**دانشجویان و اساتید توجه داشته باشید جزوه موجود به صورت اختصاصی توسط وب سایت جزوه باما تهیه شده است و تمامی حقوق مادی و معنوی آن برای این وب سایت محفوظ می باشد.**

**Jozvebama.ir**

DATE / / SUBJECT:

# فصل اول

## ابعاد و واحد

ابعاد اصلی (FLT - MLT)

۱- جرم/نیرو F|M

۲- طول L

۳- زمان T

۴- دما Θ

$$F = \frac{ML}{T^2}$$

$$M = \frac{FT^2}{L}$$

ابعاد فرعی

۱- چگالی $\frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} = \left[\frac{M}{L^3}\right]$

۲- فشار $\frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}} \left[\frac{F}{L^2}\right]$

۳- توان $\left[\frac{F}{T}\right]$

۴- سرعت $\left[\frac{L}{T}\right]$

۵- شتاب $\left[\frac{L}{T^2}\right]$

SI / MKS ثانیه - کیلوگرم - متر

cgs ثانیه - گرم - سانتی‌متر

| | SI | BR |
|---|---|---|
| ۱- جرم/نیرو | kg/N | lbm/lbf |
| ۲- طول | m | ft |
| ۳- زمان | Ses | Ses |
| ۴- دما | °k | °R |

$$\rho_w = 1000 \frac{kg}{m^3} = 1 \ g/cm^3$$

$$\rho_w = \frac{lbm}{ft^3}$$

1 ft → ۰٫۳۰۴۸ m = ۳۰٫۴۸ cm

1 lbf → ۴٫۴۴۸ N

1 m → ۳٫۲۸ ft

1 N → ۰٫۲۲۴۸ lbf

$F = ma \rightarrow w = gm$

$g = 9.806 \ m/s^2$

$g = 32.174 \ \frac{ft}{s^2}$

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

$1Lbf = 1\,lbm \times 32.14$

$1Lb = 32.14\ lbm\ \frac{ft}{s^2}$

وزن مخصوص $\delta = \frac{w}{v} = \frac{mg}{v} = \rho \cdot g = \gamma$

تمرین:

۱) $g \rightarrow \frac{ft}{s^2}$

۲) $lbm \rightarrow lbf$

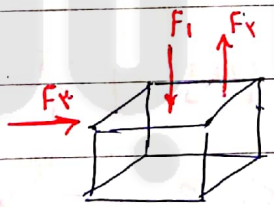
۳) $\rho_w \rightarrow \frac{lbm}{ft^3}$

۴) $\gamma_w \rightarrow \frac{SI}{Br_o}$

## «فصل اول»
## خواص سیال

تعریف سیال: خاصیت جاری شدن دارد ← ویسکوزیته (لزجت) ← تحت اثر تنش برشی جاری می‌شود ← تنش برشی تحمل نمی‌کند.
(مایع و گازها) (گرانروی نیروی برشی)

تنش فشاری $\sigma = \frac{F_1}{A}$




تنش کششی $P = \frac{F_2}{A}$

تنش برشی $\tau = \frac{F_4}{A}$

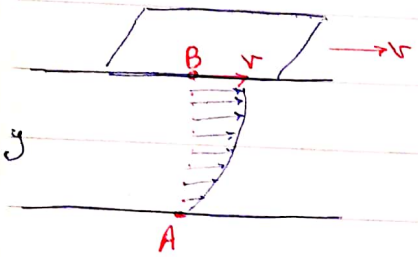


Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

اصل عدم لغزش :

یک سیال یا ذره در آن واحد نمی‌تواند دو سرعت متفاوت داشته باشد.




$$\tau \propto \frac{dv}{dy} \rightarrow \tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

ویسکوزیته دینامیکی

واحدها اندازه گیری و همگنی :

دیمانسیون / بعد ← نوع یا جنس آن یا متر را نشان میدهد.

واحد ← مقدار یا کمیت

همگن : اگر هر دو طرف رابطه بعد یکسانی داشته باشند به آن همگن می‌گویند.

$$v = at + v_0$$

$$\left[\frac{L}{T}\right] = \left[\frac{L}{T^2}\right][T] + \left[\frac{L}{T}\right]$$

$$\left[\frac{L}{T}\right] \doteq \left[\frac{L}{T}\right] + \left[\frac{L}{T}\right] \doteq \left[\frac{L}{T}\right]$$

$$F = ma$$

$$[F] \doteq \left[\frac{FT^2}{L}\right]\left[\frac{L}{T^2}\right]$$

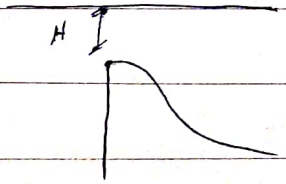
$$[F] \doteq [F]$$

* اگر F اصلی بود دیگر نمی‌توان M را اصلی گرفت

M اصلی ← $[F] = \left[\frac{M \cdot L}{T^2}\right]$

F اصلی ← $[M] = \left[\frac{FT^2}{L}\right]$

ناهمگن : معمولاً روابطی که تجربی باشند ناهمگن هستند. (دو طرف از نظر ابعاد یکی نیستند)




دبی $Q = cBH^{\frac{5}{3}}$

ضریب — طول

$$\Rightarrow \left[\frac{L^3}{T}\right] \doteq [1][L]\left[L\right]^{5/3}$$

$$= [L]^{8/3}$$

Sahand



Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

دبی = مقدار حجم سیال که از یک مقطع مشخص در یک زمان ثابت می‌گذرد.

$$\text{دبی} = \frac{\text{حجم سیال}}{\text{زمان ثابت}} \qquad [Q] = \left[\frac{L^3}{T}\right]$$

رابطهٔ ناهمگن

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

ویسکوزیته

$$[v] = \left[\frac{L}{T}\right]$$

$$\left[\frac{F}{L^2}\right] = [\mu]\ \frac{\left[\frac{L}{T}\right]}{[L]} \Rightarrow [\mu] = \left[\frac{FT}{L^2}\right] \qquad \frac{Ns}{m^2} \cdot \frac{lbfs}{ft^2} \qquad [dv] = \left[\frac{L}{T}\right]$$

دیفرانسیل هر معادله‌ای برابر بعد خود است

$$\text{بر حسب } M \Rightarrow \frac{M \cdot \frac{L}{T^2} \times T}{L^2} = \left[\frac{M}{TL}\right] = [\mu] \qquad \frac{kg}{m.Sec} \cdot \frac{gr}{Cm.Sec}$$

$$1\ \frac{gr}{cm.S} = 1\ Poise$$

تمرین: بعدهای زیر را بدست آورید.

توان ✓ $\left[\frac{ML^2}{T^3}\right]$ — چگالی ✓ $\left[\frac{FT^2}{L^4}\right]$ — سرعت ✓ $\left[\frac{L}{T}\right]$ — شتاب ✓ $\left[\frac{L}{T^2}\right]$

فشار ✓ $\left[\frac{M}{TT^2L}\right]$ — انرژی ✓ $[FL]$ — گشتاور ✓ $\left[\frac{ML^2}{T^2}\right]$ — ممان اینرسی $[L^4]$

اندازه حرکت ✓ $\left[\frac{ML^2}{T^3}\right]$ — وزن مخصوص ✓ $\left[\frac{M}{L^2T^2}\right]$ — لزجت سینماتیکی ✓ $[L^2T]$

لزجت سینماتیکی: ✓

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\text{لزجت دینامیکی}}{\text{چگالی}}$$

ویژگی‌های سیال:

۱- چگالی $\rho$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow [\rho] = \left[\frac{m}{L^3}\right]$$

۲- حجم مخصوص = عکس چگالی

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}$$

۳- چگالی نسبی

$$SG = \frac{\rho_{\text{ماده}}}{\rho_{w\ 4^\circ C}} \quad \text{(بعد ندارد)}$$

Sahand



Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

۴- وزن مخصوص

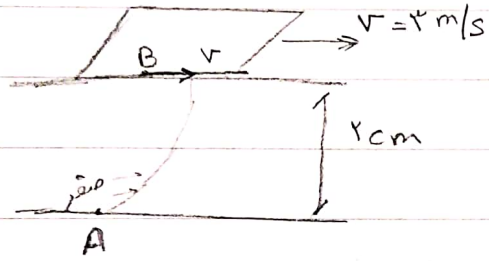
$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{\text{وزن}}{\text{حجم}}$$

$$[\gamma] = \left[\frac{F}{L^3}\right] \doteq \left[\frac{ML}{L^3T^2}\right] \doteq \left[\frac{M}{L^2T^2}\right]$$

$$\gamma = \rho \cdot g$$

وزن مخصوص = جگالی × شتاب ثقل

مسئله: صفحه‌ی بی‌نهایت بزرگ به سن یک سیال با لزجت $29\ \frac{kg}{m.s}$ فاصله‌ی دو صفحه $2cm$ و سرعت صفحه‌ی بالایی $3\ m/s$ است. محاسبه‌ی تنش مرزی دو صفحه:




$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

$2cm \rightarrow 0.02$

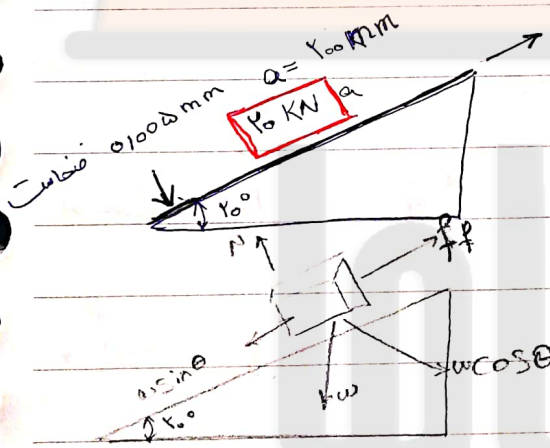
$$\tau = 29\ \frac{kg}{m.s} \times \frac{3\ m/s}{0.02m} = 4350\ \frac{kg}{ms^2}\ \left(\frac{1}{m^2}\right)$$

$$1N = 1kg \cdot 1m/sec^2$$

$4350\ N/m^2$

لزجت
روغن با $\mu = 0.100V\ Pa.S$

مسئله ۵-۱: سرعت نهایی بلوک را بدست بیاورید



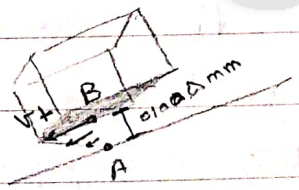

جایی است که شتاب صفر باشد.

$\Sigma F = ma$

نیروها در حال تعادل = نیروها در حرکت

$\Sigma F_{\text{حرکت}} - \Sigma F_{\text{مقاوم}} = 0$

$$\Sigma F_{\text{حرکت}} = W \sin\theta = 1KN \times \sin 20 = 342\ N$$




$$\Sigma F_{\text{مقاوم}} = \tau \times A = \mu \frac{dv}{dy} \times A$$

$$0.100V\ \frac{N.s}{m^2} \times \frac{7}{0.005\ mm} \times (200mm \times 2mm) = 84V\ \frac{NS}{m}$$

$0.2m$

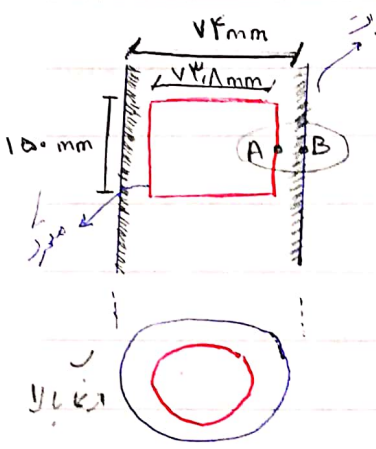
$$\Rightarrow 342\ N = 84V\ \frac{NS}{m}$$

$$= 4.11\ m/s$$

Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:




مسئله: سرعت حرکت استوانه داخلی را پیدا کنید.؟

$m = ۲٫۵\ kg$ داخلی

$\mu = ۰٫۰۰۷\ Pa\cdot S$

$g = ۹٫۸۱\ m/sec^۲$

$\Sigma F = ma \rightarrow \Sigma F = ۰ \Rightarrow \Sigma F_{محرک} - \Sigma F_{مقاوم} = ۰$

$$W - \mu \frac{dv}{dy} \times A \Rightarrow mg - \mu \frac{V_۲ - V_۱}{y_۲ - y_۱} \times ۲\times r \times h$$

$$\Rightarrow ۲٫۵\ kg \times ۹٫۸۱\ m/s^۲ - ۰٫۰۰۷\ N/m^۲s \frac{V_t}{۰٫۱\ mm} \times \pi \times ۷۳٫۸\ mm \times ۱۵۰\ mm$$

$$\Rightarrow V_t = ۱۰٫۱۰\ m/sec$$

$1\ N = 1\ kg\,m/sec^۲$

سیالات ← مایعات ← تراکم پذیرند ← میزانشان نسبت گازها خیلی کم است ← تراکم‌پذیر نیستند

مایعات در فشار بسیار بالا تراکم پذیر هستند.

گازها ← تراکم پذیرند

$\rho = \frac{m}{V}$

سیالات ← نیوتنی (رابطه خطی) $\tau = \mu \frac{dv}{dy}$ ← نیز جت دارند $\mu \neq ۰$ (ویسکوز)

غیر نیوتنی (رابطه غیر خطی) $\tau = f\left(\frac{dv}{dn}\right)$

نیز جت ندارند $\mu = ۰$ ← سیال ایده‌آل (وجود خارجی ندارد)

(نا ویسکوز)

$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$ ← عامل تنش برشی

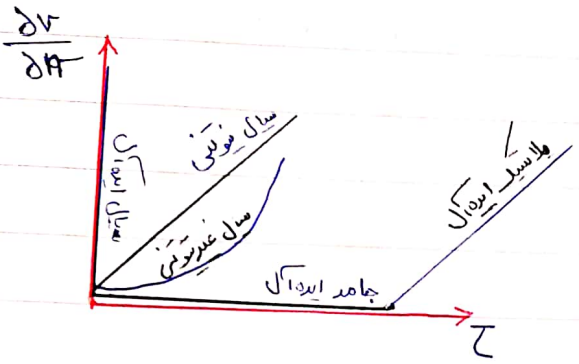
$T \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow$ ← مایعات ← نیروها بین مولکولی ← علت نیز جت

$T \uparrow \Rightarrow \mu \uparrow$ ← گازها ← برخورد (تصادم) بین مولکول‌ها



Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:




مدول حجم: تغییرات فشار ← از جنس فشار است.

$$K = E_v = -v\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{T=de}$$

حجم اولیه

تغییرات حجم

$K_{w\ @15.4^\circ C} = 2.15 \times 10^9\ Pa$

فشار اتمسفر $= 1.013 \times 10^5\ Pa$

$\beta$ = ضریب تراکم پذیری

$$\beta = \frac{1}{K} = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$$

مثال) تغییرات حجم بر حسب فوت مکعب را حساب کنید.

$K_w = 3 \times 10^5\ psi$

$v_1 = 1\ ft^3$

$\Delta F = ?$

$P_2 = 100\ psi$

$\Delta P = P_2 - P_1$

$P_{at} = 14.7\ psi$

$$K = -v\left(\frac{\Delta P}{\Delta v}\right)_T$$

$$psi\ \ 3\times10^5 = -1\ ft^3 \times \left(\frac{100\ psi}{\Delta v}\right) \Rightarrow \Delta v = -\frac{1}{3000}\ ft^3$$

فشار نسبی: $P_{gage}$

فشار مطلق: $P_{abs}$

فشار مطلق نمی‌تواند منفی باشد و همیشه مثبت است.

$P_g^+$

$P_{at}$

$P_g^-$

$P = 0$ خلأ ← فشار مطلق

$$P_{abs} = P_{gage} + P_{at}$$

اگر نوشته نسبی یا مطلق از فشار نسبی استفاده می‌کنیم.

مسئله مهم:

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}$$

$$k = -v\frac{\partial P}{\partial v}$$

Sahand



Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مسئله مهم: یک مخزن فولادی با فشار ۷ MPa و حجم آب ۱ m³ را کاملاً پر کنیم تا به فشار تست برسد. چقدر حجم آب اضافی باید به مخزن وارد کنیم تا فشار مخزن به فشار تست برسد. $n = 1.5$ ضریب اطمینان

فولاد $E = V \times 10^{11}$ Pa

$L = 5$ m

$A = \pi \left[ 1^2 - (1.99)^2 \right]$ m²

$K_w = 2.184$ MPa

$P_i = 10.15$ MPa

$L = 5$ m

$\sigma = E\varepsilon$

$\tau = \mu \frac{du}{dn}$

$K = -V \frac{\Delta P}{\Delta V}$

$\Delta V = \Delta V_{\text{افزایش حجم مخزن}} + |\Delta V_{\text{کاهش حجم آب داخل مخزن}}|$

$F_{\text{نیروی محرک}} = \sigma \times A = 10.15 \times 10^6 \text{ MPa} \times \pi \times \frac{1.99^2}{4}$ m

$F_{\text{نیروی مقاوم}} = \sigma_{\text{فولاد}} \times \frac{\pi}{4}(2^2 - 1.99^2)$

$F_{\text{محرک}} = F_{\text{مقاوم}} \longrightarrow \sigma_{\text{فولاد}} = E\varepsilon$ (حد الاستیک)

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \longrightarrow \Delta L = \varepsilon_{max} \times 5 \text{ m} = 2.02 \text{ cm} \longrightarrow \Delta V_1 = \Delta L \times A$

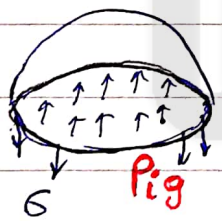
افزایش حجم مخزن تحت فشار

$K = -V_1 \times \frac{\Delta P}{\Delta V} \Rightarrow 2.184 \text{ MPa} = - \times \frac{10.15 \text{ MPa}}{\Delta V}$

$V_0 + \Delta V_1$

## تنش سطحی:

جاذبه‌ی بین مولکول‌ها بین دو مولکول نخیر هم جنس




$F_{\text{محرک}} = P_0 A = P_{ig} \times \pi R^2$

$\sigma = \left[\frac{F}{L}\right]$ $\quad F_{\text{مقاوم}} = \sigma \times 2\pi R$

$P_{ig} \times \pi R^2 = \sigma \times 2\pi R$

$$P_{ig} = \frac{2\sigma}{R}$$

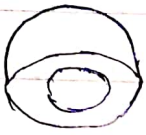
Sahand



Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

یک حباب دو سطح مقاوم دارد




$P_{ig} = ?$

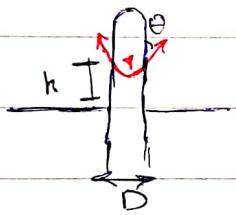
$F_{محرک} = P_{ig} \times \pi R^2$

$F_{مقاوم} = \sigma \times 2 \times (2\pi R)$

$$P_{ig} = \frac{4\sigma}{R}$$

کشش سطحی ← موئینگی

جاذبه بین مولکولی مایع و مایع < جاذبه بین مولکول جامد و مایع




$h = ?$

وزن ← نیروی مقاوم

کشش سطحی ← نیروی محرک

فشار هوا
چگالی ρ
کشش سطحی σ
θ
قطر لوله D

$F_{مقاوم} = V_{جسم} \times \gamma_{وزن مخصوص}$

$w = mg = \rho V \times g = \gamma V$

$F_{محرک}$ $(w) = \frac{\pi D^2}{4} \times \gamma_{آب} \times h$ ← حجم

$\sigma_w = 0.073\ N/m$

$D = 2\ mm$

$\theta = 20^\circ$

$h = ?$

$\rho_w = 1000\ kg/m^3$

$g = 9.81\ m/s^2$

$F_{محرک} = \sigma \times \pi D \times \cos\theta$

$V_{جسم} \times \gamma_{وزن} = \sigma \times \pi D \times \cos\theta$

$\frac{\pi D^2}{4} \times \gamma_{آب} \times h = \sigma \times \pi D \times \cos\theta$ ⇒ $h = 14.99\ mm$

$\frac{3.14 \times 2^2}{4} \times 0.073\ N/m \times h = 0.073\ N/m \times \pi \times 2\ mm \times \cos 20^\circ$

Sahand

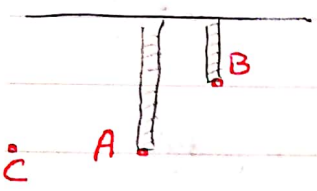


Scanned by CamScanner

# فصل دوم: اساسی سیالات

فشار = نیرو بر واحد سطح

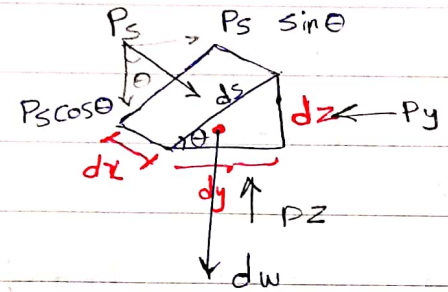
$\uparrow P = \frac{F\uparrow}{A\downarrow}$




$P_B < P_A$

$P_A = P_C$

فشار سیال در سطح تعیین نداره.



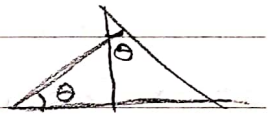

$dF = (\frac{1}{2} dz\,dy) \times dx$

$\Sigma F_x = ma_x$

$\Sigma F_y = ma_y$ →

$\Sigma F_z = ma_z$

فشار در نقطه: $dy, dx, dz \to 0$




خط عمودی

$\Sigma F_y = ma$

$\Rightarrow P_y \times (dx \times dz) - (P_s \sin\theta)\, dx\, ds = 0$

$ds = \frac{dz}{\sin\theta}$

$P_y = P_s$

$P_x = P_s$

$\Rightarrow P_y = P_x$

$\Sigma F_z = ma \Rightarrow P_z = P_s \Rightarrow P_y = P_x = P_z$

اثبات z

$P_z \times (dy \times dx) - P_s \cos\theta\,(dx\,ds) - \frac{1}{2}(dx\,dy\,dz)\gamma = \frac{1}{2}(dx\,dy\,dz) \times \rho \times a_z$

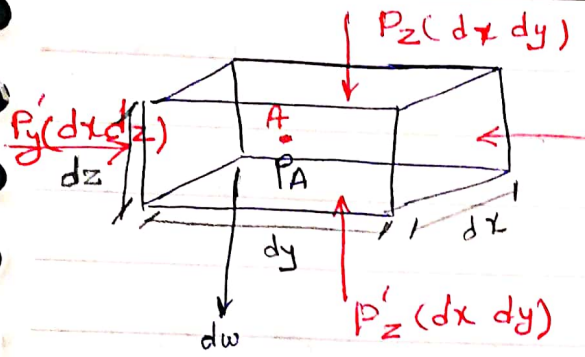
$\Rightarrow P_z - P_s - \frac{1}{2}\gamma\,dz = 0 \Rightarrow P_z = P_s$

فشار در یک نقطه در همه جهات ثابت است

قانون پاسکال



Scanned by CamScanner




$$P_y = P_A + \frac{\partial P}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2}dy\right)$$

$$P'_y = P_A - \frac{\partial P}{\partial y}\times\left(\frac{1}{2}dy\right)$$

$$P_z = P_A + \frac{\partial P}{\partial z}\times\tfrac{1}{2}dz$$

$$P'_z = P_A - \frac{\partial P}{\partial z}\times\tfrac{1}{2}dz$$

/ اساسیل = ۰

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\Sigma F_y = ma_y \longrightarrow \left[P_A - \frac{\partial P}{\partial y}\times\tfrac{1}{2}dy\right]dx\,dz - \left[P_A + \frac{\partial P}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2}dy\right)\right]dx\,dz = 0$$

$$\Sigma F_z = ma_z$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$ تغییرات فشار در جهت y برابر صفر است.

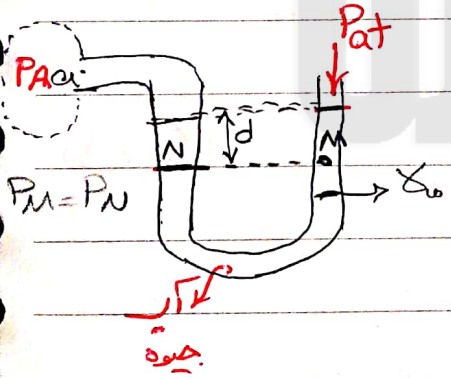
$$\Sigma F_z = 0 \longrightarrow \left[P_A - \frac{\partial P}{\partial z}\times\tfrac{1}{2}dz\right]dx\,dy - \left[P_A + \frac{\partial P}{\partial z}\times\tfrac{1}{2}dz\right]dx\,dy - dw = 0$$

$dw$ : $(dx\,dy\,dz)\times\gamma_w$

$$\Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial z} = +\gamma_w$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad -\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad -\frac{\partial P}{\partial z} = +\gamma_w$$

تغییرات فشار در سیال (هیدرو) استاتیک




$P_a = ?$

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = \int_{Z_1}^{Z_2} -\gamma\, dz \longrightarrow \boxed{(P_2 - P_1) = -\gamma(z_2 - z_1)}$$

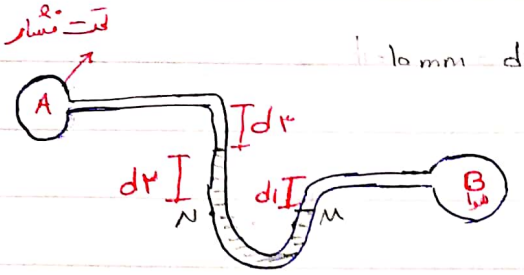
$$P_a = P_{at} + \gamma dx$$



Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

## فشار سنج تفاضلی




$d_1 = 15mm \quad d_2 = 80mm \quad d_3 = 40mm$

$P_b - P_a = ?$

$P = \gamma h$

$P_M = P_N$

$P_b + \gamma_{air} \times d_1 = P_a + d_2 \cdot \gamma_w + \gamma_{Hg} \times d_3$

$P_b - P_a = d_2 \gamma_w + d_3 \gamma_{Hg} - d_1 \gamma_{air}$

$= 40mm \times 9804 N/m^3 + 80mm \times 13.6 \times 9804 N/m^3$

ناچیز

$= 42.28 \frac{Lbf}{ft^2}$ ← بگیر

## تفسیر فشار در سیال:

$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

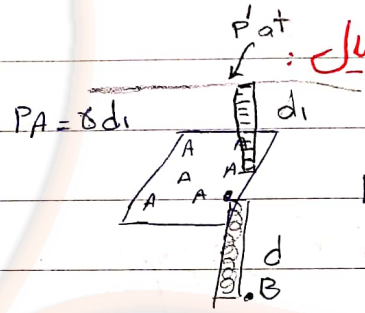
$\frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma$

$\int_A^B dP = \int_{Z_A}^{Z_B} -\gamma \, dz$

$P_B - P_A = -\gamma (Z_B - Z_A)$

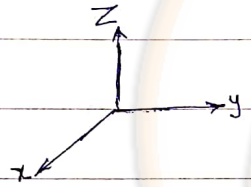
$P_B = P_A + \gamma d$

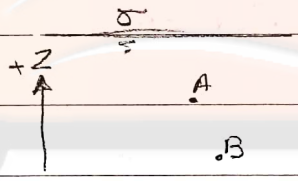
$P_B > P_A$




$P_A = \gamma d_1$

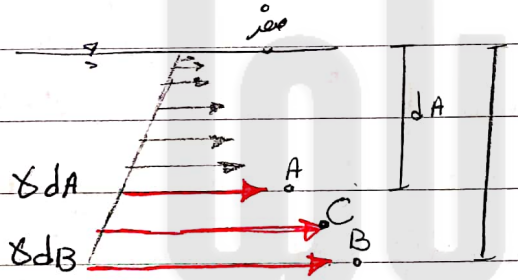
$P_B = P_A + \gamma d$




فشار ← نسبی / مطلق

## فشار هیدرواستاتیک




در عمق فشار به صورت خطی افزایش می‌یابد.

$\frac{P_2 - P_1}{Z_2 - Z_1} = -\gamma \Rightarrow \frac{P_2 - P_1}{h} = +\gamma$

هد فشار

$[L]$

$1 at = ? \ m\text{-}H_2O \Rightarrow \frac{P_2 - P_1}{h} = \frac{101.3 \times 100000 \ N/m^2}{h} = 9804 \ N/m^3 \quad [P] = [\frac{F}{L^2}]$

$\gamma_w = 9804$

$P_{standard} = 10^5 \ Pa$

$h = 10.33 \ m$

$m\text{-}H_2O = 0.74 \ m\text{-}Hg$

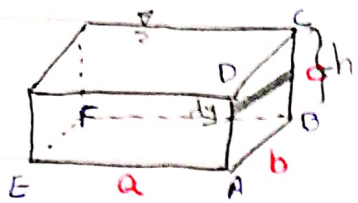


Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

## نیروی فشار هیدرواستاتیک

$F = P \times A \longrightarrow dF = P\,dA \longrightarrow F = \int P\,dA$




۱- نیروی وارد به کف = ؟

$F_R = P_{کف} \times A_{کف}$

$(\gamma_f \times BC) \times (AB \times AE)$

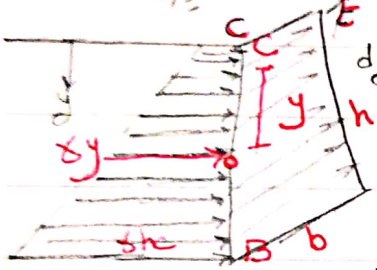
$F/L^2 \quad L \quad L \quad L = F$ بُعد

۲- نیروی وارد به دیواره = ؟

$F_{R\,دیواره} = P_{دیواره} \times A_{دیواره}$

$\Rightarrow F_{R\,دیواره} = \int P\,dA = \int_B^C P\,b\,dy = \int_E^B (\gamma y)\,b\,dy = \gamma b \int_C^B y\,dy$

$= \gamma b\, y^2/2 \Big|_C^B = 1/2\,\gamma b(h^2 - 0) = \boxed{1/2\,\gamma b h^2}$ صفر می‌شود




## روش هندسی

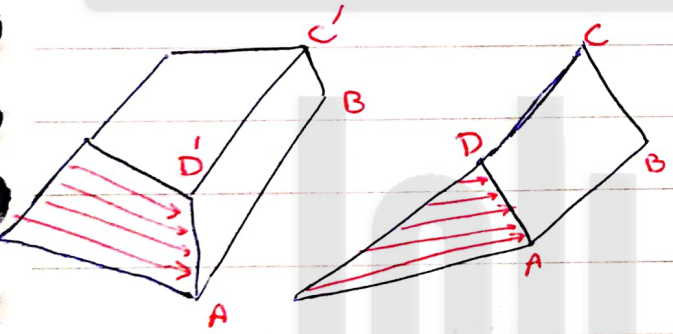
نیروی فشار هیدرواستاتیک = حجم هم‌فشار

حجم هم‌فشار = محدود به صفر × مساحت مثلث

$V_{هم‌فشار} = (1/2 \times h \times \gamma h) \times b$

$V_{هم‌فشار} = 1/2 \times \gamma b h^2$

مثال) برآسرحالت حساب کنید؟

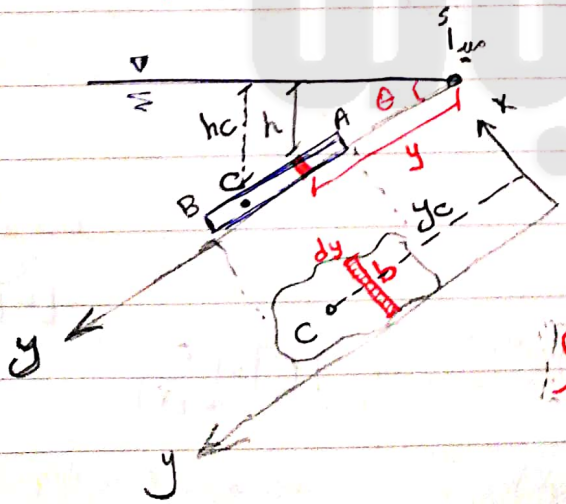


۱) الف

۲) ب دیواره (ص)

۳) دریچه

۴) سطح مستوی مایل




$F = P \times A = dF = P\,dA$

$F_R = \int P\,dA = \int_A^B (\gamma y \sin\theta)(dy \times 1)$

$\begin{cases} h = y\sin\theta \\ dA = b \times dy \end{cases}$

$= \gamma \sin\theta \int y\,dy$ ← گشتاور اول سطح

$= \gamma \sin\theta (A y_c)$

$\int y\,dy = A y_c$

$= \gamma A h_c$



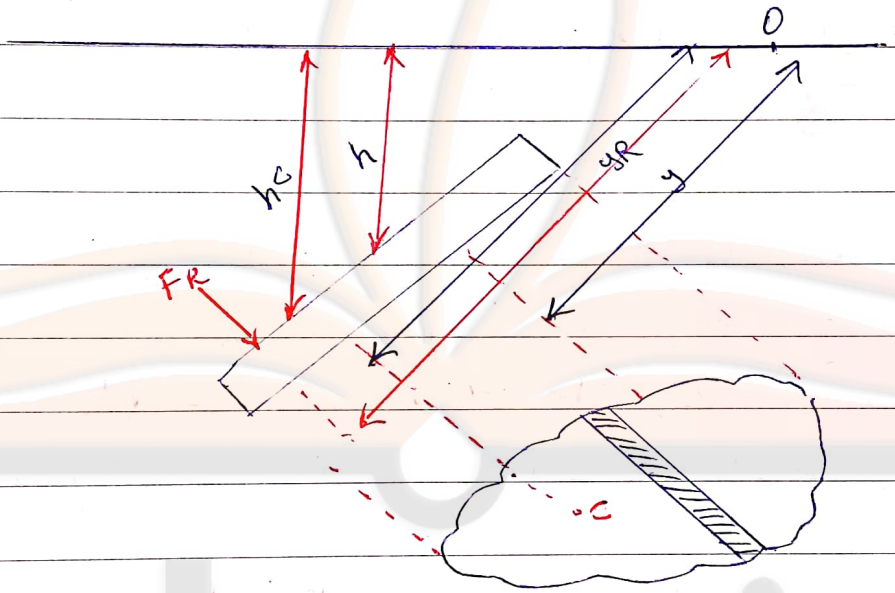
Sahand

Scanned by CamScanner

طبق اصل استاتیک، آن چه درمورد نیروها برای ما مهم است برآیندنیروهای هیدرواستاتیک وارد بر اجسام و محل اثر آن هاست.

برای بدست آوردن ضابطه‌ی کلی برای محاسبه مقدار، جهت و محل اثر نیروی برایند وارد از طرف سیال بر یک سطح مستوی یک صفحه مستوی به صورت مایل درنظر گرفته می‌شود. محور این صفحه را امتداد میدهیم تا سطح آزاد سیال را در نقطه‌ای مانند O قطع کند (با زاویه $\theta$). راستای محور صفحه را به عنوان محور y درنظر می‌گیریم. درس ۱۵. تمام جلو و از کنار نشان داده شده است

*نقطه‌ی O را به عنوان مبدأ مختصات درنظر می‌گیریم.




میدانیم به روی هر المان کوچک از صفحه مانند $dA$ که در عمق $h$ از سطح آزاد سیال است، فشار $\gamma h$ اعمال می‌شود. لذا یک المان کوچک را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که فشار در آن یکسان و $\gamma h$ باشد. نیروی وارد بر این المان برابر است با حاصل ضرب فشار در سطح اثر فشار یعنی:

$$F = PA \longrightarrow dF_R = P\,dA \longrightarrow F_R = \int_A P\,dA = \int \gamma h\,dA = \int \gamma y \sin\theta\,dA$$

$$= \gamma \sin\theta \int y\,dA \qquad \sin\theta = h/y \longrightarrow h = y\sin\theta$$

طبق سوال داریم:



Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مطابق استاتیک میدانیم که عبارت $\int y dA$ ، گشتاور اول سطح است و برابر است با حاصل ضرب مساحت در فاصله که از سطح از نقطه مورد نظر (O مبدأ مختصات)

$$\int_A y dA = y_c A$$

بنابراین نیروی برآیند $F_R$ برابر است با:

$$F_R = \gamma \sin\theta \int_A y dA = \gamma \sin\theta \, y_c A$$

$y_c \sin\theta = h_c \longrightarrow F_R = \gamma h_c A$

که در آن $h_c$ ، فاصله عمودی مرکز سطح صفحه مستوی مایل از سطح آزاد سیال است.

لذا طبق رابطه بالا برآیند نیروی وارد بر سطح مستوی مایل به زاویه $\theta$ بستگی ندارد و وابسته به وزن مخصوص سیال $\gamma$ مساحت صفحه $A$ و فاصله عمودی مرکز سطح تا سطح آزاد سیال $h_c$ است.

تا الان توانستیم مقدار برآیند نیروی هیدرواستاتیک را بیابیم حال گشتاور نیروی برآیند را می‌یابیم. محل اثر نیروی برآیند بر مرکز سطح جسم منطبق نیست. برای یافتن مختصات محل اثر نیرو در راستای $y$ ($y_R$) مجموع گشتاور نیروهای المان ($dF$) را با گشتاور نیروی برآیند برابر قرار میدهیم. میدانیم که مجموع گشتاورهای نیروی هر المان برابر گشتاور نیروی برآیند است.

$$F_R y_R = \int y dF = \int_A y P dA = \int_A \gamma h y dA \xrightarrow{h = y\sin\theta} F_R y_R = \int_A \gamma y^2 \sin\theta dA$$

$$F_R y_R = \gamma \sin\theta \int y^2 dA$$

با ثابت بودن $\gamma$ و $\sin\theta$ داریم:

عبارت $\int y^2 dA$ گشتاور دوم سطح یا همان ممان اینرسی سطح، $I_x$ حول محور $x$ است. بنابراین:

$$F_R y_R = \gamma \sin\theta I_x$$

از طرفی میدانیم که: $F_R = \gamma A y_c \sin\theta$ ، این رابطه را در فرمول فوق جایگذاری می‌کنیم:

$$\gamma A y_c \sin\theta \, y_R = \gamma \sin\theta I_x \longrightarrow A y_c y_R = I_x \longrightarrow y_R = \frac{I_x}{A y_c}$$



Sahand

Scanned by CamScanner

برای محاسبه $I_x$ می‌توانیم از قانون انتقال ممان اینرسی بین محورهای موازی استفاده کرد:

$$I_x = I_{xx} + Ay_c^2$$

بنابراین، مختصات محل اثر نیروی برآیند در راستای محور $y$ برابر است با:

$$y_R = \frac{I_x}{y_c A} \rightarrow y_R = \frac{I_{xx} + Ay_c^2}{y_c A} \Rightarrow y_R = \frac{I_{xx}}{y_c A} + y_c \quad (I$$

این رابطه بیان می‌کند که همواره محل اثر نیروی برآیند پایین‌تر از مرکز سطح جسم است زیرا $\frac{I_{xx}}{y_c A} > 0$. برای بدست آوردن مختصات محل اثر نیرو در راستای $x$ یعنی $(x_R)$، مجموع گشتاور نیروهای اجزا را با گشتاور نیروی برآیند نسبت به محور $y$ برابر قرار میدهیم و به طور مثال داریم:

$$F_R x_R = \int x\,dF = \int x\,P\,dA = \int x\,\gamma h\,dA = \int x\,\gamma y \sin\theta\,dA$$

$$\rightarrow F_R x_R = \gamma \sin\theta \int xy\,dA \quad \xrightarrow{F_R = \gamma A y_c \sin\theta} \quad \gamma A y_c \sin\theta\, x_R = \gamma \sin\theta \int xy\,dA$$

$$\rightarrow A y_c x_R = \int xy\,dA \rightarrow x_R = \frac{\int xy\,dA}{A y_c}$$

از استاتیک میدانیم که عبارت $\int xy\,dA$ برابر است با $I_{xy}$ که ممان اینرسی حاصل ضرب نسبت به دو محور عمود بر هم است.

$$x_R = \frac{I_{xy}}{A y_c}$$

$$I_{xy} = I'_{xy} + A x_c y_c \rightarrow x_R = \frac{I'_{xy} + A x_c y_c}{A y_c} \Rightarrow x_R = \frac{I'_{xy}}{A y_c} + x_c \quad (II$$

$I'_{xy}$ هنگامی که جسم مورد نظر حول یکی از محورهای $x$ یا $y$ متقارن باشد، برابر با صفر خواهد بود. لذا:

$$x_R = x_c$$



Scanned by CamScanner

Subject :
Date

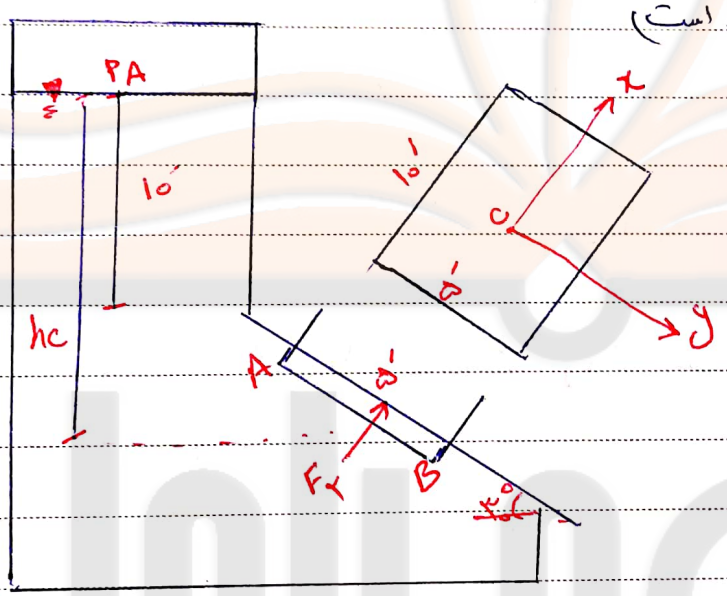
محل اثر بر آیند نیروهای هیدرواستاتیکی وارد بر صفحه $(y_R, x_R)$ را مرکز فشار CP می‌نامند. بنابراین برای محاسبه نیرو وارد بر سطح مستوی زیر سطح آزاد سیال باید مرکز سطح جسم را پیدا کرد و عمق سیال بالای نقطه‌ی مورد نظر را تا سطح آزاد سیال hc را اندازه گیری کنیم سپس از رابطه $F_R = \gamma h_c A$ مقدار نیروی برآیند محاسبه می‌شود برای محاسبه مکان اثر نیروی برآیند یا مرکز فشار کافی است از رابطه I و II استفاده کنیم.

برای دسترسی به مشخصات مرکز سطح مثل ایرسی و مساحت برخی اشکال هندسی به صفحه ۲۷ مراجعه کنید. مرکز فشار سطوح مایل برخلاف سطوح افقی، هرگز مرکز سطح واقع نمی‌شود.

**مثال سوم)** مطلوب است نیروی خشار هیدرواستاتیک وارد بر دریچه و محل اثر آن در حالت‌های زیر

الف) $P_A = P_{at}$ (در طرف باز است)

ب) $P_A = 1.1 \times P_{at}$ (در طرف بسته است)




حل الف)

$h_c = 10 + 10 \sin 30^\circ$

$\rightarrow h_c = 11.25'$

$\gamma_w = 9804 \ N/m^3 = 62.42 \ \frac{lbf}{ft^3}$

$A = 10' \times 5' = 50'$

$F_R = \gamma A h_c = 62.42 \times 50 \times 11.25 = 35114.25 \ lbf$



Scanned by CamScanner

Date

$$y_R = y_c + \frac{I_x}{A y_c} = \left(\frac{10'}{\sin 30} + 2.5\right) + \frac{1/12 \times 5^3 \times 10}{5' \times 10' \times 22.5}$$

$$\rightarrow y_R = 22.83 \text{ ft}$$

$$x_R = x_c + \frac{I'_{xy}}{A y_c} \xrightarrow{I_{xy}=0} x_R = x_c \xrightarrow{\text{طبق جدول ۱۵-۱}} x_c = 0 \rightarrow x_R = 0$$

$$\rightarrow CP = (0, 22.83)$$

حل ب)

$$P_{@t} = 14.7 \text{ psi} \quad , P_A = 18.2 \text{ psi}$$

$$10': \Delta P = \gamma \Delta h \rightarrow \Delta h = \frac{18.2 - 14.7}{42.4 \frac{lbf}{ft^3}} \Rightarrow \Delta h = \frac{2.5 \text{ psi}}{42.4 \frac{lbf}{ft^3}}$$

$$\star\ 1 \text{ psi (Pound Per square inch)} = 1 \frac{lb}{inch^2} \times \frac{1 \text{ inch}^2}{1/12^2 \text{ ft}^2}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ psi} = 1 \frac{lbf}{inch^2} = 144 \frac{lbf}{ft^2}$$

$$\Delta h = \frac{2.5 \text{ psi}}{42.4 \frac{lbf}{ft^3}} \times \frac{144 \frac{lbf}{ft^2}}{1 \text{ psi}} \Rightarrow \Delta h = 8.77 \text{ ft} \simeq 8.8$$

یعنی ارتفاع از 10 ft به 18.77 تغییر می‌یابد و بنابراین به طریق مشابه از قسمت الف سؤال حل می‌شود.

$$hc = 18.8 + 2.5 \sin 30 = 19.33 \text{ ft}$$

$$FR = 42.4 \times 19.33 \times 50 = 40219.6 \text{ lbf}$$

$$y_R = y_c + \frac{I_x}{A y_c} = \left(\frac{19.33}{\sin 30} + 2.5\right) + \frac{1/12 \times 5^3 \times 10}{5' \times 10' \times 38.65} = 41.21 \text{ ft}$$



Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$x_R = x_C = 0 \longrightarrow cp = (0, 21.11)$, $F_R = 40419.257$ lbf

$P_A = 18.2$ psi

$P_{at} = 14.7$ psi

$\Delta P = 3.5$ psi

برش جدار:

$I_{at} = 10.22$ m-Hg

$\Delta P = \gamma \Delta h \rightarrow 3.5$ psi $= 443.4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2} \cdot h_{eq}$

$h_{eq} = 8.08$ ft

تبدیل واحد $\Rightarrow \frac{3.5 \times 144}{62.4} = 8.08$ ft

$$y_R - y_C = \frac{I_{mm}}{A y_C} = \frac{\frac{1}{12} \times 10 \times (5)^3}{50 \times (35' + \frac{10'}{\sin 30} + 8.08')} = 0.0528 \text{ ft}$$

$x_R - x_C = \frac{I_{mm}}{A y_C} = 0$



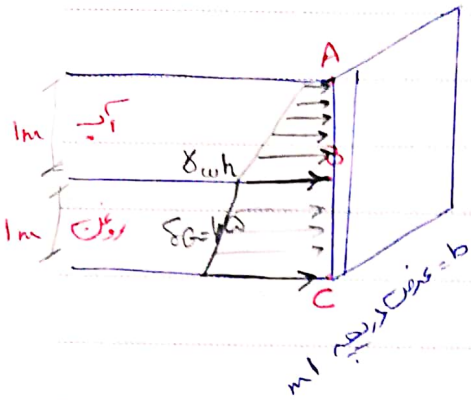
Scanned by CamScanner

مثال) نیروی برآیند وارد به دریچه و محل اثر آن را بیابید.

$\gamma_w = 9810 \ N/m^3$

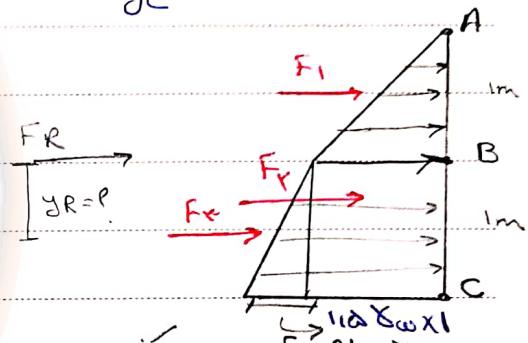
$F_R = ? \ \gamma h_c A$ (حجم) $\quad y_R = y_c + \frac{I_{mm}}{A y_c}$ ← رابطه

$F_R \equiv V$ $\quad x_R = x_c + \frac{I_{mm}}{A y_c}$




$F_1 = \frac{1}{2} (\gamma_w \times 1) \times 1 \times 1 = 4905 \ N$ (عمق × ارتفاع × قاعده)

$F_2 = (\gamma_w \times 1) \times 1 \times 1 = 9810 \ N$ (قاعده × ارتفاع)



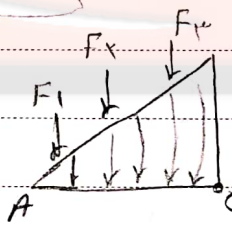

یا باید $F = Ah_c \gamma$ را حساب کنیم.

$F_3 = \frac{1}{2} (1.5 \gamma_w \times 1) \times 1 \times 1 = 7357.5 \ N$ (قاعده × ارتفاع × عمق)

حجم آنرا بدست بیاوریم.

$F_R = F_1 + F_2 + F_3 = 4905 + 9810 + 7357.5 = 22072.5 \ N$

$y_R = 0.94 \ m$

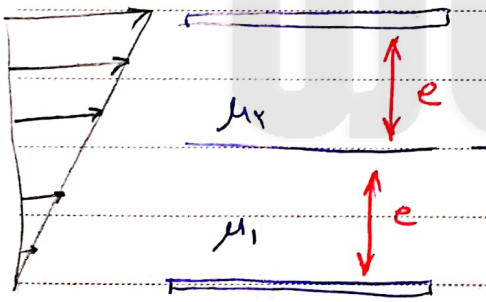



نیرو × بازو = عمل

$C$ حول = عمل برآیند $= F_3 \times 1.3 + F_2 \times 1.2 + F_1 \times (1 + 1/3) = F_R \times y_R$

(بازو) (بازو) (بازو)

مثال) ارتباط $\mu_1$ و $\mu_2$ در لزجت را بدست بیاورید.




$\tau = \mu_2 + \frac{du}{dy} = \mu_2 \frac{u - u/2}{e} = \frac{u \mu_2}{2e}$

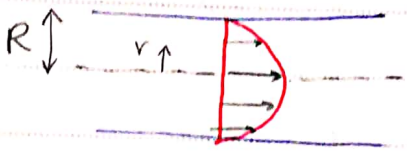
$\tau = \mu_1 \frac{du}{dy} = \mu_1 \frac{u/2 - 0}{e} = \frac{u \mu_1}{2e}$

ثابت؟

$\tau_2 = \tau_1 \Rightarrow \frac{u \mu_2}{2e} = \frac{u \mu_1}{2e} \Rightarrow \mu_1 = 2\mu_2$



Scanned by CamScanner




$$\frac{u}{u_{max}} = \left(1 - \frac{r^n}{R^n}\right)$$

ح جداری رابست آورده (تنش برشی)

ابتدا مشتق می گیریم نسبت به R

$$\tau = \mu \frac{du}{dn} = \mu \frac{du}{dr}$$

$$\tau_r = \bar{\bar{R}}$$

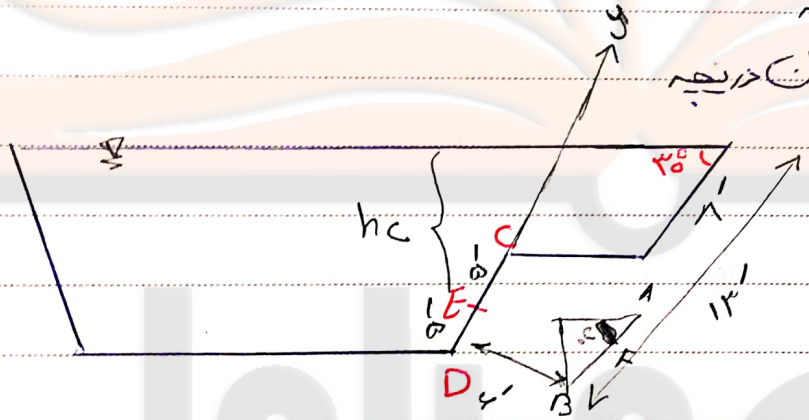
تمرین: این دریچه مثلثی در CD لولا شده است و توسط نیروی P که در E وارد می شود باز می شود

$SG = 1.8$

سیال با چگالی نسبی ۱.۸ میباشد و به طرف اتمسفر باز می شود:

a) مقدار نیروی وارد به دریچه

b) مقدار نیروی P برای باز کردن دریچه




$$F_R = \gamma A h_c$$

$$h_c = 1.2 \times \sin 30 = 0.6$$

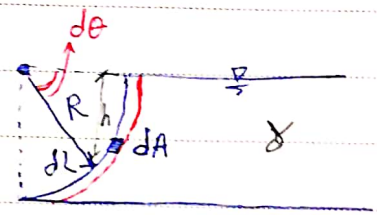
مسئله های مهم:

۲۰ - ۲۸ - ۲۲ - ۳۵ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۴ - ۵۱ - ۹۲ - ۷۲ - ۷۳



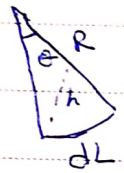
Scanned by CamScanner

## نیروی هیدرواستاتیک وارد به سطوح منحنی (خمیده)




$dF = P\,dA = \gamma h\,dA$ — عرض دریچه $= b$

$F = \int \gamma h\,dA = \int \gamma h\,(b\,dL)$




$F_R = \int_0^{\pi/2} \gamma h\, b\, R\, d\theta$ — (روش مستقیم)

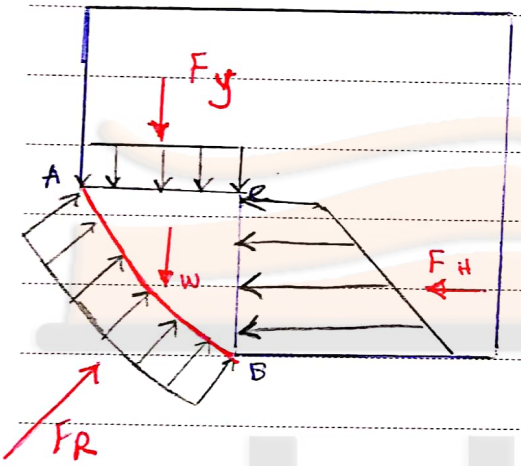
$dL = R\,d\theta$

$h = R\sin\theta$

$F_R = b\gamma R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta$

$= \gamma b R^2 \left(-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \gamma b R^2 \left(0 - (-1)\right] = b\gamma R^2$

$= \gamma R^2$




$F_R^2 = F_H^2 + F_V^2$

BC = تصویر قائم دریچه

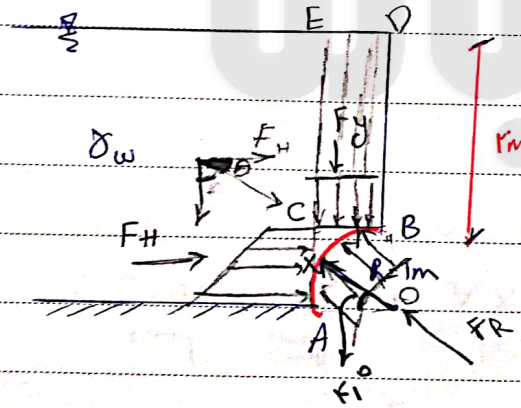
AC = تصویر افقی دریچه

$F_R^2 = F_H^2 + (F_y + w)^2$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{F_V}{F_H}$

**مثال:** نیروی وارد بر دریچه و محل اثر آنرا بدست آورید.

عرض دریچه $= 2\,m$ $\quad F_R^2 = F_H^2 + (F_y + w)^2$




$F_H = \gamma A\, h_c = \gamma \underbrace{(1\times 2)}_{\text{مساحت}} \times \underbrace{(2 + 0.5)}_{\text{وسط}} = 5\gamma$

$F_V = (V_{oAED} - V_{oBA})\,\gamma_w$

$F_V = (3\times 1\times 2) - (\tfrac{1}{4}\pi\times 1^2\times 2)\,\gamma_w$

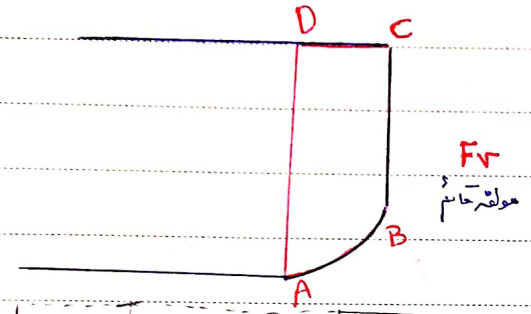
$F_V = (4.43)\,\gamma_w$



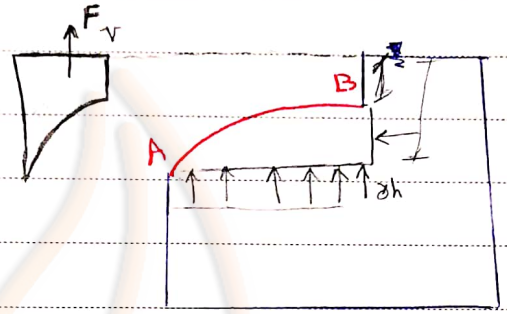
Scanned by CamScanner

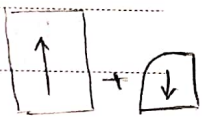
Subject :
Date

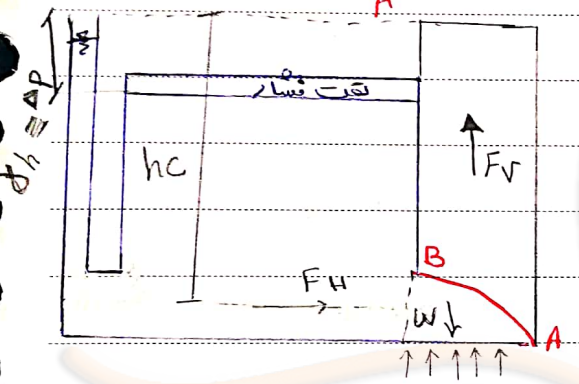
$F_R = \left(\sqrt{5^2 + 4.33^2}\right)\gamma_w$ $\quad \theta = \tan^{-1}\frac{4.33\gamma_w}{5\gamma_w} = 41.05^\circ$




$F_V$ موازنه حاشیه

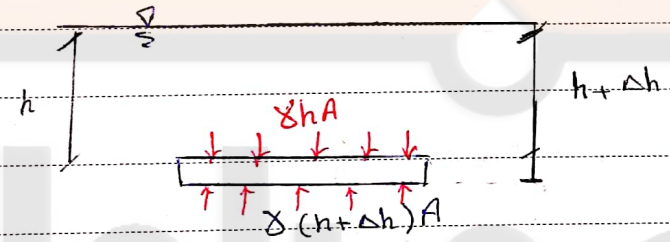





$F_H = \gamma A h_c$

نیروی شناوری Bojant force



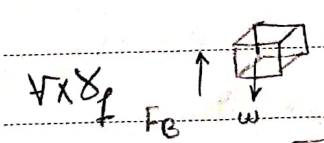

$F_B = \Delta F = F_b - F_t = \gamma_{f_{(سیال)}} A \Delta h$

به اندازه وزن سیال هم حجم بدن (جسم) نیروی شناوری $F_B = \gamma_f \cdot V_{جسم}$

تعادل $F_B = W$

$\gamma_f \times V_{(داخل شده)} = \gamma_{جسم} \times V_{جسم}$

$\frac{V_{sub}}{V_{total}} = \frac{\rho_{جسم}}{\rho_{سیال}}$




به اندازه حجم مربع داخل آب فرو میرود.

وزن = وزن سیال × حجم جابجا شده



PAPCO
Scanned by CamScanner

Subject :
Date

مسئله : یک مکعب به ضلع $4\,m$ به جرم $14\,ton$ ، وزن مخصوص $10000\ N/m^3$ ، $g = 10\ m/s^2$

$$\gamma_{جسم} = \frac{14\times10^3}{4^3}$$

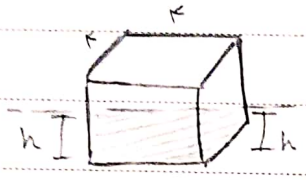
$$V_{جسم} = 4^3$$

- این مکعب تا چه عمقی در آب فرو می‌رود ؟

$$\gamma_f \times V_{sub} = \gamma_{جسم} \times V_{جسم}$$

$$10^4\ N/m^3 \times 4\times4\times h = \frac{14\times10^3}{4^3} \times 4^3$$

$$h = 1\,m$$




مثال ۵

ویسکوزیمتر

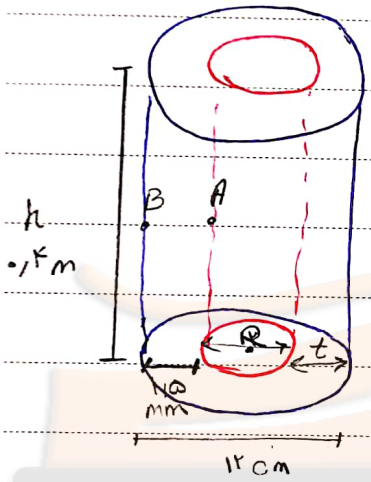
سرعت استوانه داخلی $= 300\ دور/min = n$

گشتاور لازم $= 1.8\ N.m$

$\mu = ?$

سرعت

فرمول $\Rightarrow \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n}$




$$T = r.F = R.F = R.\tau A$$

$$T = R\left(\mu \times \frac{v}{t}\right) \times (2\pi Rh)$$

$$\omega = 2\pi n^\circ$$

$n^\circ$ = تعداد دورها نسبت به زمان

$$T = R.\mu \frac{R\omega}{t} 2\pi R h$$

$$T = \mu \frac{4\pi^2 R^3 n^\circ h}{t}$$

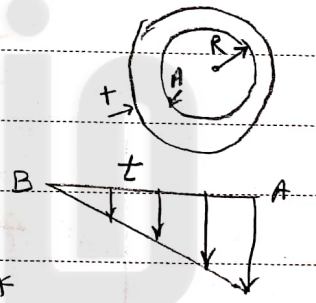
$n = 300$ دور/دقیقه $= 5$ دور/ثانیه

$$\left.\begin{matrix} v = R\omega \\ \omega = 2\pi n^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow R 2\pi n^\circ$$

$$1.8\ N.m = \mu \frac{4(3.14)^2 \times 0.1 \times 5 \times 0.4}{0.015\ m}$$

$$= 0.158\ \frac{N.s}{m^2}$$

$n^\circ$ دور در دقیقه $= 2\ rpm$






Scanned by CamScanner

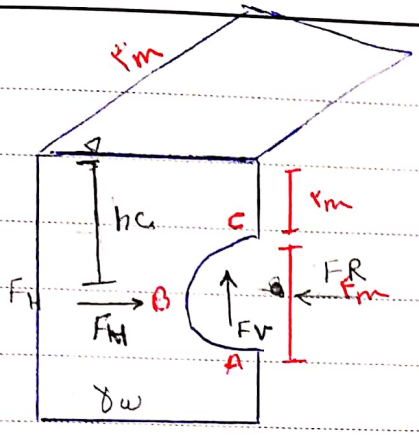
Subject :
Date

مثال ۱

$F_{R-ABC} = ?$

نقطه اثر $= ?$

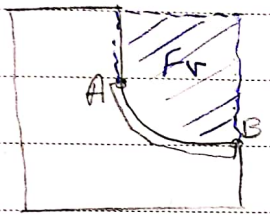
$F_R^2 = F_H^2 + F_V^2$




عرض تانک $= ۳m$

$F_H = \gamma A h_C$

$F_H = ۹۸۱۰ N/m^3 \times (۴ \times ۴) \times (۲+۲) = ۴۷۰۱۹ kN$



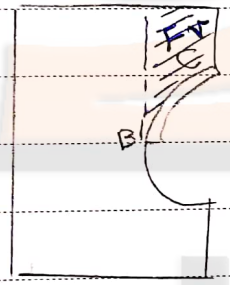

$F_V = (\frac{1}{4} \pi R^2) \times ۴ \times ۹۸۱۰$

$= ۱۸۴۱۹ \quad kN$

$\theta = \tan^{-1} \frac{F_V}{F_H} = \frac{۱۸۴۱۸}{۴۷۰۱۹}$

$\hat{\theta} = ۲۱۱۴۲^\circ$

برای مثال حرکت سؤال قبل
اینبار $F_V$ را پیدا کنیم




$F_R = \sqrt{۴۷۰۱۹^2 + ۱۸۴۱۹^2} = ۵۰۵۱۹ \quad kN$

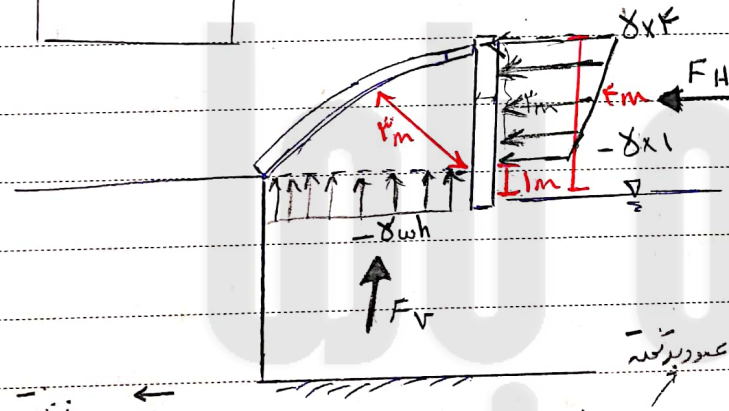
مثال)

$\gamma = ۱۰۰۰۰ \quad N/m^3$

$x = ۳$

$g = ۱۰ \quad m/s^2$

محور دریچه $= ۱ m$




همزمان سطح بازسیل است.

نیروی وارد به دریچه؟

محل اثر؟

عمود بر تخته

$-\gamma wh \rightarrow$ چون از سطح آب است بالاتر میره است

$F_H \Rightarrow (\frac{-۴ \times -\gamma}{۲} \times ۳) \times ۱m = -۱۸\gamma_w$

$\uparrow F_V = (-\gamma_w \times ۳^m) \times ۱^m = -۳ \gamma_w$

$\downarrow w = (\frac{1}{4} \pi \times ۳^2) \times ۱^m \times \gamma_w = ۷۱۷ \gamma_w$



Scanned by CamScanner

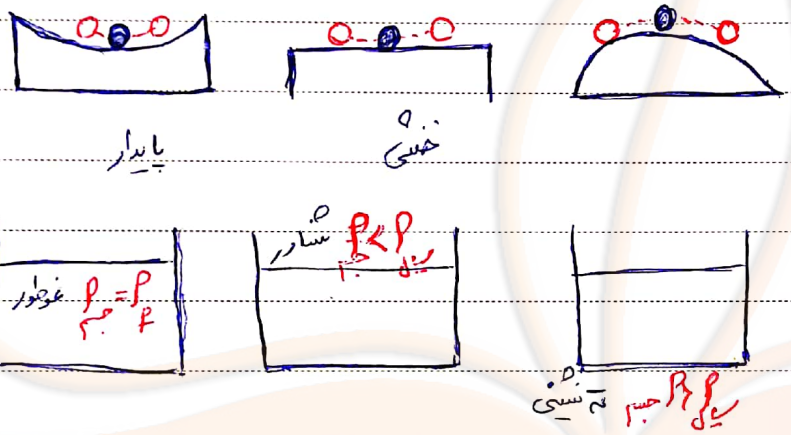
Subject :
Date

$$\vec{F}_{V_1} = \vec{F}_{V} + \vec{\omega} = -2\gamma_w - 9{,}75\,\gamma_w = 9{,}75\,\gamma_w$$

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_{V_1}^2} = \sqrt{-7{,}5\gamma_w^2 - 9{,}75\gamma_w^2} = \gamma_w \downarrow$$

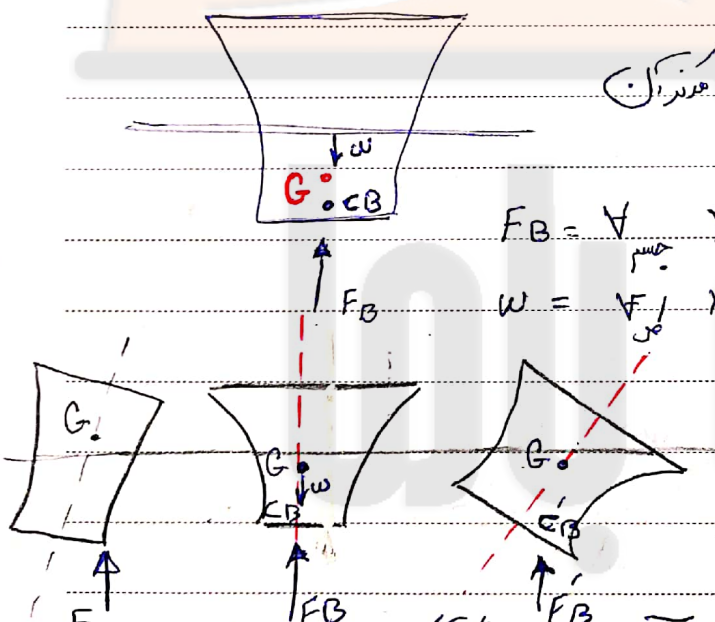
$$\therefore \vec{F_R} = -7{,}5\,\gamma_w \hat{i} - 9{,}75\,\gamma_w \vec{j}$$

## شناوری و پایداری




**مرکز شناوری $C_B$ :** آن قسمتی از بدنه که زیر آب است مرکز آن مرکز شناوری می‌شود.

**مرکز ثقل G**




$$F_B = \forall_{\text{جسم}} \times \rho_f \times g$$

$$w = \forall_{\text{ف}} \times \rho_{\text{جسم}} \times g$$

ارتفاع متاسنتریک $\overline{MG} = \overline{MB} - \overline{BG}$

$\overline{MG} > 0$ پایدار

$$\overline{m_B} = \frac{\gamma I_{xx}}{w} = \frac{I}{\forall}$$

$\overline{MG} < 0$ ناپایدار




Scanned by CamScanner

Date

$$\overline{MG} = \overline{MB} - \overline{BG}$$

$$\overline{MB} = \frac{\forall I_{yy}}{W} = \frac{I}{\forall}$$

$$\frac{W = \text{وزن مخصوص}}{\forall_0} = \frac{\text{حجم}}{\forall}$$

$$\overline{MG} = \frac{I_{yy}\forall}{W} \quad (2)$$

$C$ کوپل لازم برای برگرداندن بوسیله تعادل $= \forall \Delta\theta I_{yy}$

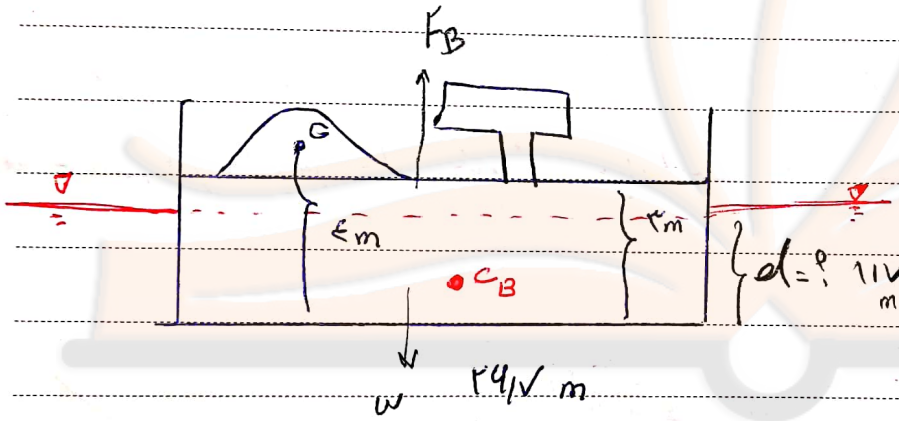
چه عواملی به $\overline{MG}$ بستگی دارد؟

۱- وزن مخصوص سیال هرچه بیشتر باشد بهتر است.

۲- وزن مخصوص

۳- $I$ هرچه بیشتر شود بهتر است.

مثال:

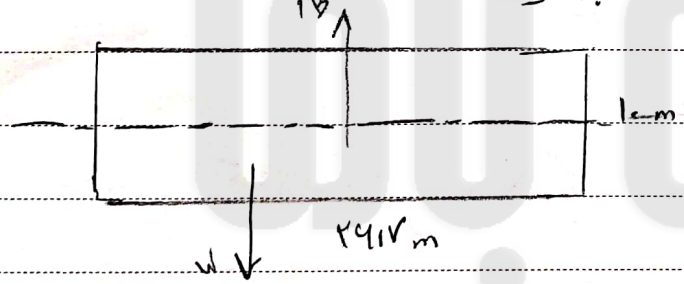



$W = ۴۴۵۰ \text{ kN}$

عرض شناور $= 10\text{m}$

الف) ارتفاع فرا بندری (متاسنتریک) برای چه حالتی حداقل ترین حد است؟

ب) آیا این شناور پایدار است یا خیر؟




$F_B = W$

$F_B$ = حجمی از شناور که داخل آب است.

$$F_B = W \rightarrow (۲۴۱۷ \times 10 \times d)\forall_f = ۴۴۵۰ \text{ kN} \rightarrow d = ۱۱۷ \text{ m}$$

$\forall = ۹۸۱۰ \text{ N/m}^3$

الف) $\rightarrow L = ۴ - \frac{۱۱۷}{۲} = ۳۱۵ \text{ m}$

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$\bar{N}_G = \frac{\chi \rho I_{yy}}{W} - L \Rightarrow \frac{9810\ N/m^3 \times 2225}{44050 \times 10^3\ N} - 2.5 = -1.173$ ← (-)

پایدار است. چون $\bar{N}_G$ منفی است. ۴۹۰۵

$I_{yy} = \frac{bh^3}{12} = \frac{24.7 \times 10^3}{12} = 2225$

۱۴) اگر شناور حول محور $10^\circ$ دوران یابد گشتاور لازم برای برگرداندن دوران چقدر است؟

$\Delta\theta$ را باید به رادیان تبدیل کنیم. ← چون باید یکاها [I] شود.

$\frac{10 \times 2\pi}{360} = 0.17$

$C = \chi \Delta\theta I_{yy} \Rightarrow$

$[FL] \leftarrow \left[\frac{F}{L^3}\right] \leftarrow [1] \quad [L^4]$

$\Rightarrow C = 9810\ N/m^3 \times 0.17 \times 2225$

$= 3808\ kN.m$

* همیشه اگر $G_B$ پایین‌تر از $G_A$ باشد، پایدار است. باید برای شکل‌های راحت‌تر بگیریم که $G$ بالاتر از $C_B$ است.

$9810\ N/m^3 \Rightarrow 9.81\ kN/m^3$

(مثال کتاب ۲-۱۷ حل است)

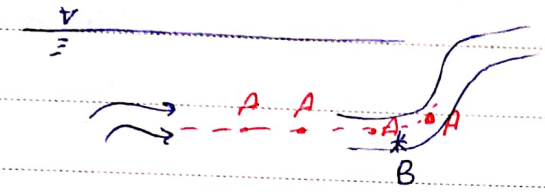
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject :
Date

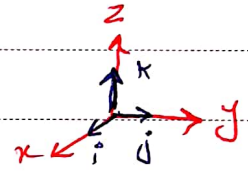
## فصل سوم: دینامیک سیالات

دینامیک سیالات ← دیدگاه لاگرانژی
دیدگاه اویلری




$$\vec{V} = u(x,y,z,t)\hat{i} + v(x,y,z,t)\hat{j} + w(x,y,z,t)\hat{k}$$ ← میدان سرعت

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$




$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$ ← میدان شتاب

$$= \frac{d\vec{V}}{dt}\times\frac{dt}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dx}\times\frac{dx}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dy}\times\frac{dy}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dz}\times\frac{dz}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

$\nabla$ ← عملگر دل

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{V}$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

شتاب انتقالی یا جابه جایی ← شتاب محلی یا شتاب لوکال

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

شتاب متوسط

شتاب لحظه‌ای

مثال:

$\vec{r} = (4+3y+t^2)\hat{i} + (2y+8)\hat{j} + 5z\,\hat{k}$

$m = 2\ kg$ , $t = 1\ s$ $\Rightarrow a = ?$

حل:

$a_x =$

$a_y =$

$a_z =$

دبی:

۱- دبی جرمی $\dot{m} = \rho \dot{V} \quad \left[\frac{M}{T}\right]$

۲- دبی حجمی (دبی) $\dot{V} = \frac{V}{t} \quad \left[\frac{L^3}{T}\right]$

$Q =$

از این به بعد دبی را می‌نویسیم.

مقدار جریانی که (جرم یا حجم) عبوری از واحد سطح است بر زمان $\Leftarrow$ دبی

$\delta \dot{m} = \frac{m}{t} = \frac{\rho \times \delta \forall}{t} = \frac{\rho \delta A V(\hat{n})}{t} = \rho V(\hat{n})\, \delta A$

بردار یکه عمود بر سطح

$\dot{m} = \rho(\vec{V}.\vec{n})\, \delta A$

$Q = (\vec{V}.\vec{n})\, \delta A = |V| \cos\theta\, \delta A$

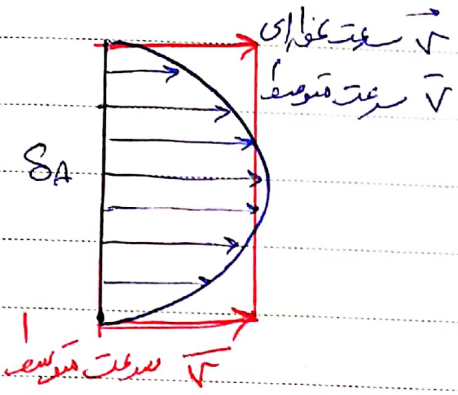
ورودی: $180 > \theta > 90$

خروجی: $0 < \theta < 90$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject :
Date




$SS = \int_{C.S}$

$\forall\forall\forall = \int_{C.V}$

$$\delta \dot{m} = \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) \delta A$$

$$\dot{m} = \int_{\text{سطح کنترل } C.S} \delta \dot{m} = \int_{C.S} \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) \delta A$$ ← دبی جرمی

$$\dot{m} = \rho \bar{v} A$$ ← دبی جرمی متوسط

$$\int \rho \vec{v} \hat{n} \delta A = \rho \bar{v} A$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\rho A} \int \rho (\vec{v} \hat{n}) \delta A$$

در بسیاری از مسائل می‌توان با دقت خوبی $\rho$ را از انتگرال خارج کرد.

اگر $\rho$ ثابت باشد ⟸ $\bar{v} = \frac{1}{A} \int (\vec{v} \cdot \hat{n}) \delta A$

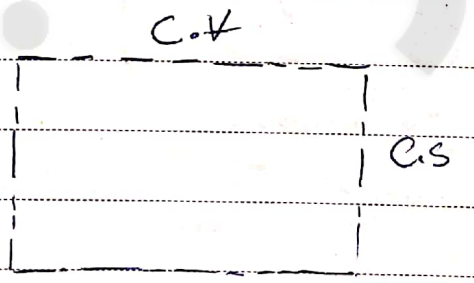
سرعت متوسط ⟸ $Q = A\bar{v} = \int (\vec{v} \cdot \hat{n}) \delta A$

$$\dot{m} = \rho Q = \rho A \bar{v}$$

$$Q = \int_{C.S} \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) \delta A$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\rho A} \int_{C.S} (\vec{v} \cdot \hat{n}) \delta A$$

$(\vec{v} \cdot \hat{n}) = v_n$




C.V حجم کنترل
C.S کنترل سطح




Scanned by CamScanner

$$\bar{V} = \frac{1}{\rho A} \int_{C.S.} \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) \delta A \qquad (V_n = \bar{V} \cdot \hat{n})$$

حجم کنترل C.V

کنترل سطح C.S

تعمیم انتقال رینولدز

متغیر جامع B $\begin{cases} m & \text{جرم} \\ m\bar{V} & \text{اندازه حرکت} \\ E & \text{انرژی} \end{cases}$

متغیر متمرکز $b = \frac{B}{m} \rightarrow \begin{cases} m/m = 1 & \text{یوسگی} \\ \frac{m\bar{V}}{m} = \bar{V} & \text{مومنتوم} \\ E/m = e & \text{انرژی} \end{cases}$

$$B = \int_{C.V} \rho b \, d\forall = b \cdot m$$

حجم

$$B = bm \rightarrow dB = b\,dm \rightarrow B = \int b\,dm = \int b \rho \, d\forall$$

رابطه ترنسپورت رینولدز:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{dt} \int_{C.V} \rho b \, d\forall + \int_{C.S} \rho b (\vec{V} \cdot \hat{n}) \, dA$$

ترم نابردار باید صفر شود

$$B = m \rightarrow \frac{dm}{dt} = 0 \qquad b = m/m = 1$$

$$\frac{1}{dt} \int_{C.V} \rho \, d\forall + \int_{C.S} \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) \, dA$$

رابطه پیوستگی ← تغییر جرم کنترل

$$\frac{1}{dt} \int_{C.V} \rho \, d\forall + \int_{C.S} \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) \, dA = 0$$

نرخ زمانی تغییر جرم کنترل

نرخ زمانی جریان جرم از سطح کنترل

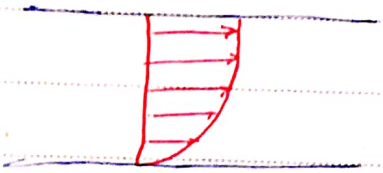
P4PCO

Scanned by CamScanner

$$\dot{m} = \rho Q = \int_{cs} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,\delta A = \sum_{cs} \rho \bar{V} A$$

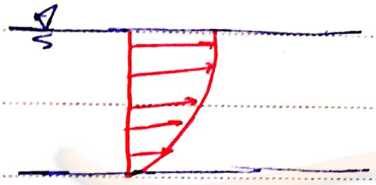
$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

انواع جریان: آرام / آشفته



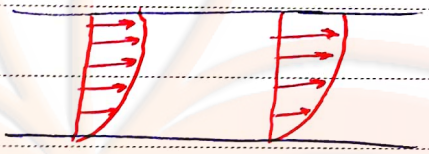

پایا – دائمی – (زمان معیار است.)

ناپایا – غیردائمی –




یکنواخت uniform (مکان معیار است)

غیریکنواخت inuniform




واقعی

ایده‌آل

چرخشی

غیرچرخشی

$$\int_{c.s} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,\delta A = 0$$

جریان دائمی:

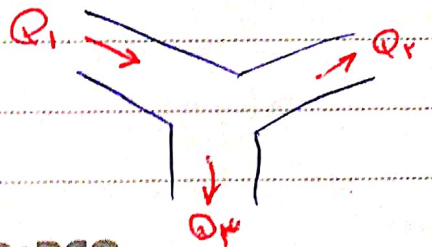
$$\sum_{c.s} \rho(\vec{V}\cdot n)A = 0$$

جریان دائمی و تراکم‌ناپذیر و یکنواخت:

برگشت‌پذیر

برگشت‌ناپذیر

$$\Rightarrow \sum_{\text{خروجی}}^{out} \rho \bar{V} A - \sum_{\text{ورودی}}^{in} \rho \bar{V} A = 0 \rightarrow \boxed{\sum_{out} \rho \bar{V} A = \sum_{in} \rho \bar{V} A}$$




$$Q_2 + Q_3 = Q_1$$

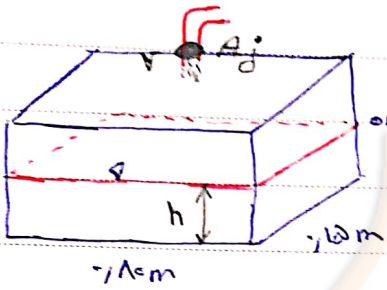
Scanned by CamScanner

Subject:
Date

جریان دائمی، سرعت یکنواخت و سیال تراکم ناپذیر است:

$$\sum_{CS} \vec{V} A = 0$$

مسئله:




(شیر دائمی است جریان) دریالا ترشت
نمال تغییر می‌کند.

دبی خروجی آب از شیر $= 3 \frac{lit}{sec}$

$dh/dt = 6 \frac{mm}{sec}$ ← همانند چند میلی‌متر بالا می‌آید سطح آب.

$$\frac{1}{dt}\int_{C.V} dv + \int_{C.V} (\vec{V}\cdot\hat{n})\, SA = 0$$

$$d/dt\,(V) + \sum Q = 0 \Rightarrow d/dt\left[(0.8\times 1.5)\times h + A_j(0.4-h)\right] - 3\,lit/s = 0$$

$$\left[(0.12) - A_j\right)h + 0.4 A_j\,]$$

$1\,m^3 = 1000\,Lit$

$$d\left[(0.12 - A_j)h + 0.4\,A_j\right] = 0.003\,dt$$

$$\Rightarrow d/dt\left[(0.12 - A_j)h + 0.4\,A_j\right] = 0.003\ m^3/sec$$

$$(0.12 - A_j)\, dh/dt = 0.003\ m^3/sec$$

$$dh/dt = \frac{0.003\ m^3/sec}{(0.12 - A_j)\ m^2} = \frac{3\times10^{-3}}{12\times10^{-2}} = 1/4\times10^{-1}\ m/s \times 10^{-2} \Rightarrow 25\ mm/s$$

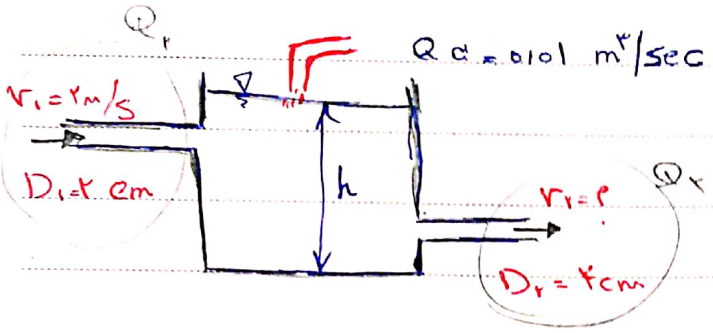
$A_j = 0$

$\frac{40}{2.5} = 16$ ثانیه طول می‌کشد تا پر شود.

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

مثال) با فرض اینکه ارتفاع h ثابت است، سرعت $V_2$ چقدر می‌شود؟




چون ارتفاع h ثابت است جریان دائمی است.

سیال تراکم ناپذیر است پس از جایی نیز صرف نظر می‌کنیم

$$\int_{C.S} \rho(\vec{V}.\hat{n})\,dA = 0 \Rightarrow \sum \rho Q = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{C.S} Q = 0 \Rightarrow \sum_{out} Q - \sum_{in} Q = 0$$

$Q = AV$

$18.64\ m/s$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V} \rho b\,d\forall + \int_{C.S} \rho b(\vec{V}.\hat{n})\,dA$$

B

- $B = m \rightarrow b = m/m = 1 \Rightarrow \partial/\partial t \int_{C.V} \rho\,d\forall + \int_{C.S} \rho(\vec{V}.\hat{n})\,dA = 0$ (رابطه پیوستگی)
- اندازه حرکت: $B = m\vec{V} \rightarrow b = \frac{m\vec{V}}{m} = \vec{V} \Rightarrow \frac{d(m\vec{V})}{dt}_{sys} = \sum \vec{F}_{CS+CV} = \partial/\partial t \int_{CV} \rho\vec{V}\,d\forall + \int_{CS} \rho\vec{V}(\vec{V}.\hat{n})\,dA$ (رابطه ممنتوم یا اندازه حرکت)

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V}\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}$$

جریان دائمی $\Rightarrow \sum_{sys} \vec{F} = -\int_{C.S} \rho\vec{V}(\vec{V}.\hat{n})\,dA$

اگر سرعت تغییر نکند می‌توان انتگرال را به $\sum$ تبدیل کرد.

سرعت تغییر کند $\Rightarrow \sum \vec{F} = \sum \rho\vec{V}Q$

$$= \sum \dot{m}\vec{V} \qquad \pm \sum_{out} \rho\vec{V}Q - \sum_{in} \rho\vec{V}Q$$

$C.S$

$P(V.n)dA = dm$

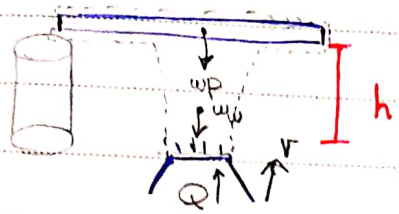
$(\vec{V}.\hat{n})\,dA = dQ$

$|V|\cos\theta\,dA = d\theta$ → جریان خروجی (+) $\quad 0 < \theta < 90°$ ; جریان ورودی (−) $\quad 180 > \theta > 90°$

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject :
Date




مثال)

$v_j = 10\ m/s$

$d_j = 20\ mm$

$m_{wp} = 2\ kg$

$h = 80\ m$

$\rho = 1000\ kg/m^3$

$g = 9.81\ m/sec^2$

$$\Sigma F = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho \vec{v}\, d\forall + \int_{C.S} \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dA$$

چون جریان دائمی است پس میتوان قسمت اول که مربوط به زمان است را حذف کنیم.

سرعت یکنواخت است پس انتگرال به جمع تبدیل میشود.

$$\Sigma \vec{F} = \Sigma \rho \vec{V} Q$$

$$-w_p - w_w = \Sigma \rho (+\vec{V})(-Q)$$

$w_p$ = وزن صفحه است ، $w_w$ = وزن آب است

وزن $\Rightarrow$ $w = \gamma \forall$ (وزن مخصوص × حجم)

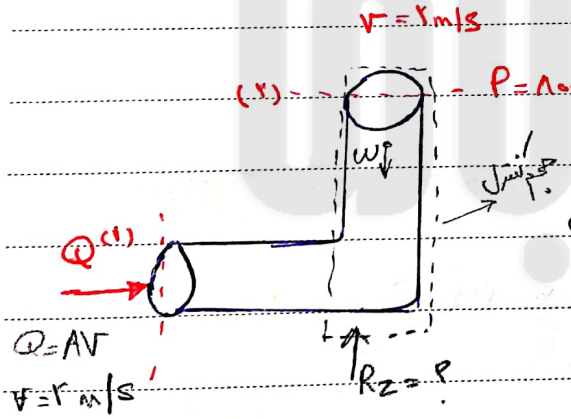
حجم $\Rightarrow$ $Q = A V$ (مقدار آب ورودی داریم)

$$-2\ kg \times 9.81\ m/s^2 - \left[\frac{\pi}{4}(0.02)^2 m^2 \times h\right] \times 1000\ kg/m^3 \times 9.81\ m/s^2 = 1000\ kg/m^3 \times (+10\ m/sec)\left(-\frac{\pi}{4}(0.02)^2 \times 10\ m/s\right)$$

$$h = 0.4\ m$$

چون سطح مقطع کوچک است پس سرعت بزرگ است.

مثال)




$A = 0.01\ m^2$

$Q = 0.02\ m^3/sec$

$W = 40\ N$ آب داخل رزوی

مساحت سیرو ماهم با $P_2$ و با صرف نظر از افت انرژی

$\rho = 1000\ kg/m^3$

$g = 9.81\ m/sec^2$



Scanned by CamScanner

Subject :
Date

$$\Sigma F = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho v \, dv + \int_{CS} \rho \vec{V}(\vec{v}\cdot\hat{n})\, dA$$

چون دائمی است پس مشتق اول را حذف می‌کنیم. خود سوال گفته سرعت یکنواخت است پس:

$$\vec{\Sigma F} = \Sigma \rho \vec{v} Q$$

$$Q = A V$$

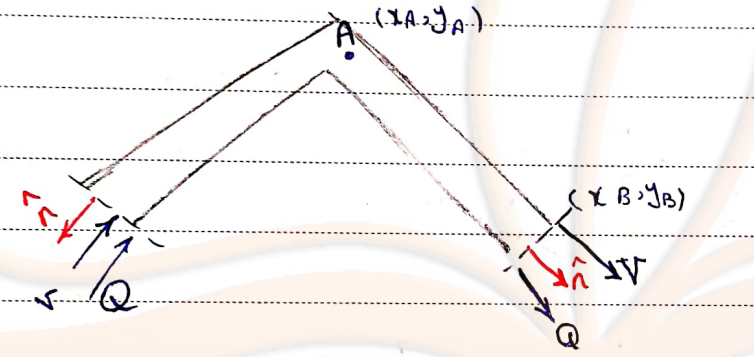
$$0.02\ m^3/sec = 0.01\ m^2 \times V \Rightarrow V = 2\ m/s$$

$$+R_z - W - PA = \rho \times (+2\ m/s)(+0.02\ m/s)$$

$$+R_z - 50 - 800 \times 0.01\ m^2 = 1000\ kg/m^3 \times (2\ m/s)(0.02\ m/s)$$

$$R_z \Rightarrow 44\ N$$

(مثال ۱۱-۳ ص ۱۳۷ مهم است) ★




$$\hat{n}_{\vec{Ab}} = \frac{(x_B - x_A, y_B - y_A)}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y)$$

$$\vec{\Sigma F} = \frac{\partial}{\partial t}\int \rho \vec{v} dv + \int \rho (\vec{v}\cdot\hat{n}) dA$$

$$\Sigma \beta \rho \vec{v} Q$$

$\beta$ = ضریب تصحیح اندازه حرکت بی‌بعد است

$$\beta = \frac{\int \rho(\vec{v}\cdot\hat{n})dA}{\Sigma \rho \vec{v} Q}$$

$$\beta = \frac{1}{A}\int \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2 dA$$

$$\rho Q = \dot{m}$$

از ۱۴۲ تا ۱۴۷ حذف است.



Scanned by CamScanner

Subject :
Date

**معادله انرژی لزر**

$m \rightarrow$ پرسسل
$m_2 \rightarrow$ هوشمند
$E \rightarrow$ انرژی ⟵ گرما / کار

$$e = \frac{E}{m}$$

انرژی حرکت واحد جرم

$$e = \frac{v^2}{2g} + gz + \tilde{u}$$

حرکتی — پتانسیل — انرژی داخلی ⟹ کمیتی انرژی ناخالص است

$$\sum_{out} \left(\tilde{u} + \frac{v^2}{2} + gz\right) - \sum_{in} \left(\tilde{u} + \frac{v^2}{2} + gz\right) = \dot{Q}_{net} + \dot{W}_{net}$$

$E_1 \rightarrow \boxed{\dot{W}, \dot{Q}} \rightarrow E_2$

$\dot{Q}_{net}$: نرخ گرمای خالص انجام شده
$\dot{W}_{net}$: نرخ کار انجام شده

(مثال ۳-۱۸ صفحه ۱۵۱) ⟸ حل شود.

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + loss\Big]_1^2$$

انتخابی — جنبشی — فشاری — تلفات

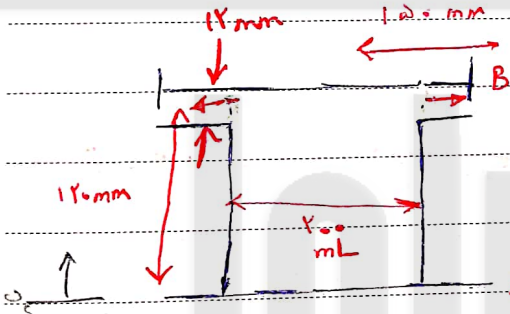
$\times g$ ⟹

$$z_1 g + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = g z_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + g\,loss\Big]_1^2$$

**معادله هد انرژی**
(از جنس طول هستند)
$[L]$

**انرژی حرکت واحد جرم**
(از بعد طول نیست)
$[L^2/t^2]$

مثال)




$$loss\Big]_A^B = 0.2\,\frac{v_B^2}{2g}$$

$P_A = 1100\ kPa$ $\quad Q = ?$

سیب باید در نقطه B فشار چون وارد هوا آزاد شود

$$z_A + \frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} = z_B + \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} + loss\Big]_A^B$$

$$0 + \frac{v_A^2}{2g} + \frac{1100 \times 10^3\ N/m^2}{4800} = 0.120\ m + \frac{v_B^2}{2g} + 0.2\,\frac{v_B^2}{2g}$$

$$v_A^2 - v_B^2 = \boxed{\quad} \quad (1)$$ انرژی

$$Q = A_A V_A = A_B V_B \quad (2)$$ پرسسل

$$A_B = \pi D \times h = \pi \times 150\,mm \times 12\,mm$$

$\Rightarrow V_B > V_A \Rightarrow Q = AV$
بیشتر حواستان

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject :
Date

مثال های سهم :

۱۹_۳

۲۲_۳

۲۴_۳

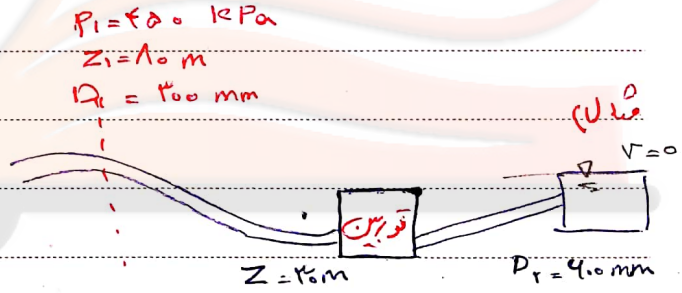
خط شیب انرژی — EGL

خط شیب هیدرولیکی — HGL

شیب تجمیع انرژی جنبشی

انرژی $E = Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$

هیدرولیکی $H = Z + \frac{P}{\gamma}$




$h_T = 48$ m

$h_p =$

$loss]_1^T = \frac{3V_1^2}{2g}$

$loss]_T^2 = \frac{3V_2^2}{2g}$

$Q = ?$

$EGL = ?$

$HGL = ?$

توربین را به عنوان کاهش دهنده فشار در نظر می‌گیریم

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - h_T + h_p = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + loss]_1^2$$

$$10 + \frac{450 \times 10^3}{9810} + \frac{V_1^2}{2g} - 48\ m = 55 + 0 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{3V_1^2}{2g} + \frac{3V_2^2}{2g}$$

$$\rightarrow 2V_1^2 + 3V_2^2 = 541.34 \quad (I)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \times 0.4^2 \times V_1 = \frac{\pi}{4} \times (0.3)^2 \times V_2$$

$$\Rightarrow V_1 = 0.56 V_2 \quad (II)$$

I , II $\Rightarrow$ $V_1 =$ m/s $V_2 = 11.7$ m/s $Q =$ m³/s

ب)

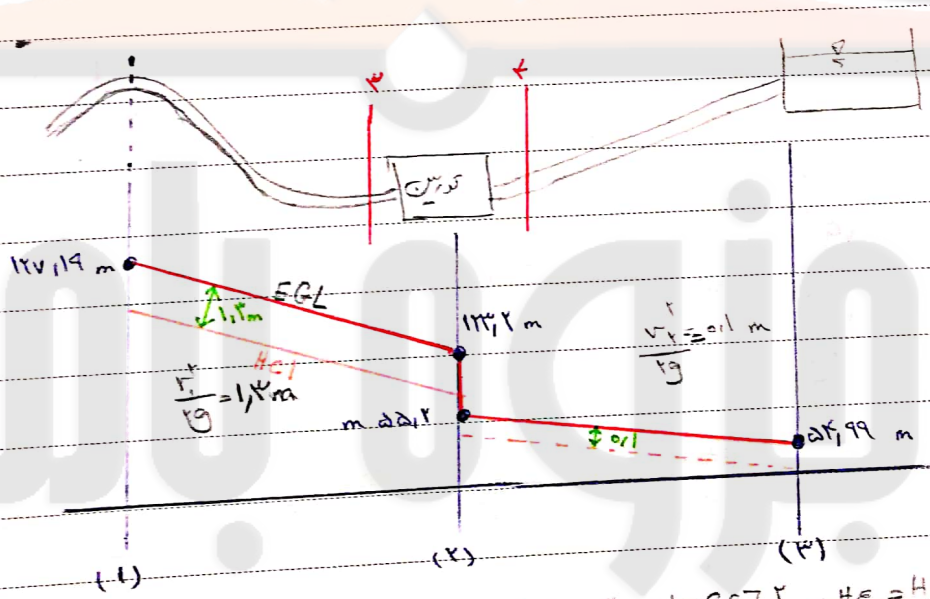
EGL = سطح انرژی

$$EGL_1 \quad H_1 = Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = 127.19 \text{ m}$$

$$EGL_2 \quad H_2 = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} - loss \Big]_1^2 =$$

$$H_1 = H_2 + loss \Big]_1^2 \rightarrow H_2 = 127.1 - 0.4 \frac{V_1^2}{2g} \Rightarrow H_2 = 122.2 \text{ m}$$

$$H_2 = H_2 - H_3 = 0.2 \text{ m}$$




$$H_2 = H_4 - loss \Big]_4^2 = 52.99 \text{ m} \qquad H_4 = H_2 + loss \Big]_4^2 \Rightarrow H_4 = H_2 + 3\frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_3 = Z_3 + \frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} \Rightarrow 50 + 0 + 0 = 50$$

کمبود فشار نداریم سیستم

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

## ضریب تصحیح اندازه حرکت

$$\beta = \frac{1}{A}\int \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2 dA$$

$$\sum F = \sum \beta \rho \bar{v} Q$$

$\beta \geq 1$

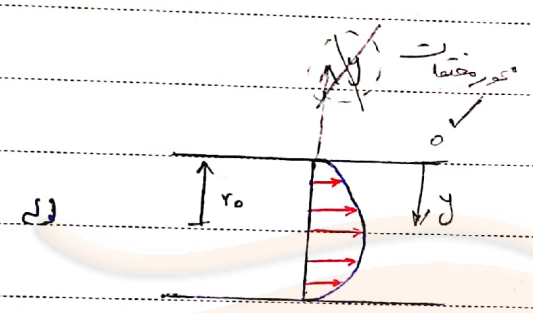
## ضریب تصحیح انرژی

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{v^2}{2g}$$

$\alpha \geq 1$

$$\alpha = \frac{1}{A}\int \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^3 dA$$

## مسئله مهم:

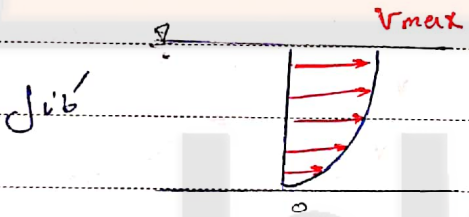



$$\frac{v}{v_{max}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7}$$

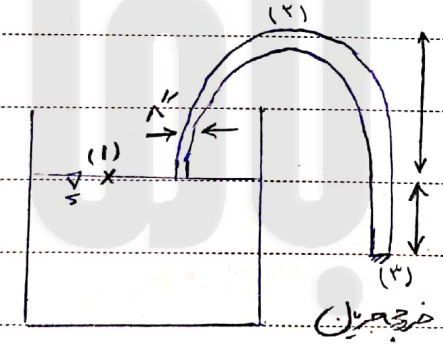
جواب ۱.۰۶

با یه اعداد دایره ای انتخاب کنیم

$\alpha = ?$ $\beta = ?$




## مسئله مهم:




$Q = 2.08\ cfs$

$loss]_1^3 = ?$

$P_2 = ?$

معادله انرژی

پیوستگی

۵- باید یک مجهول کم کنیم

$$loss]_1^2 = 2/3\ loss]_1^3$$


PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject :
Date

## فصل ۶

آنالیز ابعادی، شبیه‌سازی، مدل سازی

ابعاد بی بُعد : عدد رینولدز $Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu}$

$[Re] = \frac{[\frac{M}{L^3}][\frac{L}{T}][L]}{[\frac{M}{LT}]} = [1]$

$Re = \frac{\text{اینرسی}}{\text{لزجت}}$

- $Re < 1700$ جریان آرام
- $1100 < Re < 2300$ انتقالی
- $Re > 3500$ آشفته

عدد فرود $Fr = \frac{\text{اینرسی}}{\text{ثقل}} = \frac{V}{\sqrt{gD}}$

- $Fr > 1$ فوق بحرانی
- $Fr = 1$ بحرانی
- $Fr < 1$ زیر بحرانی

عدد اویلر $= Eu = \frac{\text{نیروی فشاری}}{\text{اینرسی}}$

عدد وبر $We = \frac{\text{کشش سطحی}}{\text{اینرسی}}$

عدد ماخ $Mc = \frac{\text{سرعت}}{\text{سرعت صوت}}$ → $> 1$ ، $= 1$ ، $< 1$

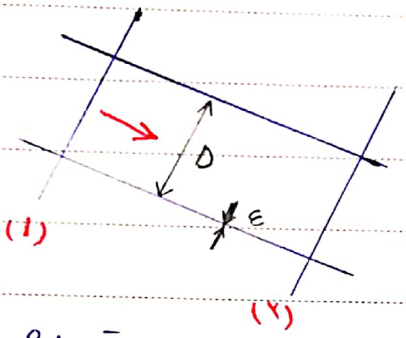


Scanned by CamScanner

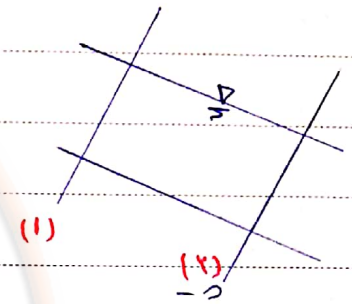
Subject:
Date

فصل ۷

جریان در لوله‌ها




جریان تحت فشار




جریان نطقی
(با سطح آزاد)

عامل حرکت اختلاف فشار است

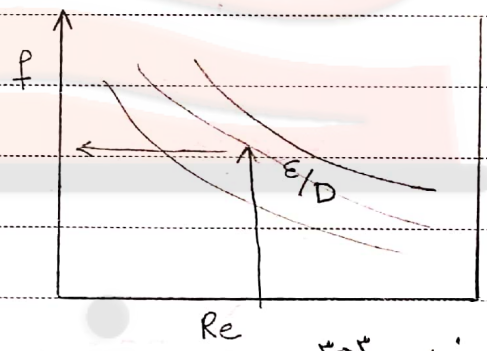
عامل حرکت ثقل است.

ضریب اصطکاک

افت طولی $h_L = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$ $\rightarrow V = \frac{Q}{A}$

$f = \frac{64}{Re}$ جریان آرام $Re < 1700$

$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$ $\frac{\varepsilon}{D} \leftarrow$ طول / قطر لوله $=$ طول




نمودار ص ۳۵۳

$H_1 = H_2 + loss$ ۲ ۱

رابطه‌ی کلبروک: (37-7)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log\left[\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7}\right)^{1.11}\right]$$

افت طولی: $h_L = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$

افت موضعی: $h_m = k_m \frac{V^2}{2g}$

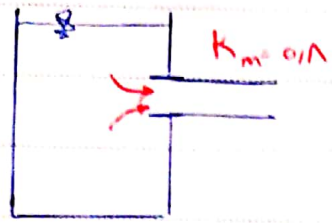
$k_m$ ضریب افت

PAPCO

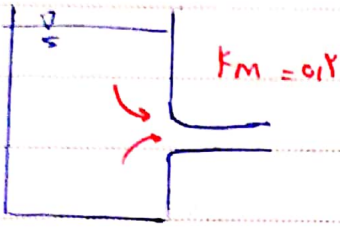
Scanned by CamScanner

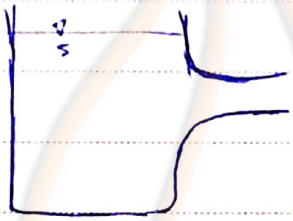
Subject :
Date

## افت ورودی ، خروجی

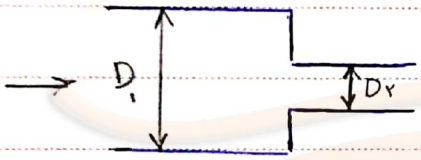


$K_m = 1$
خروجی

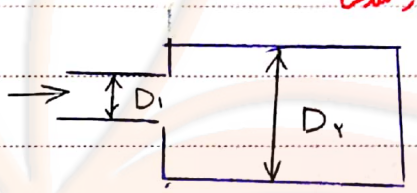


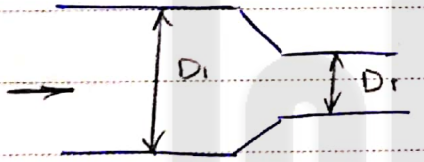

## افت تنگ شدگی ، باز شدگی



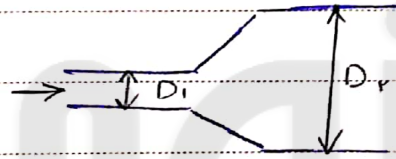

تنگ شدگی ناگهانی




باز شدگی ناگهانی




تنگ شدگی تدریجی




باز شدگی تدریجی

## افت به اضافه (تجهیزات)

$$H_1 = H_2 + h_L + h_{m1} + h_{m2} + h_{m3} + \dots$$

همیشه هرکدام از افت ها بود باید در فرمول حساب کنیم

هرکدام از این افت ها کاهنده هستند به جزیی که افزایش دهنده است



Scanned by CamScanner

تمرین‌ها:

مثال ۶ ص ۳۶۲ بقیه حذف

۷

۸

۹

۱۰

Scanned by CamScanner