frac{3\times60^3}{12} + (3\times60)(44.17-30)^2 =$

$= 141553$ cm^4

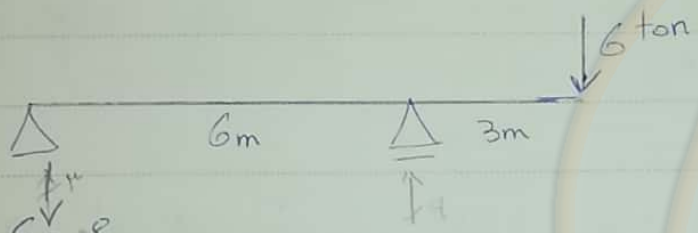
Subject

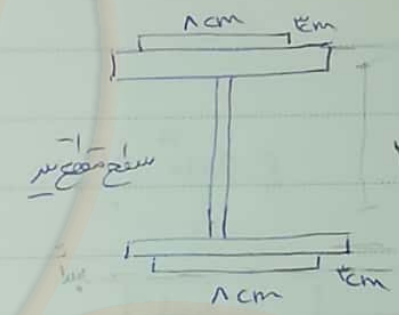
Date

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} y_{max}}{I} = \frac{M_{max} C}{I}$$

$$= \frac{12 \times 100 \text{ cm} \times 44 \text{ cm}}{14400 \text{ cm}^4} = 0.4 \frac{KN}{cm^2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{(12 \text{ KN.m} \times 100 \text{ cm})(21.4 \text{ cm})}{14400} = 0.2 \frac{KN}{cm^2}$$





(مثال)

سطح مقطع سر

IPE 270 $\begin{cases} A = 45.9 \\ I = 5790 \end{cases}$

$$I_{NA} = I_0 + Ad^2$$

$$5790 + 2\left[\frac{8(3)^3}{12} + (3 \times 8)(11.5)^2\right]$$

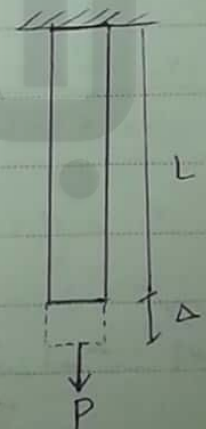
$$\sigma_{max} = \sigma_{max} = \frac{(12 \times 10^5)(14)}{8424}$$

$$= 8424 \text{ cm}^4$$

$$= 2811 \text{ kg/cm}^2$$

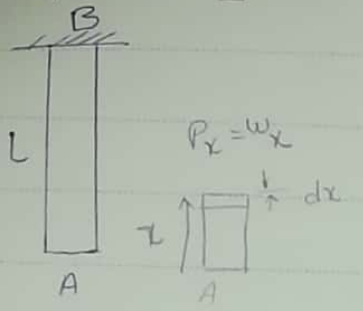
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon = \frac{\Delta}{L} \end{cases}$$

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta}{L} \Rightarrow \Delta = \frac{\sigma L}{E} \Rightarrow \Delta = \frac{PL}{AE}$$



$$d\Delta = \varepsilon dx = \frac{P dx}{AE} \qquad \Delta = \int_0^L \frac{P dx}{AE}$$

مثال) مطلوب است تعیین تغییر طول انتهای آزاد A تحت اثر وزن خود میله ($w \frac{N}{m}$)



راه اول:

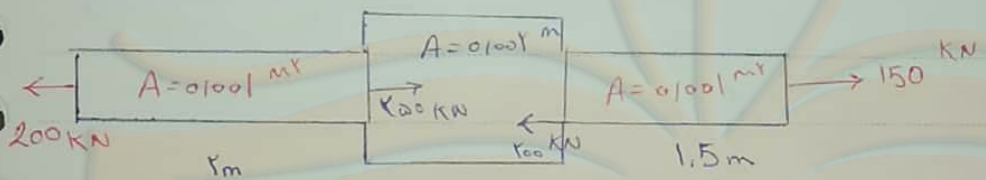
$$\Delta = \int_0^L \frac{P}{AE}\,dx = \frac{1}{AE}\int_0^L w x\,dx$$

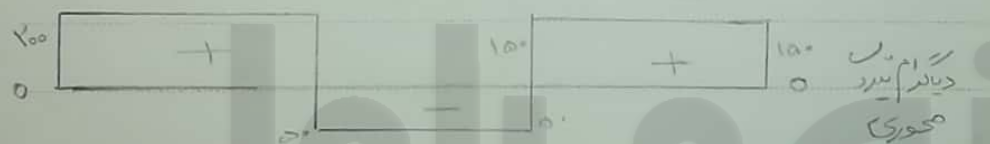
$$= \frac{w x^2}{2AE}\Big|_0^L = \frac{wL^2}{2AE}$$

راه دوم:

$$\Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{wL\left(\frac{L}{2}\right)}{AE} = \frac{wL^2}{2AE}$$

مثال) مطلوب است تعیین تغییر طول نسبی نقاط D , A $E = 2\times10^5 \frac{N}{mm^2}$

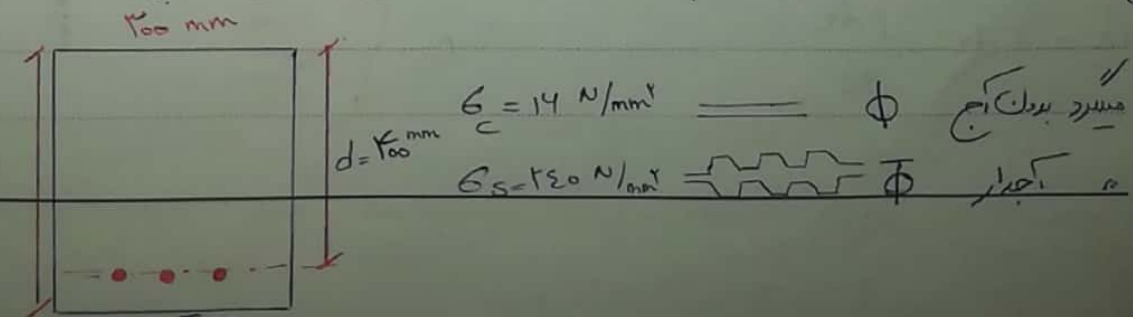




$$\Delta = +\frac{(200\times10^3)(2000)}{1000\times2\times10^5} - \frac{(50\times10^3)(1000)}{2000\times2\times10^5} + \frac{(150\times10^3)(1500)}{1000(2\times10^5)} =$$

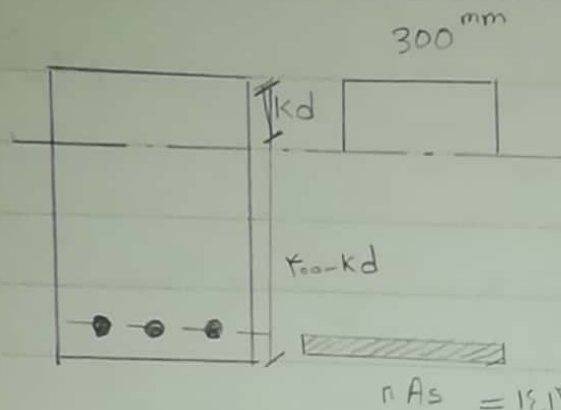
$$= 2 - 0.125 + 1.125 = +3\ mm$$ افزایش طول

مثال) حداکثر مقدار لنگری که مقطع تیر بتنی نشان داده شده می‌تواند تحمل کند چقدر است. (بتن f'_c=25 MPa)



PAPCO

Subject
Date



$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{14} = 15$

$A_s = 2\left(\frac{\pi \times 20^2}{4}\right) = 628 \text{ mm}^2$

$nA_s = 15(628) = 14130 \text{ mm}^2$

تبدیل ایجاد شده در بالا و پایین N.A باهم برابرند.

$(300 \times kd)\left(\frac{kd}{2}\right) = 14130(400 - kd)$

سطح تحت فشار — بازو — سطح منفع معادل یافته متمرکز — بازو

$(kd)^2 + 94.2(kd) - 37680 = 0$

$kd = 246 \qquad 400 - kd = 154$

$I_{N.A} = \frac{300(246)^3}{12} + 300 \times 246\left(\frac{246}{2}\right)^2 + 0 + 14130(154)^2 = 716 \times 10^6$

$f_c = \frac{Mc}{I} \Rightarrow 16 = \frac{M(246)}{716 \times 10^6} \Rightarrow M = 46.5 \times 10^6 \text{ N.mm} = 46.5 \text{ KN.m}$

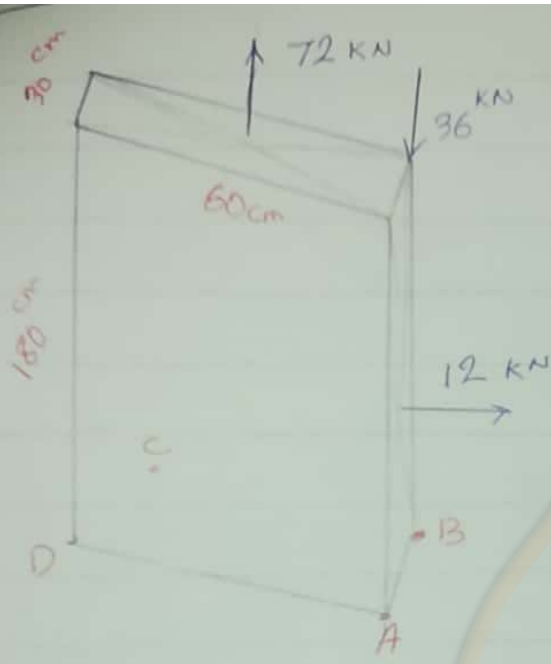
$f_s = n\left(\frac{Mc}{I}\right) \Rightarrow 240 = 15\frac{M(154)}{716 \times 10^6} \Rightarrow M = 74.4 \times 10^6 \text{ N.mm} = 74.4 \text{ KN.m}$

$M_{max} = 46.5 \text{ KN.m}$

PAPCO

مثال مهم:

$$\sigma_A = \sum \frac{P}{A} + \sum \frac{Mc}{I}$$



$$I_{x-x} = \frac{60(30)^3}{12} = 135 \times 10^3$$

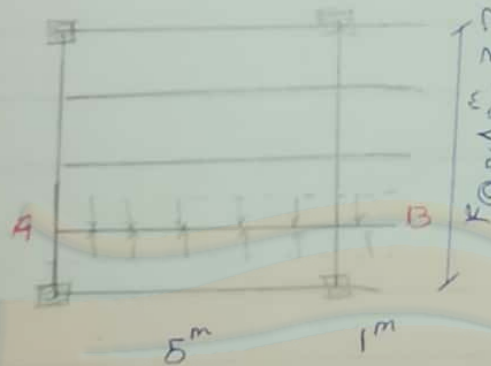
$$I_{y-y} = \frac{30(60)^3}{12} = 540 \times 10^3$$

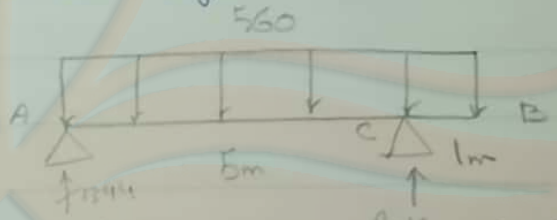
$$\sigma_A = \frac{72\times10^3}{1800} + 0 - \frac{44\times10^4}{1800} \quad \frac{44\times10^4\times15}{540\times10^3}$$

- مطلوب است طراحی تیر AB

$DL = 500 \ kg/m^2$

$LL = 200 \ kg/m^2$



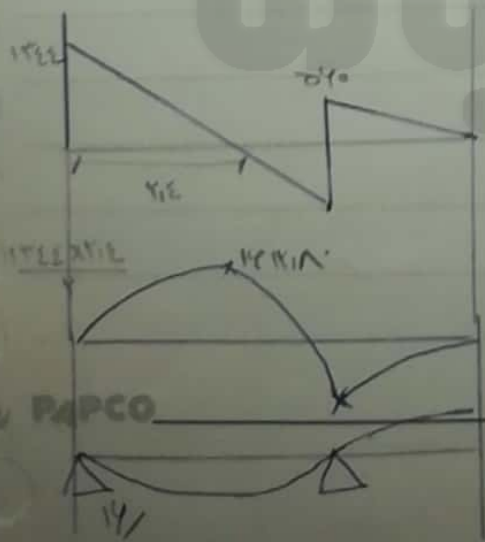


$W = (500 + 200)(0.80) = 560 \ kg/m$

تنش مجاز $\sigma_{all} = 1440 \ kg/cm^2$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_{y_C}(5) - 560 \times 6 \times 3 = 0 \Rightarrow R_{y_C} = 2016 \ kg$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{y_A} + 2016 - 560 \times 6 = 0 \Rightarrow R_{y_A} = 1344$$



$$\frac{x}{1344} = \frac{5-x}{1456} \Rightarrow x = 2.4$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{\frac{I}{c}} = \frac{M}{S} \rightsquigarrow \text{اساس مقطع}$$

$$\sigma_{all} = \frac{M_{max}}{S} \Rightarrow 1440 = \frac{470400}{S}$$

منفق الاستيك $S = 111 \ cm^3$

Subject
Date

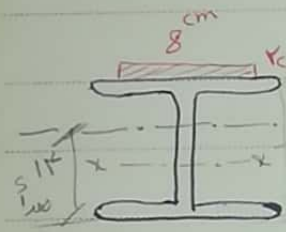
INP 16 ⟶ $S = 117\ cm^3$ } جدول آسال

Choose ⟶ INP16 $S = 117 > 114\ cm^3$

$\sigma_{max} = ?$ در کشی

$\sigma_{max} = ?$ در فشاری $\sigma_{max} = \frac{M_{max} C}{I} = \frac{M_{max}}{S} = 114$

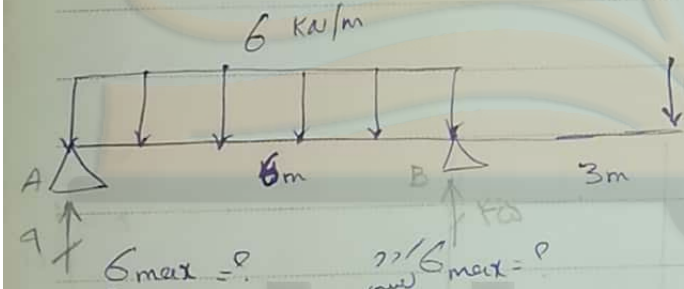
C: فاصله‌ی خنثی تا دورترین تار



IPE 20 { $A = 28.5\ cm^2$; $I_{x-x} = 1940\ cm^4$

سؤال امتحانی:

$h = 200$



$\sum M_A = 0 \Rightarrow -4 \times 9 \times 2 - 18 \times 9 = 0$

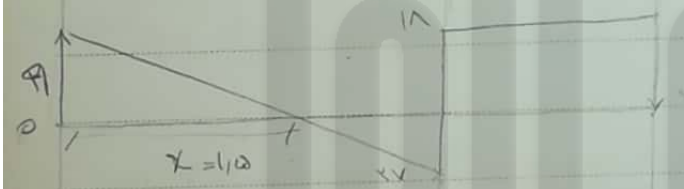
$R_{yB} = 34$

$\sum F_y = 0 \quad R_{yA} + 34 - 4 \times 9 - 18 = 0$

$R_{yA} = 21$

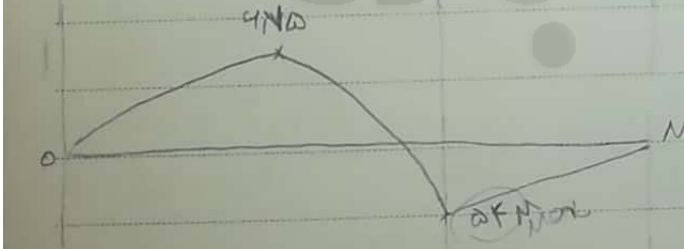
$\sigma_{max} = ?$ فشاری

$\sigma_{max} = ?$ در کشی



$\bar{y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = \frac{2810 \times 10 + (18 \times 2)(21)}{2810 + 18 \times 2}$

$\bar{y} \cong 14$

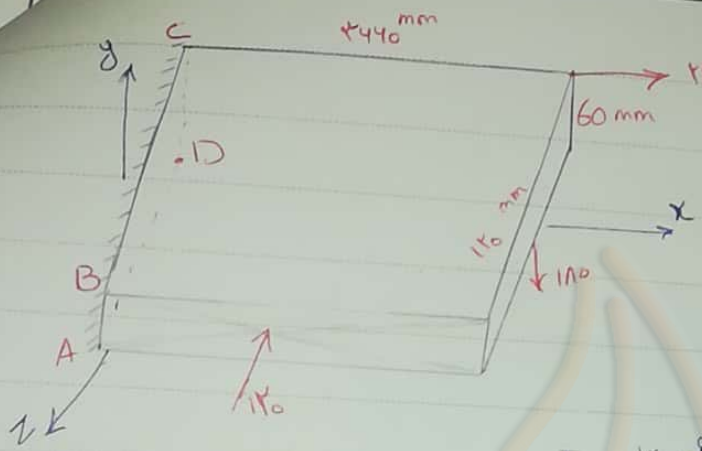


$I_{N.A} = 1940 + 2810 (14 - 10)^2 + \frac{18 \times 2^3}{12} + 14(21 - 14)^2 = 3180$

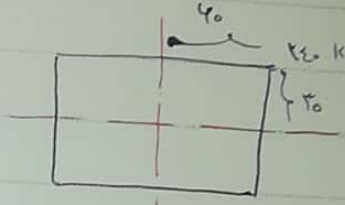
فشاری $\sigma = \frac{MC}{I} = \frac{42 \times 14}{3180} = 2.37$

در کشی $\sigma = \frac{MC}{I} = \frac{42 \times (22 - 14)}{3180} = 0.135$

مثال مهم.. امتحان:



$\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D = ?$



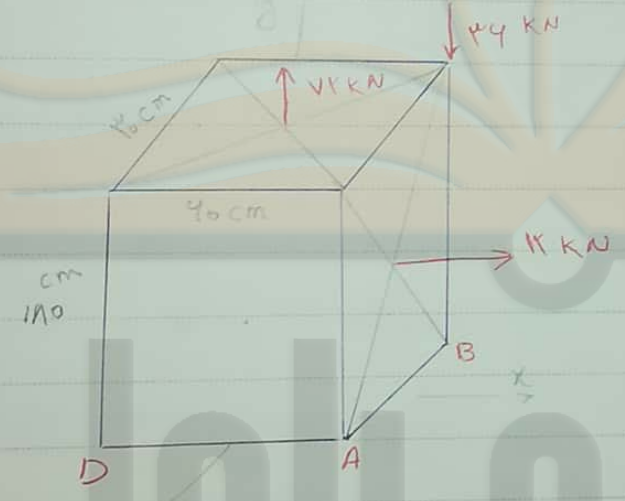
$$I = \frac{۱۲۰ \times ۴۰^۳}{۱۲} = ۶۴ \times ۱۰^۴$$

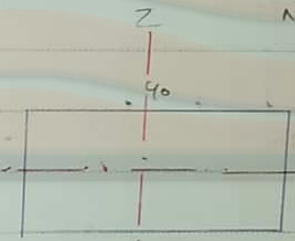
$$I = \frac{۴۰(۱۲۰)^۳}{۱۲} = ۴۶۴ \times ۱۰^۴$$

$$\sigma_A = + \frac{۳۴۰}{۱۲۰ \times ۴۰} - \frac{(۱۲۰ \times ۴۰)(۴۰)}{۶۴ \times ۱۰^۴} - \frac{(۱۱۰ \times ۲۴۰۰)(۲)}{۲۱۴ \times ۱۰^۴}$$

$$+ \frac{(۱۲۰ \times \frac{۲۴۰۰}{۲})(۴۰)}{۸۴۰ \times ۱۰^۴}$$

مثال





$$I_{z-z} = \frac{۳۰(۴۰)^۳}{۱۲} = ۶۴۰ \times ۱۰^۴$$

$$I_{x-x} = \frac{۴۰(۳۰)^۳}{۱۲} = ۹۰ \times ۱۰^۴$$

$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \mp \frac{MC}{I}$$

$$\sigma_A = + \frac{۷۲}{۱۸۰۰} - \frac{(۱۲ \times ۹۰)(\frac{۴۰}{۲})}{۶۴۰ \times ۱۰^۴} - \frac{(۴۴ \times \frac{۴۰}{۲})(\frac{۴۰}{۲})}{۶۴۰ \times ۱۰^۴} - \frac{۴۴}{۱۸۰۰} + \frac{(۴۴ \times \frac{۳۰}{۲})(\frac{۳۰}{۲})}{۹۰ \times ۱۰^۴}$$

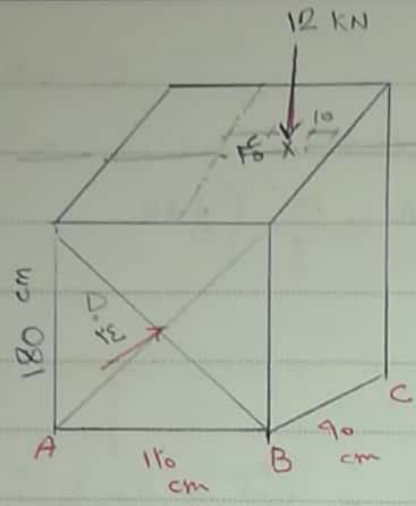
$\sigma_B = +$ // $-$ // $-$ // $-$ // $-\frac{۴۴}{۱۸۰۰} =$

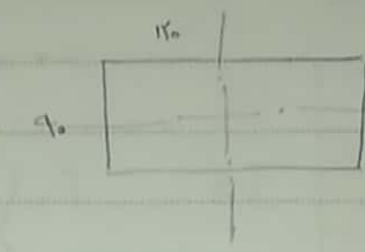
$\sigma_C = +$ // $+$ // $+$ // $-$ // $-$ // $-$

$\sigma_D = +$ // $+$ // $+$ // $+$ // $-$ // $+$

Subject

Date





$$I_{z-z} = \frac{90 \times 120^3}{12} = 1296 \times 10^4$$

$$I_{x-x} = \frac{120 \times 90^3}{12} = 729 \times 10^4$$

$$\sigma = \mp \frac{P}{A} \mp \frac{Mc}{I}$$

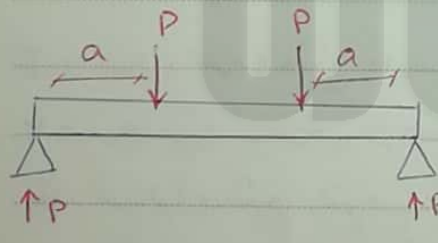
$$\sigma_A = -\frac{12}{10800} + \frac{(12 \times 10)(\frac{90}{2})}{729 \times 10^4} + \frac{(12 \times F_0)(\frac{120}{2})}{1296 \times 10^4} + \frac{(24 \times \frac{110}{2})(\frac{90}{2})}{729 \times 10^4}$$

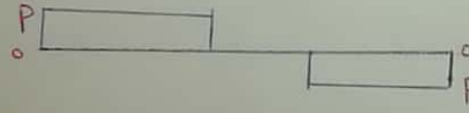
$\sigma_B =$ — " + " — " + "

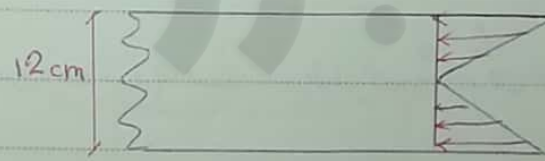
$\sigma_C =$ — " — " — " — "

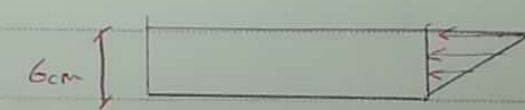
$\sigma_D =$ — " — " + " — "

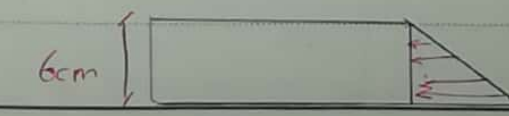
سختی : $\begin{cases} I \\ E \\ L \end{cases} \Rightarrow \frac{EI}{L}$



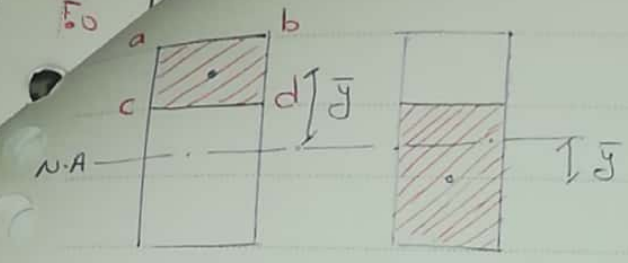








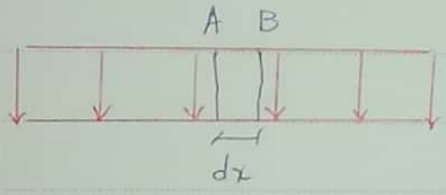
PARCO



$$\sigma_x = \frac{My}{I}$$

$$F = \int \frac{My}{I} dA = \frac{M}{I} \int y dA$$

$$= \frac{MQ}{I}$$



$Q = \int y dA = A\bar{y}$ = گشتاور اول حول محور خنثی

سطح abcd

رابطه ای که برای نیروی تفاضلی طولی در فاصله dx که ممکن است کششی یا فشاری باشد، عبارتند از

$$dF = |F_B| - |F_A| = \left(\frac{M_A + dM}{I}\right) Q - \left(\frac{M_A}{I}\right) Q = \frac{dM}{I} Q$$

از لحاظ فیزیکی این کمیت نشان دهنده‌ی اختلاف بین F_A ، F_B برای قطعه‌ای از تیر به طول واحد می باشد.

$$\frac{dF}{dx} = q \quad N/mm$$

جریان برش

تغییرات F در فاصله‌ی dx ، q نامیده می‌شود. $dM = V dx$

$$q = \frac{dF}{dx} = \left(\frac{dM}{dx}\right) \frac{1}{I} \int y dA = \frac{V A_{abcd} \bar{y}}{I} = \frac{VQ}{I}$$

$$q = \frac{VQ}{I}$$

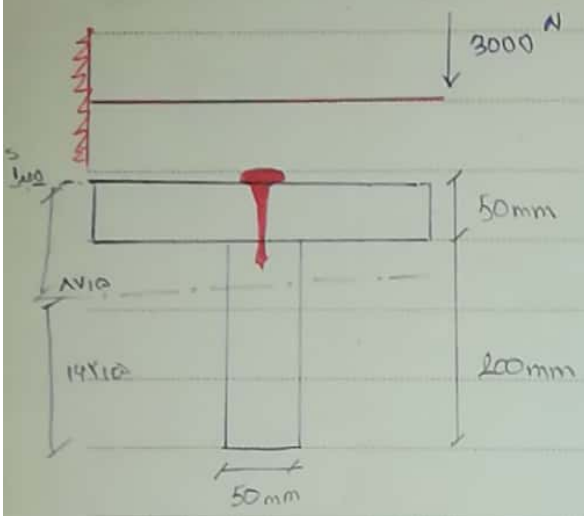
I : ممان اینرسی مقطع کل نسبت به N.A

V : نیروی برشی کل موجود در مقطع

Q : گشتاور اول سطح واقع در بالا یا پایین (تراز) مورد نظر برای محاسبه q است که در طول محور شانه کل مقطع حساب می‌شود.

Subject
Date

مثال) با اتصال دو الوار به یکدیگر یک تیر با مقطع سپری ساخته‌ایم. این تیر برش ثابتی به مقدار 3000 N را انتقال میدهد. مطلوب است: فاصله‌ی میخ‌هایی که دو قطعه الوار را به صورت یک واحد یکپارچه در می‌آورند.



نیروی برشی مجاز هر میخ معادل 2000 N فرض کنید.

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A} = \frac{(50\times200)(25)+(50\times200)(150)}{50\times200+50\times200} = 87.5$$

$$I = \frac{200(50)^3}{12} + (50\times200)(42.5)^2 + \frac{50(200)^3}{12} + (50\times200)(42.5)^2$$

$$= 113.5\times10^6\ mm^4$$

$$Q = A\bar{y} = (50\times200)(87.5-100) = 125\times10^3$$

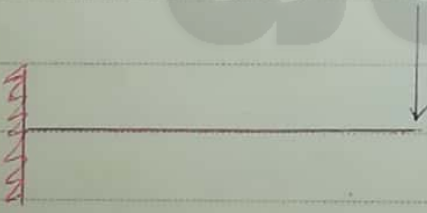
$$\rightarrow\ (50\times200)(187.5-100) = 437.5\times10^3$$

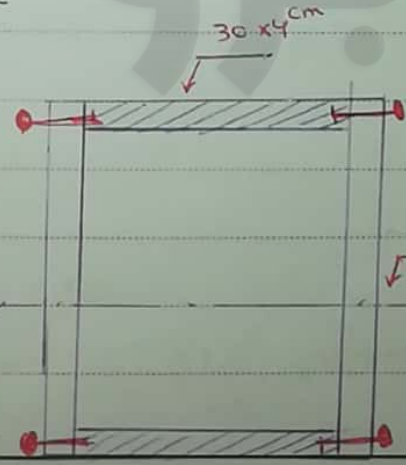
$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{3000\times(437.5\times10^3)}{113.5\times10^6} = 11.6\ N/mm$$

بنابراین در هر میلی‌متر از طول تیر، نیروی معادل 11.5 N/mm از ریز الوار به الوار دیگر باید منتقل شود. هر میخ توانایی مقابله با 2000 N نیرو را دارد. بنابراین $\frac{2000\ N}{11.5\ N/mm} = 121\ mm = 12.1\ cm$.

در مسائل عملی فاصله‌ی میخ‌ها را $\frac{10}{cm}$ می‌گیریم.

مثال)





نیروی برشی مجاز هر میخ = F = 1 KN

فاصله‌ی میخ‌ها = ؟

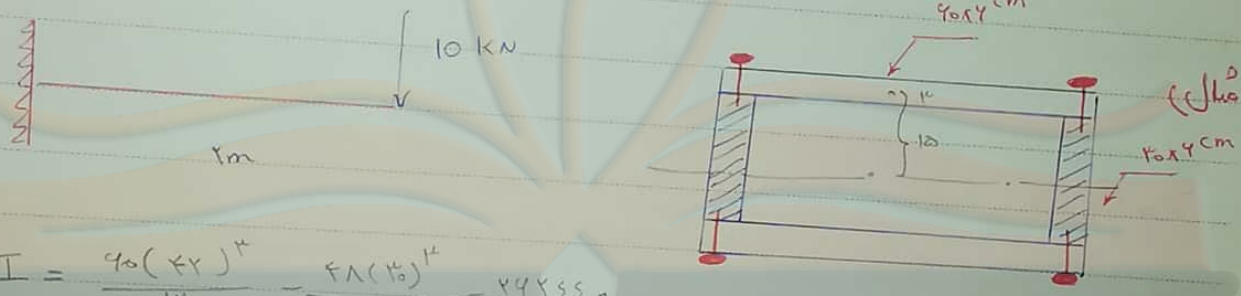
$$I = \frac{42(40)^3}{12} - \frac{30(38)^3}{12} = 47943.25\ cm^4$$

$$Q = A\bar{y} = (30\times 4)\left(\frac{40}{2} - \frac{4}{2}\right) = 4840\ cm^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(10\times 10^3\ N)\times 4840}{47943.25} = 1011.4\ N/cm$$

$$F = qS \Rightarrow S = \frac{F}{q} = \frac{1000\ N}{\frac{1011.4}{2}\ N/cm} = 19.7\ cm$$

مسائل عملی $S = 10\ cm$



مثال

$$I = \frac{40(42)^3}{12} - \frac{38(30)^3}{12} = 42433.0$$

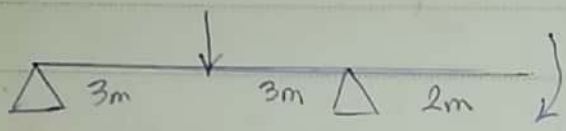
$$Q = A\bar{y} = (40\times 4)(10+2) = 1920$$

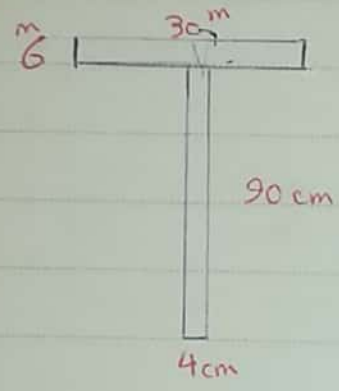
$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{10\times 10^3\ (1920)}{42433.0} = 452.7$$

$$F = qS \Rightarrow S = \frac{F}{q} = \frac{1000}{\frac{452.7}{2}} = 4.4\ cm$$

مسائل عملی $S = 4\ cm$

سؤال سوم: (۸ نمره، امتحان میان‌ترم)



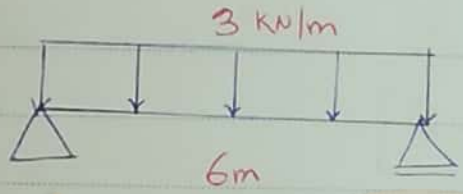


الف) مطلوب است بررسی مقطع نسبت به تار خنثی
$I_{x-x} = ?$ (۲ نمره)

ب) رسم دیاگرام نیروی برشی و خمشی (۲ نمره)

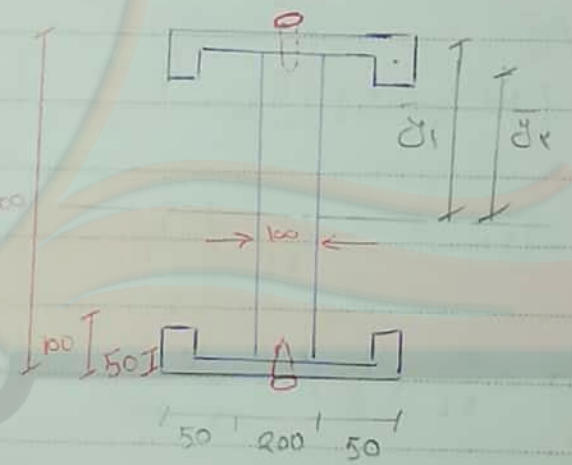
پ) فاصله‌ی میخ‌هایی که دو الوار را به صورت یکپارچه درآورده‌اند. نیروی مجاز هر میخ ۱ KN (۳ نمره) (در بحرانی‌ترین قسمت)

ت) حداکثر تنش قائم کششی $\sigma_{max} = ?$ (۲ نمره)



هر میخ قدرت انتقال ۲ KN را دارد
فاصله‌ی میخ‌ها در بحرانی‌ترین قسمت؟

مثال)



$Q = A\bar{y} = 2A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2$

$Q = 2(300 \times 100)\,200 + (900 \times 200)(225) = 4{,}725 \times 10^4$

$I_{N.A} = 2344 \times 10^9\ mm^4$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(9 \times 10^3)(4{,}725 \times 10^4)}{2{,}134 \times 10^9} = 14.2$$

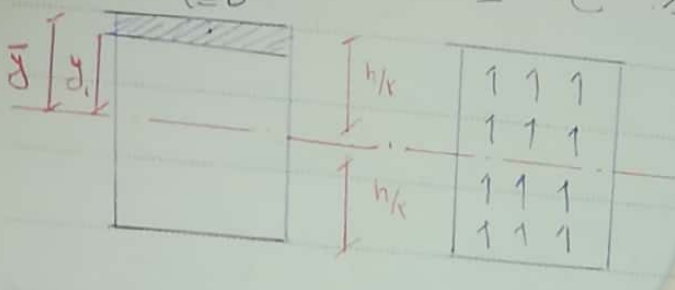
$$\frac{2 \times 10^3}{14.2} = 142\ mm = 12.3\ cm \qquad V = 4.5$$

$$q = \frac{(4.5 \times 10^3)(4{,}725 \times 10^4)}{2{,}134 \times 10^9} = 8.1\ N/mm \qquad \frac{2 \times 10^3}{8.1} = 242\ mm = 24.3\ cm$$

$$\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{q}{t} \quad {}^{N/mm} = \frac{VQ}{It} \quad {}^{N/mm^2}$$

مثال) رابطه‌ای برای تغییرات تنش برشی در ارتفاع یک تیر با مقطع مستطیل توپر به تیر برشی قائم

$t = b$



$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A}$$

$$\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{VQ}{It}$$

$$Q = A\bar{y}$$

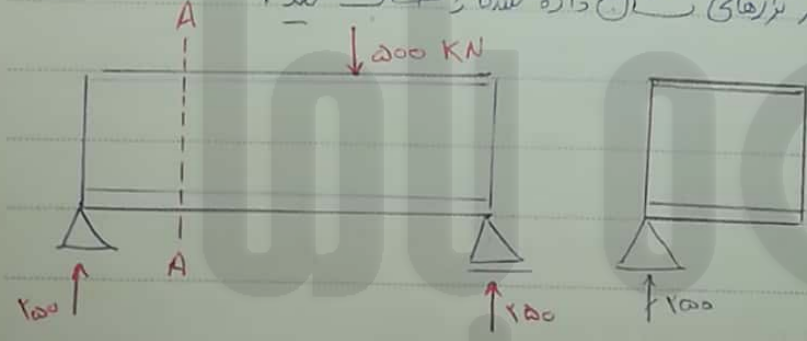
$$Q = \left[b\left(\frac{h}{2} - y_1\right)\right]\left[y_1 + \frac{\frac{h}{2} - y_1}{2}\right] = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y_1^2\right]$$

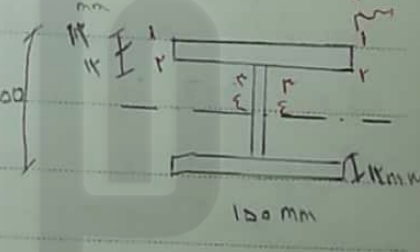
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau = \frac{V}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y_1^2\right]$$ سهمی

$$\tau_{max} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{V}{2\,\frac{bh^3}{12}}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$ وقتی

$y_1 = 0$

مثال) تیر مقطع A-A تنشهای برشی در نقاط نشان داده شده را حساب کنید.





$$\tau = \frac{q}{t}, \quad q = \frac{VQ}{I}, \quad \tau = \frac{VQ}{It}$$

$$I = \frac{150 \times 300^3}{12} - \frac{138\,(276)^3}{12} = 90.17 \times 10^6$$

$$\frac{V}{I} = \frac{250 \times 10^3}{90.17 \times 10^6} = 2.91 \times 10^{-3} \quad N/mm$$

تراز	A	$\bar{y}$	$Q=A\bar{y}\times10^{-3}$	$q=\frac{VQ}{I}$	t	τ
۱-۱	۰	۱۵۰	۰	۰	۱۵۰	۰
۲-۲	۱۲(۱۵۰) = ۱۸۰۰	۱۴۴	۲۵۹۱۲	۴۷۷	۱۵۰	۳۱۵
۳-۳	۱۲(۱۵۰) = ۱۸۰۰ ۱۲(۱۲) = ۱۴۴	۱۴۴ ۱۳۲	۲۵۹۱۲ ۱۹۱۵ } ۲۷۸۲۷	۷۲۶	۱۲ ۱۴	۵۶۱۴
۴-۴	۱۲(۱۵۰) = ۱۸۰۰ ۱۲(۱۲۸) = ۱۴۵۶	۱۴۴ ۶۴	۲۵۹۱۲ ۱۱۴۱۴ } ۳۷۳۲۵	۹۷۵	۱۲	۶۵۱۵ ۸۱۱۴

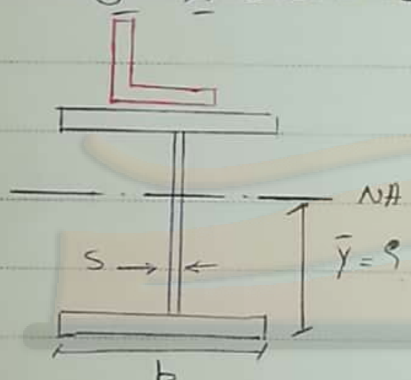
مثال) سطح مقطع تیر زیر از IPE 27 و نبشی L100 × 100 × 10 (mm) ها تشکیل شده است مطلوب است:

الف) ممان اینرسی مقطع نسبت به تار خنثی؟ ۳ نمره

ب) رسم دیاگرام های نیروی برشی و لنگر خمشی و محل اثر؟ ۳ نمره

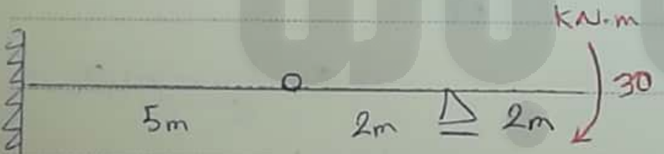
پ) حداکثر تنش قائم فشاری؟ ۲ نمره

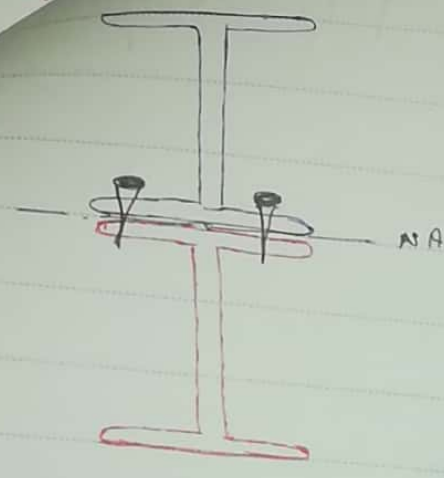
ت) حداکثر تنش برشی؟ ۳ نمره



L100×100×10: A = ۱۹٫۲ ، e = ۲٫۸۲ ، $I_x = I_y$ = ۱۷۷

IPE۲۷: A = ۴۵٫۹ ، I_x = ۵۷۹۰ ، t = ۱٫۰۲ ، S = ۰٫۶۶





INP 14 $\begin{cases} I_{x-x} = 572 \text{ cm}^4 \\ A = 18.2 \text{ cm}^2 \end{cases}$

$\rho = 2$ بدون مجاز

پیچ شماره 10 $\phi = 10 \text{ mm}$

فاصله‌ی طولی پیچ‌ها $S = 20 \text{ cm}$

تنش مجاز هر پیچ $\tau = 80 \text{ mPa}$

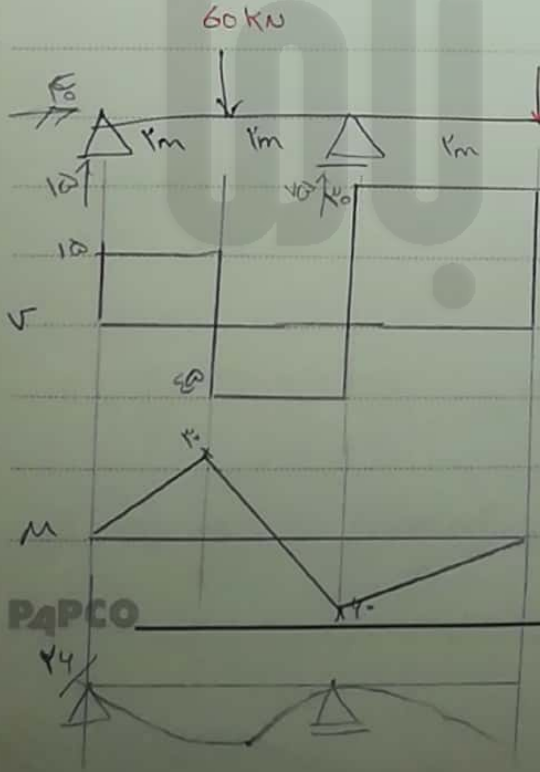
$$I_{N.A} = 2\left\{572 + 18.2 \times 27^2\right\} = 2929 \text{ cm}^4$$

$$Q = 18.2\,(7) = 127.4 \text{ cm}^3$$

$$\text{نیروی هر پیچ} = F = \tau_{allow} A = 80 \text{ mPa} \times \frac{\pi}{4}(0.01)^2 = 6280 \text{ N}$$

$$q = \frac{2F}{S} = \frac{2(6280)}{0.2} = 62800 \text{ N/m}$$

$$q = \frac{VQ}{I} = 62800 = \frac{V(127.4\times10^{-6})}{2929\times10^{-8}} \Rightarrow V = 14438 \text{ N}$$



مثال:

INP 14 $\begin{cases} A = 18.2 \text{ cm}^2 \\ S = \frac{I}{C} = 81.9 \end{cases}$

ماکزیمم تنش قائم فشاری و کششی = ؟

$$\mp\sigma = \mp\frac{P}{A} \mp \frac{M}{S}$$

تنش کششی

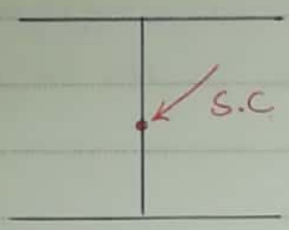
$$+\sigma = -\frac{40}{18.2} + \frac{40}{81.9} = -1.4652$$

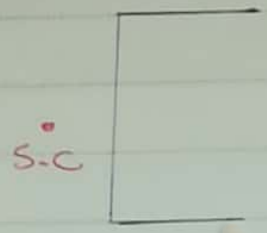
فشاری

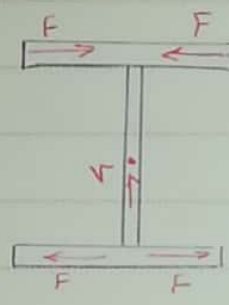
$$-\sigma = -\frac{40}{18.2} - \frac{40}{81.9} = -2.929$$

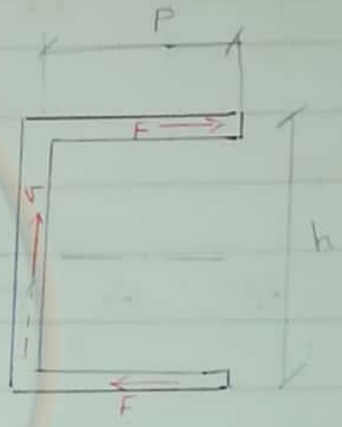
Subject
Date

shear Center «مرکز برش»







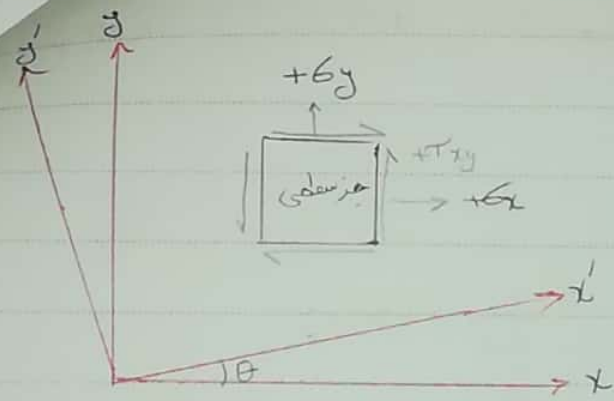


$$Pe = F.h$$

$$F = \frac{Tb}{2} \quad , T = \frac{VQ}{It}$$

$$Q = A\bar{y} \quad , \quad (A = bt \quad , \bar{y} = \frac{h}{2}) \quad \Rightarrow e = \frac{b^2 t^2 h}{4I}$$

جزوه باما



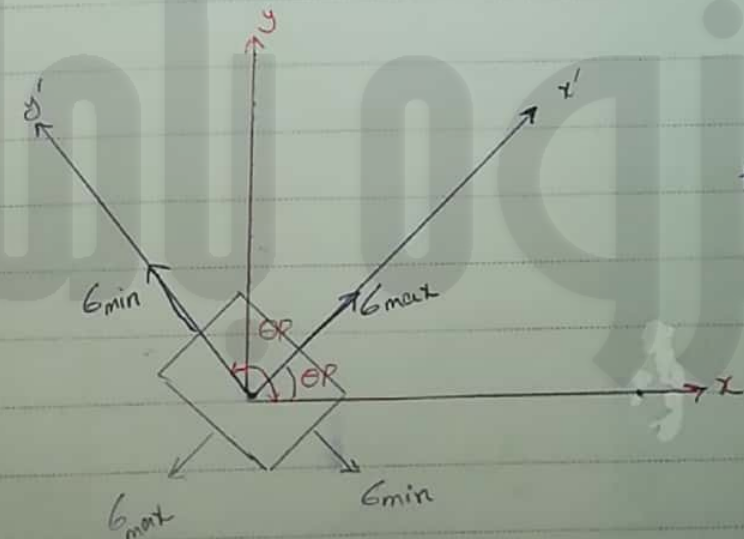
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y = \text{ثابت} \qquad \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (\sigma_{x'} - \sigma_{ave})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$



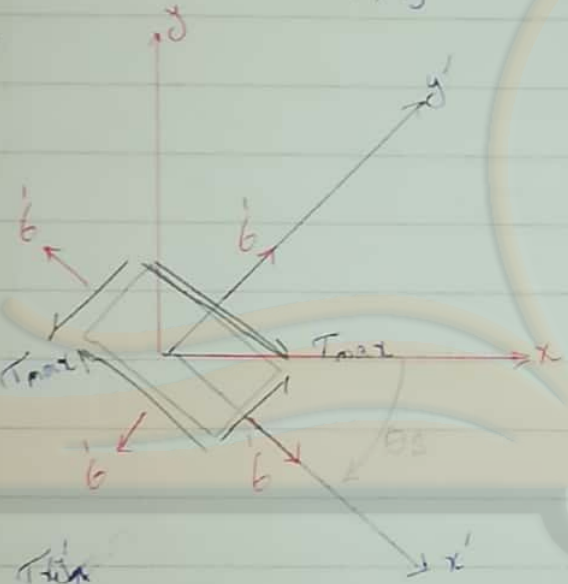
$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

PAPCO

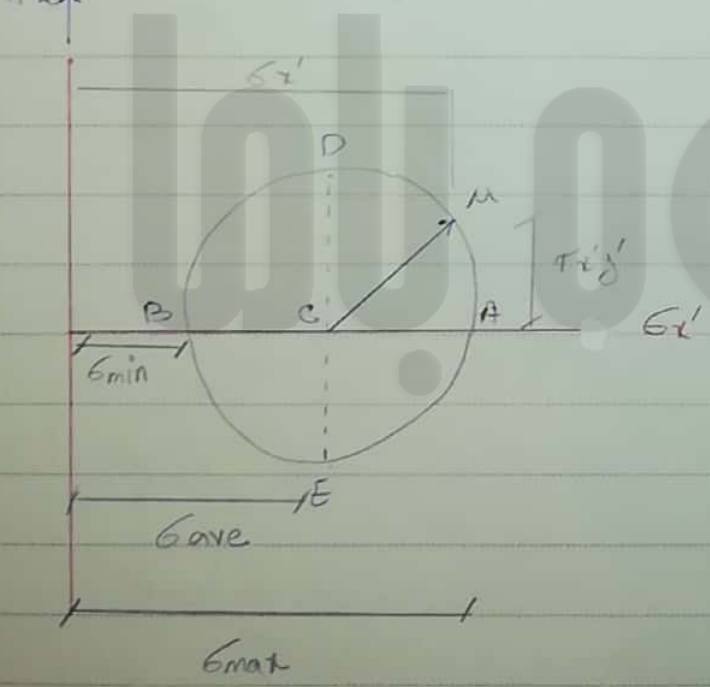
تنش نرمال در صفحه‌ای max است که در آن صفحه تنش برشی صفر است. عکس این عمل هم صادق است. صفحه‌ای که روی آن تنش برشی وجود نداشته باشد تنش نرمال روی آن max است به چنین صفحه‌ای، صفحه اصلی و به تنش های (قائم) روی آن تنش های اصلی گفته می‌شود.

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

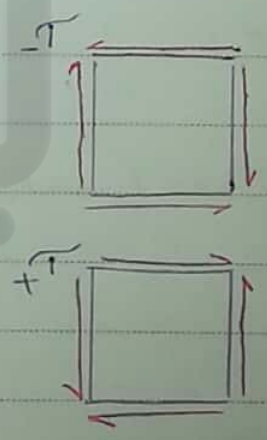
$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \qquad \tan 2\theta_p = -\frac{1}{\tan 2\theta_s}$$



صفحات تنش برشی ماکزیمم تحت ۴۵ درجه نسبت به صفحه اصلی قرار دارند.



حرکات ملی:

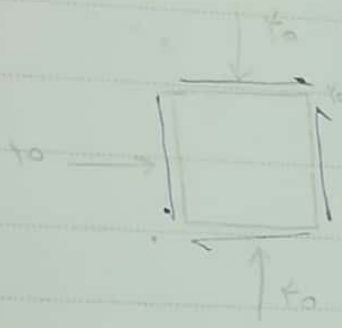


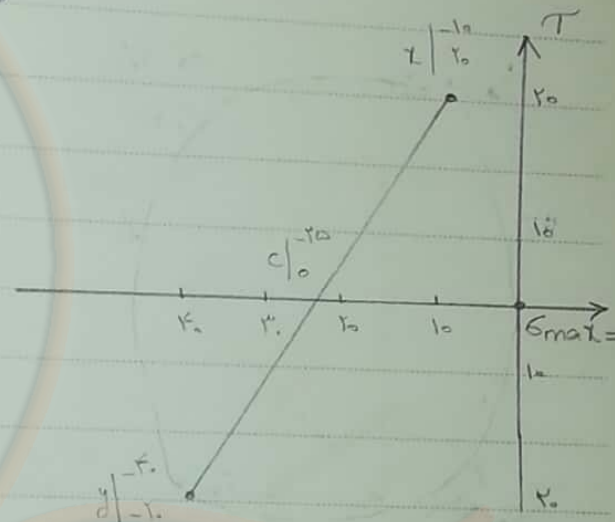
مثال) داده‌های مسئله را روی یک سطح جزئی بدنه دهید. سپس با استفاده از دایره مور و اعمال مشتقات

الف) تنش‌های اصلی و صفحات اصلی را بدست آورید و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه نشان دهید.

ب) تنش برشی حداکثر و صفحات مربوطه و تنش‌های قائم همراه با آن را بدست آورده و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه نشان دهید.

$\sigma_x = -10$ MPa $\sigma_y = -40$ MPa $\tau = +20$ MPa





$$R = \sqrt{\left(\frac{(-10+40)}{2}\right)^2 + 20^2} = 25$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{-10-40}{2} = -25$$

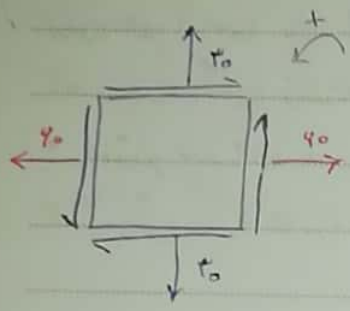
$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R = -25 + 25 = 0$$

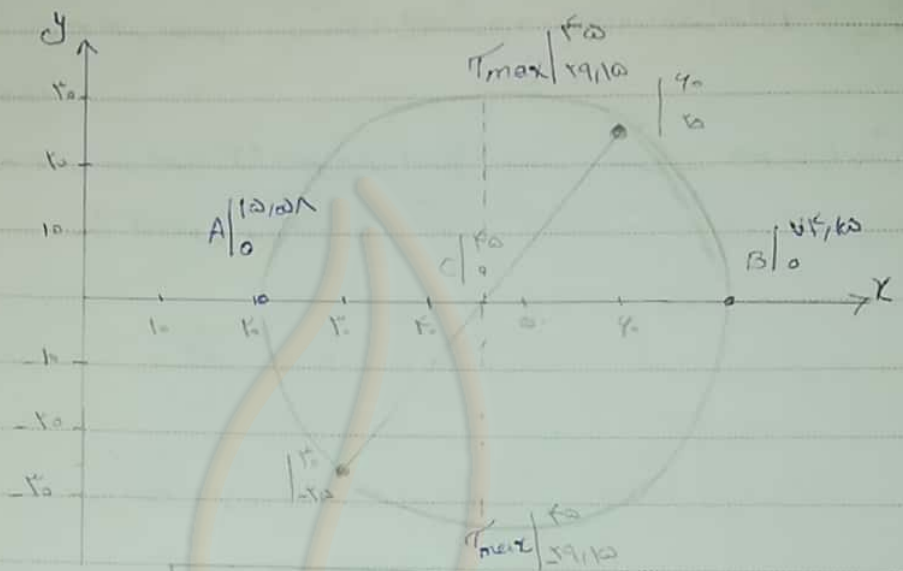
$$\sigma_{min} = \sigma_{ave} - R = -25 - 25 = -50$$

$$\tau_{max} = \tau_{min} = R = \pm 25$$

Subject
Date

$\sigma_x = +40$ mpa $\sigma_y = +30$ $\tau = +40$





$C \left| \begin{matrix} \frac{40+0}{2} = 20 \\ 0 \end{matrix} \right.$

$R = \sqrt{\left(\frac{40-0}{2}\right)^2 + 40^2} = 41,012$

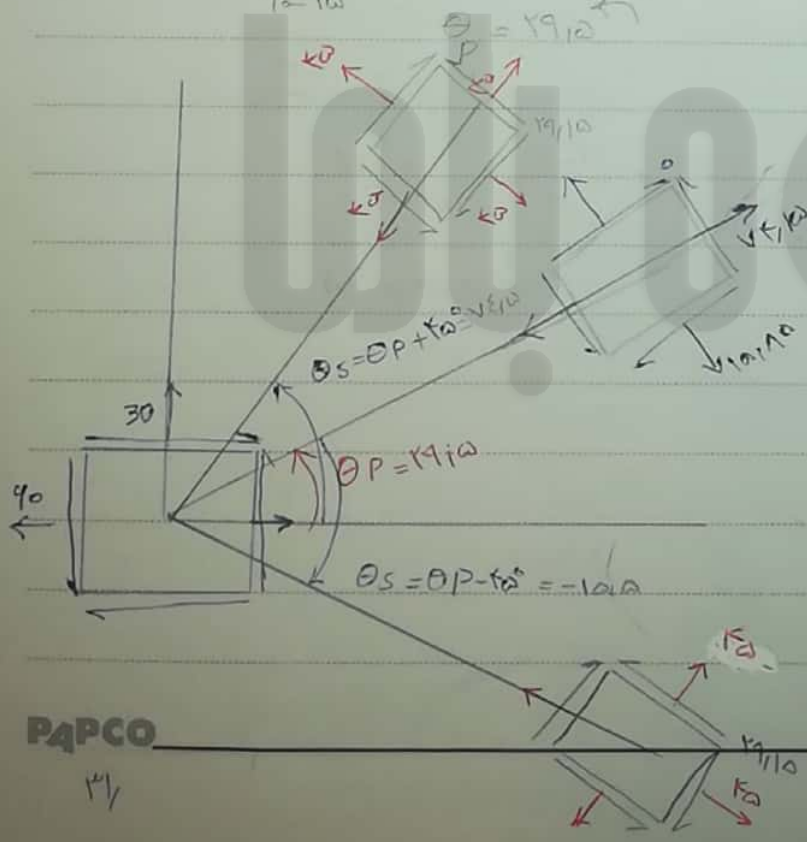
$\sigma_{max} = 20 + 41,012 = 61,012$ mpa

$\sigma_{min} = 20 - 21,012 = -1,012$ mpa

$\tau_{max} = R = 41,012$

$\tan 2\theta_p = \frac{40}{40-20} \Rightarrow 2\theta_p = 63^\circ \Rightarrow \theta_p = 31,5^\circ$ CCW

نکته: زوایا در دایره مول دوبل هستند.



پیچش:

فرض های اساسی برای رابطهٔ بین تنش پیچشی و تنش‌های ایجادشده در میله‌های استوانه‌ای توپر و توخالی

۱- فرض تغییر نکردن مصالح

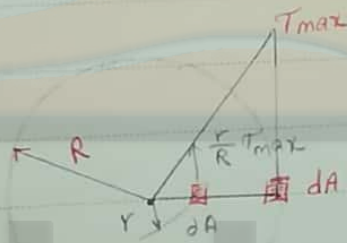
۲- مقطع صفحه‌ای عمود بر محور میلهٔ استوانه‌ای، پس از اعمال پیچش بصورت صفحه‌ای باقی می‌ماند.

۳- نیروی برشی δ به صورت خطی از محور مرکزی تغییر می‌کند.

رابطهٔ لاهک

$$\tan\gamma = \gamma = \frac{\delta s}{L}$$

۴- با استفاده از قانون هوک تنش برشی با کرنش برشی متناسب است.



$$T = \int_A \frac{r}{R} T_{max}\, dA\, r$$

سطح تنش

نیرو

گشتاور پیچشی

$$T = \frac{T_{max}}{R} \int_A r^2\, dA$$

$\int_A r^2 dA = J$ گشتاور دوم در حالت قطبی

J = ممان اینرسی قطبی

$$J = \int r^2 dA$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$J = \int (x^2 + y^2)\, dA$$

$$= \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

$$J = I_x + I_y$$

ممان اینرسی قطبی

Subject
Date

برای مقطع دایره:

$$J = \int_A r^2 dA \quad , \quad dA = 2\pi r\, dr$$

(ممان اینرسی قطبی دایره توپر)

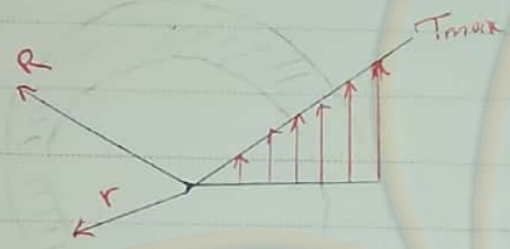
$$J = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{2\pi r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} \Rightarrow J = \frac{\pi d^4}{32}$$

d: قطر دایره

$$\frac{T}{r} = \frac{T_{max}}{R} \Rightarrow T_{max} = \frac{TR}{J}$$

$$\frac{(N\cdot mm)(mm)}{mm^4} = \frac{N}{mm^2} = MPa$$

$$T = \frac{r}{R} T_{max} \qquad T = \frac{Tr}{J}$$



$$J = \int_r^R 2\pi r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2}$$

برای جدار نازک $R - r = t$

$$J \simeq 2\pi R^3 t$$

ممان اینرسی قطبی دایره توخالی (جدار نازک)

I دایره $= \frac{\pi d^4}{32}$

مثال) لوله‌ی توخالی $D = 20\ mm$ (قطر خارجی) و $d = 15\ mm$ (قطر داخلی) $T = 40\ N.m$ مطلوب است:
تنش برشی تولید شده در تارهای خارجی و داخلی لوله

$$J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$

$$= \frac{\pi}{32}(20^4 - 15^4) = 16/32\ mm^4$$

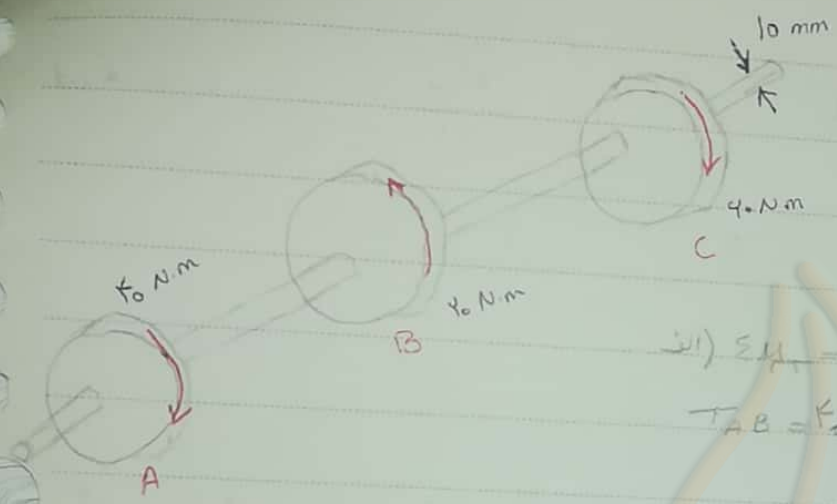
$$\tau_{max} = \frac{TR}{J} = \frac{(40\times10^3)(10)(10)}{16/32} = 25,9\ N/mm^2$$

$$\tau_{inside} = \frac{Tr}{J} = \frac{(40\times10^3)\times7/5}{16/32} = 21,9\ N/mm^2$$

مثال) عطف است:

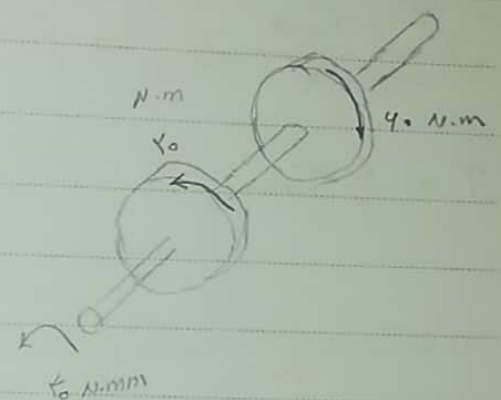
الف) T_{A-B}

ب) حداکثر تنش برشی در شفت؟



الف) $\sum M_x = 0$

$T_{AB} = 40$



ب) $T_{B-C} = 40$ N.m

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (10)^4}{32} = 981 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot R}{J} = \frac{(40 \times 10^3)(5)}{981} = 204 \text{ N/mm}^2$$

جزوه باما